

Plošný integrál

Jednoduchý integrál jsme rozšířili zavedením křivkového integrálu. Rozlišovali jsme dva druhy integrálu, přičemž křivkový integrál 2. druhu závisel na orientaci křivky. Podobně rozšíříme dvojný integrál plošným integrálem a také zde bude plošný integrál 2. druhu záviset na orientaci plochy.

Uvažujme plochu \mathcal{S} danou explicitně rovnicí $z = f(x, y)$ nebo parametricky.

1. Definice Plochu \mathcal{S} danou explicitně rovnicí $z = f(x, y)$ nazveme **hladkou plochou** jestliže pro všechny body $[x, y] \in \mathcal{S}_{xy}$ platí, že funkce $f(x, y)$ je spojitá i se svými parciálními derivacemi na \mathcal{S}_{xy} . (Volně řečeno - v každém bodě dokážeme sestavit tečnou rovinu.)

V některých případech bývá praktičtější pracovat raději s parametrickým vyjádřením plochy \mathcal{S} a vzhledem k potřebám plošného integrálu dokonce s hladkým parametrickým vyjádřením.

2. Definice Řekneme, že plocha \mathcal{S} má **hladké parametrické vyjádření**

$$x = X(u, v), y = Y(u, v), z = Z(u, v), [u, v] \in M, \quad (1)$$

jestliže jsou funkce $X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)$ spojitě i se svými prvními parciálními derivacemi $X_u, X_v, Y_u, Y_v, Z_u, Z_v$ v M , kde množina M je uzavřená a ohraničená jednoduše souvislá (tzn. „bez děr“) dvojrozměrná oblast a platí

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} \neq (0, 0, 0).$$

3. Pojmy **Jednoduchou hladkou plochou** rozumíme plochu, která sama sebe neprotíná.

Jednoduchou po částech hladkou plochou rozumíme plochu, která je sjednocením konečného počtu hladkých ploch.

Normálou plochy rozumíme přímkou kolmou k tečné rovině plochy v bodě dotyku T .

4. Poznámka V případě explicitního vyjádření (tj. $z = f(x, y)$) hladké plochy \mathcal{S} je normála

$$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1). \quad (2)$$

U hladkého parametrického vyjádření je

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix}, \quad (3)$$

kde vektory $\vec{t}_u = (X_u, Y_u, Z_u)$ a $\vec{t}_v = (X_v, Y_v, Z_v)$ jsou tečnými vektory k ploše \mathcal{S} .

5. Poznámka Rozlišujeme plochy jednostranné (např. Mőbiův list) a dvoustranné. U dvoustranných můžeme zadat orientaci. Ta se zadává buď slovy (např. normála plochy svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel), nebo se zakreslí do obrázku, nebo se specifikuje jinak, třeba pojmem vnější normála. Zadaná orientace bude buď v souladu nebo v nesouladu s explicitním nebo parametrickým vyjádřením plochy, což bude mít vliv na znaménko \pm u plošného integrálu 2. druhu.

Plošný integrál 1. druhu (neorientovaný)

- nezávisí na orientaci plochy;
- jde o integrál ze skalární funkce $F(x, y, z)$.

6. Definice Nechť \mathcal{S} je jednoduchá hladká plocha a skalární funkce $F(x, y, z) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na \mathcal{S} . Pak definujeme **plošný integrál 1. druhu**

a) pro hladké parametrické vyjádření (1)

$$\iint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) \, dS = \iint_M F(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \cdot |\vec{n}| \, du \, dv, \quad (4)$$

kde $|\vec{n}|$ je velikost normály dané vztahem (3).

b) pro explicitní vyjádření plochy $z = f(x, y)$

$$\iint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) \, dS = \iint_{\mathcal{S}_{xy}} F(x, y, f(x, y)) \cdot |\vec{n}| \, dx \, dy, \quad (5)$$

kde \mathcal{S}_{xy} je průmět plochy \mathcal{S} do roviny (x, y) a $|\vec{n}|$ je velikost normály dané vztahem (2),

tj. $|\vec{n}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$.

Poznamenejme, že na levé straně vztahů (4) a (5) vystupují plošné integrály a na straně pravé jsou integrály dvojné.

7. Věta Je-li \mathcal{S} jednoduchá po částech hladká plocha skládající se z jednoduchých hladkých částí $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$, potom

$$\iint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{\mathcal{S}_i} F(x, y, z) \, dS.$$

8. Aplikace $|\mathcal{S}| = \iint_{\mathcal{S}} 1 \, dS$ vyjadřuje plošný obsah jednoduché hladké plochy \mathcal{S} .

$m(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \varrho(x, y, z) \, dS$ vyjadřuje hmotnost plochy \mathcal{S} při plošné hustotě $\varrho(x, y, z)$.

