Elementární funkce

Elementární funkce jsou níže uvedené funkce a jejich „složeniny“:

1. Polynomy.
2. Racionální funkce.
3. Mocninné funkce.
4. Exponenciální funkce.
5. Logaritmické funkce.
6. Goniometrické funkce.
7. Cyklometrické funkce.
8. Hyperbolické funkce.
9. Hyperbolometrické funkce.

Polynomy

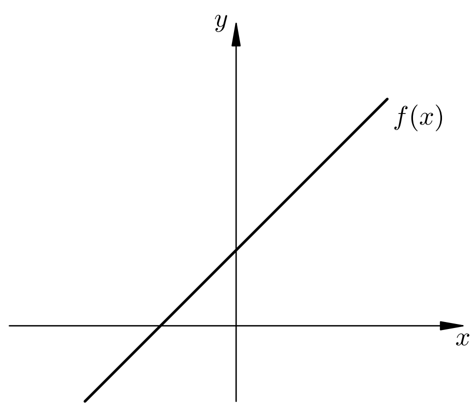
1. Definice $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}; \ a_n \neq 0; \quad Dom\, f = \mathbb{R}.$

2. Příklad Určete stupeň následujících polynomů:
$f(x) = x^3 - 2x + 1$ polynom stupně 3.
$f(x) = 2$ polynom stupně 0.
$f(x) = 0$ polynom nedefinovaného stupně.

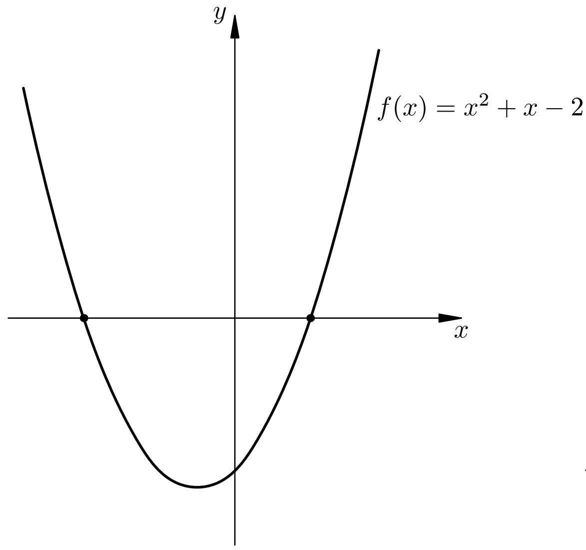
3. Definice **Kořen polynomu** $f(x)$ je takové číslo r, pro které platí $f(r) = 0$.

Polynom stupně n má n komplexních kořenů počítaje v to i jejich násobnost. Má-li polynom komplexní kořen $(a + b_i)$ má i $(a - b_i)$ – komplexně sdružená čísla. Proto polynomy lichého stupně mají alespoň 1 reálný kořen.

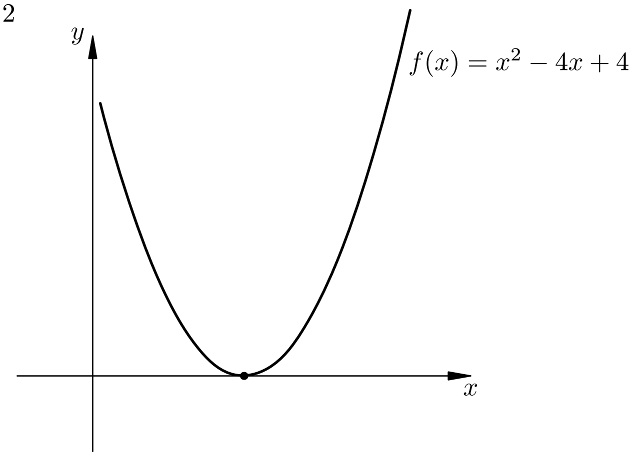
- Polynom 1. stupně – *lineární polynom* (viz Obr. 1): $f(x) = ax + b; \quad a \neq 0$.
  Vzorec pro výpočet kořenů: $x_1 = -\frac{b}{a}$, křivka: přímka .



