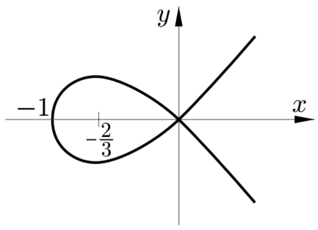
6. Implicitní funkce

Uvažujme rovnici $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných a nechť $\Omega = \{[x, y] \in \in Df; f(x, y) = 0\}$ je množina všech řešení této rovnice. Na následujících příkladech ukažme, že množina Ω může být velmi rozmanitá.

1. Pro $f(x, y) = x^6 + x^2 + 1$ je $\Omega = \emptyset$.
2. Pro $f(x, y) = x^4 + y^4$ je $\Omega = \{[0, 0]\}$.
3. Pro $f(x, y) = xy - |xy|$ je $\Omega = \{[x, y]; x, y \geq 0 \vee x, y \leq 0\}$, tj. celý první a třetí kvadrant.
4. Pro $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $\Omega = \{[x, x]; x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, -x]; x \in \mathbb{R}\}$. Množinu Ω tedy tvoří dvojice přímek $y = x$ a $y = -x$.
5. Pro $f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$ se nedá struktura množiny Ω již snadno uhodnout. Snadno se ale spočítá, že $y = \pm\sqrt{x^3 + x^2}$. Odtud plyne, že množina Ω bude symetrická podle osy x. Stačí tedy vyšetřit průběh funkce $g(x) := \sqrt{x^3 + x^2}$. Viz Obrázek 6.1.



Obr. 6.1: Graf funkce dané implicitně rovnicí $x^3 + x^2 - y^2 = 0$

Je zřejmé, že množina Ω není grafem žádné funkce. V okolí některých konkrétních bodů ji však lze za graf funkce považovat. Tyto úvahy přirozeným způsobem vedou k zavedení pojmu funkce dané implicitně rovnicí.

Definice 6.1. Buď $A = [x_0, y_0] \in Df$ bod definičního oboru funkce $f(x, y)$ takový, že $A \in \Omega$. Existuje-li okolí $K(A, \delta)$ tak, že $\Omega \cap K(A, \delta)$ je totožná s grafem nějaké funkce $y = g(x)$, pak říkáme, že funkce $g(x)$ je v okolí bodu A určena **implicitně rovnicí** $f(x, y) = 0$.

Věta 6.2. **(O existenci)** Nechť $f(x, y)$ je spojitá na δ-okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ a $A \in \Omega$. Má-li funkce $f(x, y)$ spojitou parciální derivaci $f'_y(x, y)$ v bodě A a platí $f'_y(A) \neq 0$, pak existuje okolí bodu A v němž je rovnicí $f(x, y) = 0$ definována implicitně právě jedna spojitá funkce $y = g(x)$.

Poznámka 6.3. Věta 6.2 nemá konstruktivní charakter, tj. neumožňuje funkci g nalézt. Funkce g daná implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ může být totiž vyšší funkce, i když f je elementární. Podmínka $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ je postačující, nikoli však nutná pro existence implicitní funkce. Viz například rovnice $x - y^3 = 0$.

Věta 6.4. **(O derivaci)** Nechť jsou splněny předpoklady Věty 6.2 a nechť f má v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu. Pak má funkce $y = g(x)$, která je v okolí A určena implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$g'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Poznámka 6.5. Vysvětleme hlavní ideu důkazu. Rovnici $f(x,y)=0$ zderivujeme podle x, přičemž f považujeme za složenou funkci proměnné x. Tedy y považujeme ze funkci proměnné x. Platí $f'_x\cdot x'_x+f'_y\cdot y'_x=0 \Leftrightarrow f'_x+f'_y y'=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$. Analogicky lze počítat i vyšší derivace. Odvoďme vzorec pro y''. Rovnici $f'_x+f'_y y'=0$ znovu zderivujeme podle x. $f''_{xx}+f''_{xy}y'+(f''_{yx}+f''_{yy}y')y'+f'_y y''=0$. Odtud po dosazení za y' a krátké úpravě dostaneme

$$y''=-\frac{f''_{xx}(f'_y)^2-2f''_{xy}f'_xf'_y+f''_{yy}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

Příklad 6.6. Nalezněte $y'(0)$ pro funkci danou implicitně rovnicí $\mathrm{e}^{xy}-x^2+y^3=0$.

Řešení. Nejprve postupujme podle vzorce $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$. Spočteme $F'_x=y\mathrm{e}^{xy}-2x$ a $F'_y=x\mathrm{e}^{xy}+3y^2$. Odtud plyne

$$y'=-\frac{y\mathrm{e}^{xy}-2x}{x\mathrm{e}^{xy}+3y^2}=\frac{2x-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}+3y^2}.$$

Ke stejnému výsledku lze dojít zderivováním zadané rovnice podle x. Platí

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')-2x+3y^2y'=0.$$
$$y'(x\mathrm{e}^{xy}+3y^2)=2x-y\mathrm{e}^{xy}.$$

Odtud však opět plyne

$$y'=\frac{2x-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}+3y^2}.$$

Abychom mohli do posledně uvedeného vztahu dosadit, musíme vědět čemu je rovno y. To zjistíme tak, že dosadíme $x=0$ do zadané rovnice. Platí $\mathrm{e}^0-0+y^3=0$. Odtud $y^3=-1$ a tedy $y=-1$. Nyní $y'(0)=\frac{2\cdot 0-(-1)\mathrm{e}^{0(-1)}}{3(-1)^2+0\cdot\mathrm{e}^{0\cdot(-1)}}=\frac{1}{3}$. Z kladnosti derivace plyne, že funkce daná implicitně je v bodě $x=0$ rostoucí.

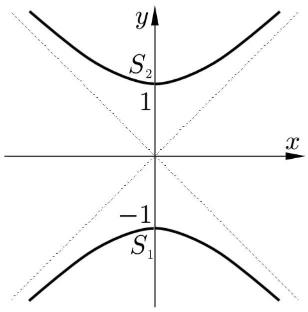
Příklad 6.7. Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $x^2-y^2+1=0$.

Řešení. Nejprve vypočteme derivaci y' podle vzorce $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$. Platí $y'=-\frac{2x}{-2y}=\frac{x}{y}$.

Podobně zderivováním rovnice $x^2-y^2+1=0$ dostáváme $2x-2yy'=0$, odkud plyne $y'=\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y}$. Derivace existuje kdykoliv, když $y'\neq 0$. Nalezneme stacionární body. Zřejmě $y'=0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=0 \Leftrightarrow x=0$. Ze zadané rovnice dosazením $x=0$ dopočítáme y.

Platí $y^2=1$ a odtud $y=-1$ nebo $y=1$. Získali jsme dva stacionární body $S_1=[0,-1]$ a $S_2=[0,1]$. Dále spočteme y''. Rovnici $2x-2yy'=0$ znovu zderivujeme podle x. Platí $2-2y'y'-2yy''=0$. Odtud $y''=\frac{2-2(y')^2}{2y}=\frac{1-(y')^2}{y}$.

Pomocí druhé derivace rozhodneme existenci extrémů ve stacionárních bodech. Pro bod S_1 platí $y''(0)=\frac{1-(\frac{0}{-1})^2}{-1}=-1<0$. Tedy v bodě S_1 je lokální maximum. Pro bod S_2 platí $y''(0)=\frac{1-(\frac{0}{1})^2}{1}=1>0$. V S_2 je lokální minimum. Viz Obrázek 6.2.



Obr. 6.2: Lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $x^2-y^2+1=0$