9. Příklad Vypočtete plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} xy \, dS$, kde $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. [12]

10. Příklad Určete plošný obsah vrchlíku rotačního paraboloidu $z = 6 - x^2 - y^2$ nad rovinou $z = 0$. [$\frac{62}{3}\pi$]

11. Příklad Určete povrch horní části kulové plochy $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$. [8π]

12. Příklad Vypočtete plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dS$, kde \mathcal{S} je plášť čtvrtiny kruhového válce $x^2 + y^2 = r^2$, $r > z > 0$ v prvním oktantu a je omezený rovinami $z = 0$ a $z = h$, kde $r \geq h > 0$. [$\frac{\pi r}{4} \arcsin \frac{h}{r}$]

13. Příklad Určete povrch části zeměkoule ($R \doteq 6400\text{km}$) vymezený poledníkem 0° a 30° v.d. a rovnoběžkami 45° s.š. a 60° s.š. [$\frac{\pi R^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12}$]

14. Příklad Vypočtete plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) \, dS$, kde $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 9(x^2 + y^2), -1 \leq z \leq 2\}$. [$5\pi \frac{17}{81}$]

Plošný integrál 2. druhu (orientovaný)

- závisí na orientaci plochy;

- jde o integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

15. Definice Necht \mathcal{S} je jednoduchá hladká **orientovaná** plocha a vektorová funkce $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ má složky P, Q, R spojité na \mathcal{S} :

Pak definujeme **plošný integrál 2. druhu**

a) pro hladké parametrické vyjádření (1)

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{S} \equiv \iint_{\mathcal{S}} (P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dx dz + R(x, y, z)dx dy) = \quad (6)$$

$$= \beta \iint_M (P(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)), Q(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)), R(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))) \cdot \vec{n} du dv, \quad (7)$$

kde \vec{n} je normála daná vztahem (3) a $\beta = \pm 1$ podle toho, zda orientace normály \vec{n} souhlasí se zadanou orientací plochy.

b) při explicitním vyjádření plochy $z = f(x, y)$ platí

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}(x, y, z) dx dy = \beta \iint_{\mathcal{S}_{xy}} \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{n} dx dy, \quad (8)$$

kde \mathcal{S}_{xy} je průmět plochy \mathcal{S} do roviny (x, y) a $\beta = \pm 1$ podle toho, zda orientace normály \vec{n} souhlasí se zadanou orientací plochy.

I pro plošný integrál 2. druhu platí analogická věta jako Věta 7 pro plochu po částech hladkou.

16. Aplikace $T(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}(x, y, z) d\vec{S}$ vyjadřuje tok rychlostního pole $\vec{v}(x, y, z)$, což je vektor rychlosti kapaliny proudící jednoduchou hladkou orientovanou plochou \mathcal{S} .

17. Poznámka Plošný integrál 1. a 2. druhu nezávisí na zvolené parametrizaci.

18. Příklad Spočítejte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, kde $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Normála míří ven. [2π]

19. Příklad Spočítejte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} y dy dz + z dx dz + x^2 dx dy$, kde $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2\}$. Normála míří ven. [-4π]

U křivkového integrálu 2. druhu platí Greenova věta pro orientovanou křivku Γ , která je hranicí rovinné oblasti Ω . Pokud se zaměříme na neuzavřenou plochu \mathcal{S} , jejíž okraj tvoří orientovaná křivka Γ , pak můžeme vyslovit analogickou větu – Stokesovu. K tomu potřebujeme několik pojmů.

20. Definice Necht je dána jednoduchá po částech hladká **orientovaná** plocha \mathcal{S} s okrajem tvořeným jednoduchou po částech hladkou křivkou Γ . Řekneme, že křivka Γ je **orientována souhlasně s plochou** \mathcal{S} , pokud platí: položíme-li dlaň pravé ruky kolmo k ploše \mathcal{S} na její okraj Γ tak, že palec ukazuje směr normály plochy a prsty ukazují orientaci křivky Γ .

21. Věta Stokesova věta

Nechť \mathcal{S} je jednoduchá po částech hladká **orientovaná** plocha \mathcal{S} , jejíž okraj je uzavřená křivka Γ orientovaná souhlasně s plochou \mathcal{S} . Nechť vektorová funkce $\vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ má složky P, Q, R spojitě i se svými prvními derivacemi na \mathcal{S} . Pak platí

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \vec{F}(x, y, z) d\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{F}(x, y, z) d\vec{S}. \quad (9)$$

Ekvivalentní forma zápisu:

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\vec{S} = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy + Rdz). \quad (10)$$

22. Příklad Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, kde $\Gamma = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$. [−2π]

23. Příklad Je dána funkce $\vec{F} = (z, xy, xy)$ a plocha \mathcal{S} parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \quad x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \\ z &= u^2 \cos^2 v, \quad \text{kde } 0 \leq u \leq 1 \text{ a } 0 \leq v \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Ověřte platnost Stokesovy věty, tj. spočítejte:

a) $\int_{\Gamma} (z, xy, xy) d\vec{s}$, kde Γ je okraj plochy \mathcal{S} . [− $\frac{\pi}{2}$]

Nápověda: Parametrické rovnice křivky Γ získáte pro $u = 1$.