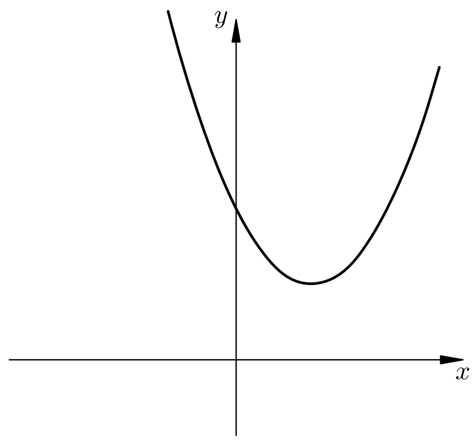
Obrázek 1: Lineární polynom



Obrázek 2: 2 reálné kořeny

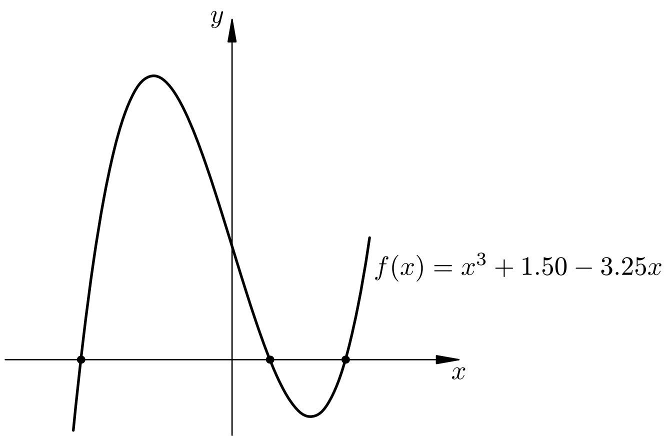


Obrázek 3: 1 dvojnásobný reálný kořen

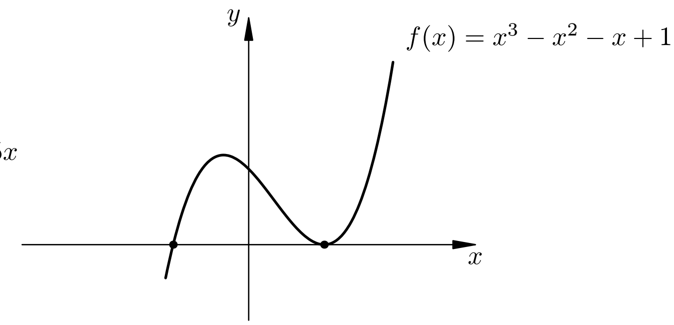


Obrázek 4: 2 komplexně sdružené kořeny

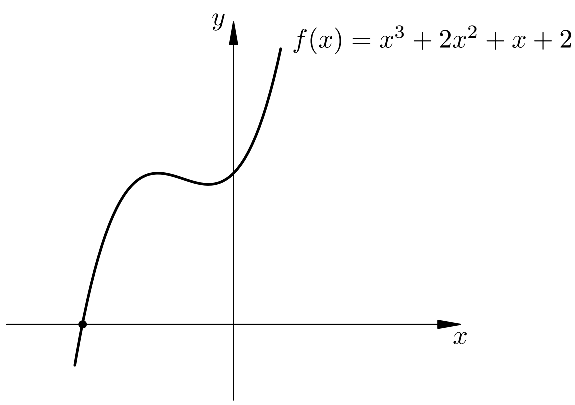
- Polynom 2. stupně – *kvadratický polynom* (viz Obr. 13, 3 a 4): $f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0.$
  Vzorec pro výpočet kořenů: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, křivka: parabola.
  kořeny:
  - 2 reálné
  - 1 dvojnásobný (reálný)
  - žádný reálný a 2 komplexní (komplexně sdružená čísla)
- Polynom 3. stupně – *kubický polynom* (viz Obr. 5, 6 a 7): $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a \neq 0.$
  Vzorec pro výpočet kořenů: Cardanovy vzorce, křivka: kubická parabola.
  kořeny:
  - 3 reálné
  - 1 reálný + 2 komplexní
- Polynom 4. stupně (viz Obr. 8, 9 a 10): $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e; \quad a \neq 0.$



