8 Kvadratické formy

1. Podle Definice 5 v Kapitole 7 (tj. Diferenciály a kvadratické formy) lze vektoru $\vec{x}$ přiřadit číslo pomocí kvadratické formy:
$$\vec{x} \to \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j.$$
Pak matice
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
se nazývá *matice kvadratické formy.*

2. Například, pro $n = 2$ uvažujme kvadratickou formu $\kappa = 4\,\mathrm{d}x^2 + 5\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6\,\mathrm{d}y^2$ a vektor $\vec{u} = (1, 5)$, tedy $\kappa(\vec{u}) = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 = 179$.

   V našem případě je $a_{11} = 4$, $a_{12} = a_{21} = \frac{5}{2}$ a $a_{22} = 6$, pak tedy matice kvadratické formy je $\begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$.

3. Matice kvadratické formy je symetrická, tzn. $a_{ij} = a_{ji}\, \forall i, j$.

4. (a) Kvadratická forma κ je *pozitivně definitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$
$$\kappa(\vec{u}) > 0.$$
   (b) Kvadratická forma κ je *negativně definitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$
$$\kappa(\vec{u}) < 0.$$
   (c) Kvadratická forma κ je *pozitivně semidefinitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$
$$\kappa(\vec{u}) \geq 0.$$
   (d) Kvadratická forma κ je *negativně semidefinitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$
$$\kappa(\vec{u}) \leq 0.$$
   (e) Kvadratická forma κ je *indefinitní*, existuje-li vektor $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tak, že
$$\kappa(\vec{u}) > 0 \qquad \kappa(\vec{v}) < 0.$$

5. Pozitivně definitní kvadratická forma je i pozitivně semidefinitní a i naopak negativně definitní kvadratická forma je i negativně semidefinitní.

   Pozitivní definitnost, negativní definitnost a indefinitnost se navzájem vylučují.

   Pozitivní semidefinitnost a negativní semidefinitnost splňuje pouze nulová kvadratická forma.

   Pro $n = 1$ neexistuje indefinitní kvadratická forma ($\kappa = ax^2$).

6. **Sylvestrovo kritérium**

   Nechť $\mathbb{D}$ je matice kvadratické formy κ a označme $D_1 = \det\,[d_{11}]$, $D_2 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \dots, D_n = \det \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$.

   Pak řekneme, že kvadratická forma κ je

   (a) pozitivně definitní právě tehdy, když
$$D_1 > 0, \dots, D_n > 0,$$

(b) negativně definitní právě tehdy, když

$$(-1)^1 D_1 > 0, (-1)^2 D_2 > 0, (-1)^3 D_3 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0,$$

tedy

$$D_1 < 0, D_2 >, D_3 < 0, \dots,$$

(c) pozitivně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0,$$

(d) negativně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0, \dots,$$

(e) indefinitní právě tehdy, když nenastane žádný případ z výše uvedených.

7. *Příklad*

Vyšetřete kvadratickou formu $\kappa = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4xz - 12yz$.

Řešení:

$D_1 = 2$, $D_2 = 6$, $D_3 = -60$, kvadratická forma κ je indefinitní.