

# Limita funkce

© ÚM FSI VUT v Brně

20. srpna 2007

- 1.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x+2}{x-2}$

- 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

- 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

- 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

## Příklad 1. Spočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x + 2}{x - 2}$$

Příklad 1.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x+2}{x-2}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 \cdot 4 + 2}{4 - 2}$

Dosazením zjistíme, že funkce v limitě je spojitá v bodě 4, stačí tedy spočítat hodnotu po dosazení.

Příklad 1.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x+2}{x-2}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 \cdot 4 + 2}{4 - 2} = 7$

## Příklad 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$$

Příklad 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$

Úprava čitatele podle vzorce  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$   
a jmenovatele podle vzorce  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Příklad 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

Řešení: 
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Výraz  $x^2 - 1$  jsme opět upravili podle již zmíněného vzorce



Příklad 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Zbavili jsme se v čitateli i jmenovateli problémového kořene  $x = 1$

Příklad 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)} =$$
$$= \frac{3}{4}$$

Stačilo do výrazu dosadit  $x = 1$ , výraz jako funkce už je spojitý v tomto bodě.

### Příklad 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Příklad 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení:  $\left[ \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = 3 \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

Nejprve provedeme tuto algebraickou úpravu výrazu.

Příklad 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení:  $\left[ \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = 3 \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{(\sin 3x)/3x}{(\cos 4x)/4x} =$$

Hodnota limity se touto úpravou nezmění..

### Příklad 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení:  $\left[ \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = 3 \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 (\sin 3x)/3x}{4 (\cos 4x)/4x} = \frac{3}{4} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x)/3x}{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)/4x}$$

Jelikož je limita jmenovatele pro  $x \rightarrow 0$  různá od nuly, můžeme počítat zvlášť limitu čitatele a jmenovatele.

Příklad 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení:  $\left[ \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = 3 \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 (\sin 3x)/3x}{4 (\cos 4x)/4x} = \frac{3}{4} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x)/3x}{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)/4x} = \frac{3}{4}$$

Jelikož platí  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$  pro libovolné  $u$ , je limita v čitateli i jmenovateli rovna 1.

## Příklad 4. Spočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$



Příklad 4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{1-1/x}$

Celý výraz rozšíříme zlomkem  $\frac{1}{x}$ .

Příklad 4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$

Řešení: 
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)}$$

Protože limita jmenovatele nebyla 0, mohli jsme provést tuto úpravu.  
Dále je zřejmé, že  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$ .

Příklad 4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$

Řešení:  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$