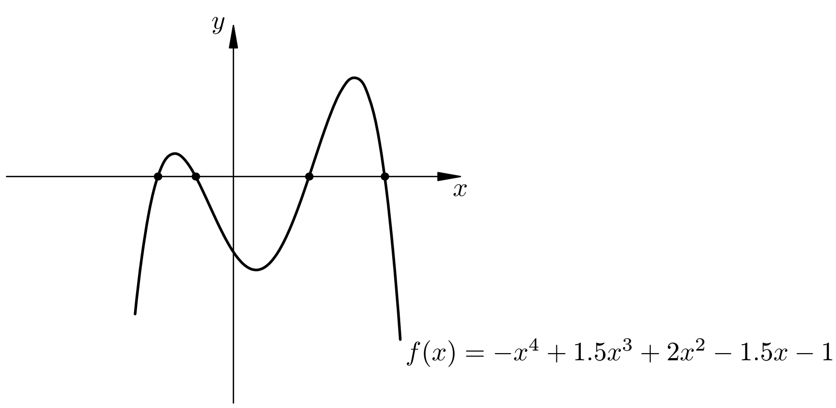
Obrázek 5: 3 reálné kořeny



Obrázek 6: 3 reálné kořeny



Obrázek 7: 1 reálný a 2 komplexně sdružené kořeny

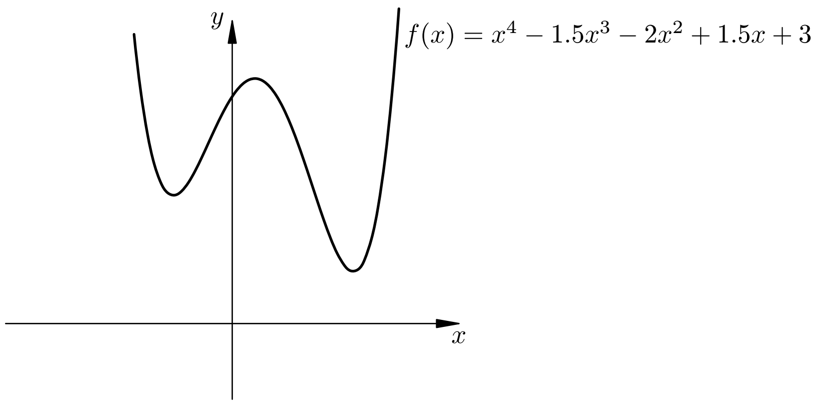


Obrázek 8: 4 komplexní kořeny

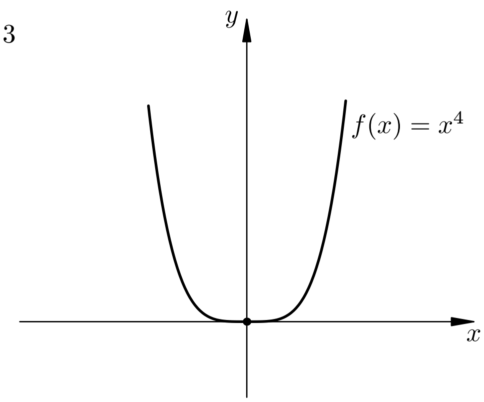
4. Poznámka Nelze najít vzorec pro výpořet kořenů polynomu 5. stupně.

Rozklad polynomu na kořenové činitele:

Rozklad je možný v komplexním oboru. V reálném oboru lze každý polynom stupně alespoň 1 rozložit na součin lineárních polynomů (což jsou kořenoví součinitelé) a ireducibilních (nerozložitelných)



Obrázek 9: 4 reálné kořeny



Obrázek 10: 1 reálný (čtyřnásobný)

kvadratických polynomů.

5. Poznámka Podmínkou rozložitelnosti kvadratického polynomu ve tvaru $x^2 + px + q = 0$ (normovaný tvar) je $p^2 - 4q > 0$.

6. Příklad Rozložte polynom $x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3$ na součin lineárních nebo kvadratických polynomů.

Řešení: Je na první pohled zřejmé, že můžeme vytknout x^3, čímž získáme trojnásobný kořen $x_{1,2,3} = 0$. Dále zkoušíme jednoduché kořeny (např. $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$):

$$x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3 = \underbrace{x^3}_{(x-0)(x-0)(x-0)}(x^3 + 2x^2 - 4x + 1)$$

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 4x + 1) : (x - 1) = x^2 + 3x - 1 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad 3x^2 \quad -4x \quad +1 \\
\quad -(3x^2 - 3x) \\
\hline
\qquad -x \quad +1 \\
\qquad -(-x+1) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$x^3 + 3x - 1 = (x - \frac{-3+\sqrt{13}}{2})(x - \frac{-3-\sqrt{13}}{2})x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3 = x^3(x-1)(x - \frac{-3+\sqrt{13}}{2})(x - \frac{-3-\sqrt{13}}{2})$

7. Příklad Rozložte v $\mathbb{R}$ polynom $f(x) = x^4 + 1$.

Řešení: $f(x) = x^4 + 1 = \underbrace{x^4 + 2x^2 + 1}_{\text{doplnění na čtverec}} - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

Racionální funkce

8. Definice

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \quad P, Q \ldots \text{polynomy}, \; Q \neq 0; \quad Dom\, f = \mathbb{R} - \{\text{ kořeny } Q(x)\}$$

Každý polynom je racionální funkcí.Racionální funkce se nazývá *ryzí*, jestliže $deg\,P < deg\,Q$. Je-li tomu jinak (tedy $deg\,P \geq deg\,Q$), pak je racionální funkce neryzí a dá se vyjádřit jako součet polynomů a ryzí racionální funkce.

9. Příklad Převeďte neryze lomenou funkci $f(x) = \dfrac{x^7 - x^2 + 1}{x^5 + 4}$ na součet polynomu a ryze lomené funkce.