b) $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(z, xy, xy) d\vec{S}$. [− $\frac{\pi}{2}$]

24. Příklad Je dána funkce $\vec{F} = (-y, x, z)$ a plocha \mathcal{S} parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \quad x &= u \sin v \\ y &= u \cos v \\ z &= u^2 \sin^2 2v, \quad \text{kde } 0 \leq u \leq 1 \text{ a } 0 \leq v \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Ověřte platnost Stokesovy věty, tj. spočítejte:

a) $\int_{\Gamma} (-y, x, z) d\vec{s}$, kde Γ je okraj plochy \mathcal{S} . [−2π]

Nápověda: Parametrické rovnice křivky Γ získáte pro $u = 1$.

b) $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(-y, x, z) d\vec{S}$. [−2π]

25. Příklad Je dána funkce $\vec{F} = (x \ln z, y \ln z, xy)$ a plocha \mathcal{S} parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \quad x &= u \\ y &= v \\ z &= uv, \quad \text{kde } 1 \leq u \leq 2 \text{ a } 1 \leq v \leq 3\pi. \end{aligned}$$

Ověřte platnost Stokesovy věty, tj. spočítejte:

a) $\int_{\Gamma} (x \ln z, y \ln z, xy) d\vec{s}$, kde Γ je okraj plochy \mathcal{S} . [4ln 2 − $\frac{3}{2 \ln 3}$]

Nápověda: Okraj plochy \mathcal{S} je složený ze čtyř částí, tedy $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Je tedy potřeba spočítat čtyři samostatné integrály.

b) $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(x \ln z, y \ln z, xy) d\vec{S}$. [4ln 2 − $\frac{3}{2 \ln 3}$]

26. Věta Gaussova–Ostrogradského věta

Nechť \mathcal{S} je po částech hladká jednoduchá **uzavřená** plocha, která je orientovaná kladně. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je trojrozměrná oblast, jejíž hranicí je plocha \mathcal{S} . Nechť vektorová funkce $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ má složky P, Q, R spojitě na $\partial\Omega \equiv \mathcal{S}$ a spojitě derivace Q_y, P_x, R_z na Ω . Pak platí

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}(x, y, z) \, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) \, dx dy dz. \quad (11)$$

Ekvivalentní forma věty zní:

$$\iint_{\mathcal{S}} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (12)$$

27. Aplikace $V(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} (x, y, z) \, d\vec{S}$ vyjadřuje objem tělesa Ω , jehož hranici tvoří plocha \mathcal{S} .

28. Příklad Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtete plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x, y, z) \, d\vec{S}$, kde \mathcal{S} je povrch čtyřstěnu omezeného rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$. Normála míří ven. $\left[\frac{1}{2}\right]$

29. Příklad Spočtete $\iint_{\mathcal{S}} (x, y^2 z, z^2) \, d\vec{S}$, kde \mathcal{S} je obdélník daný body $A[2, 2, 3], B[2, 2, 5], C[2, 4, 3], D[2, 4, 5]$, jehož orientace je dána normálou $(1, 0, 0)$ v bodě $[2, 3, 4]$. $[[?]]$

30. Příklad Spočtete $\iint_{\mathcal{S}} (x^2, y, 5) \, d\vec{S}$, kde \mathcal{S} je rovina daná body $A[1, 0, 0], B[0, 7, 0], C[0, 0, 5]$ a orientace je dána normálou, která míří do poloprostoru, který obsahuje počátek souřadného systému. $[[?]]$

31. Příklad Vypočtete tok kapaliny přes boční stěny čtyřstěnu $ABCD$ s podstavou ABC . $A[0, 0, 0], B[2, 0, 0], C[0, 1, 0], D[0, 0, 2]$. Stěny jsou orientovány ve směru vnější normály a vektor proudění $\vec{v} = (yz, zx, xy)$. $\left[\frac{1}{6}\right]$

32. Příklad Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtete plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x^2, y^2, z^2) \, d\vec{S}$, kde plocha \mathcal{S} je vnější strana povrchu kvádru $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle \times \langle 0, c \rangle$. Normála míří ven z kvádru. $[abc(a + b + c)]$

33. Příklad

Je dána funkce $\vec{F} = (x^2 y z, x y^2 z, z^3 \sqrt{x^2 + y^2})$ a plocha \mathcal{S} je hranicí tělesa $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; 3(x^2 + y^2) \leq z; z \geq 0\}$.

Ověřte platnost Gaussovy–Ostrogradského věty, tj. spočtete:

a) $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 y z, x y^2 z, z^3 \sqrt{x^2 + y^2}) \, d\vec{S}$, kde \mathcal{S} je hranice tělesa Ω . $[-\sqrt{3}\pi + \frac{4}{3}\pi^2]$

Nápověda: Plocha \mathcal{S} je složená ze dvou částí, tedy $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Je tedy potřeba spočítat dva samostatné integrály a je to časově náročné.

b) $\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(x^2 y z, x y^2 z, z^3 \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy dz$. $[-\sqrt{3}\pi + \frac{4}{3}\pi^2]$