Řešení:

$$\begin{array}{l} (x^7 - x^2 + 1) : (x^5 + 4) = x^2 \\ -(x^7 + 4x^2) \\ \hline \quad -5x^2 + 1 \end{array}$$

Výsledkem tedy je $f(x) = \dfrac{x^7 - x^2 + 1}{x^5 + 4} = x + \dfrac{-5x^2 + 1}{x^5 + 4}$.

10. Poznámka Ryzí racionální funkce se dá vyjádřit jako součet parciálních zlomků.

11. Definice **Parciální zlomky** mají tvar

a) $\dfrac{A}{x - r}$;

b) $\dfrac{A}{(x - r)^K}$;

c) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad p^2 - 4q < 0$;

d) $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^K}, \quad p^2 - 4q < 0$.

12. Jak získat ryzí racionální funkci:

i) Rozložíme polynom $Q(x)$.

ii) Jestliže je v tomto rozkladu

– $(x - r)^K$ budeme mít parciální zlomky: $\dfrac{A_1}{(x - r)}, \dfrac{A_2}{(x - r)^2}, \dots, \dfrac{A_K}{(x - r)^K}$

– $(x^2 + px + q)^K$ budeme mít parciální zlomky: $\dfrac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)}, \dfrac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2}, \dots, \dfrac{B_K x + C_K}{(x^2 + px + q)^K}$

iii) Zapíšeme „skupinky“ parciálních zlomků a porovnáváme polynomy.

13. Příklad Rozložte $f(x) = \dfrac{2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 8x + 16}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16}$ na parciální zlomky.

Řešení: Např. pomocí Hornerova schématu rozložíme

$$Q(x) = 2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 8x + 16 = (x + 1)(x - 2)^2(x^2 + 4).$$

Najdeme „skupinky“ parciálních zlomků:

$(x + 1) : \dfrac{A}{x + 1}$

$(x - 2)^2 : \dfrac{B}{x - 2} + \dfrac{C}{(x - 2)^2}$

$(x^2 + 4) : \dfrac{Dx + E}{x^2 + 4}$

$$\frac{2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 8x + 16}{x^5 - 3x^4 - 8x2 + 16} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

$A(x - 2)^2(x^2 + 4) + B(x + 1)(x - 2)(x^2 + 4) + C(x + 1)(x^2 + 4) + (Dx + E)(x + 1)(x - 2)^2 =$

$= A(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16) + B(x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8) + C(x^3 + x^2 + 4x + 4) + (Dx + E)(x^3 - 3x^2 + 4) =$

$= Ax^4 - 4Ax^3 + 8Ax^2 - 16Ax + 16A + Bx^4 - Bx^3 + 2Bx^2 - 4Bx - 8B + Cx^3 + Cx^2 + 4Cx + 4C + Dx^4 - 3Dx^3 + 4Dx + Ex^3 - 3Ex^2 + 4E$

$x^4: \; 2 = A + B + D$
$x^3: \; -7 = -4A + -B + C - 3D + E$
$x^2: \; 12 = 8A + 2B + C - 3E$
$x^1: \; -8 = -16A - 4B + 4C + 4D$
$x^0: \; 16 = 16A - 8B + 4C + 4E$

Řešením této soustavy lineárních rovnic (např. pomocí matic) získáme hodnotu jednotlivých koeficientů.

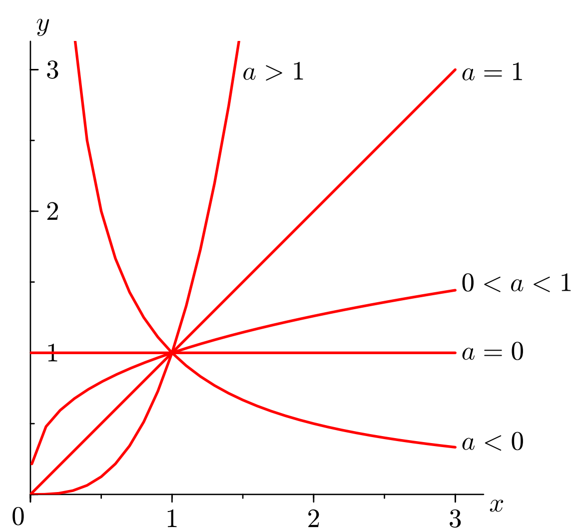
$$A = 1, \; B = 0, \; C = 1, \; D = 1, \; E = -1$$

a tedy

$$\frac{2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 8x + 16}{x^5 - 3x^4 - 8x2 + 16} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{x^2+4}.$$

Mocninná funkce

14. Definice $f(x) = x^a$, viz Obr. 11.



Obrázek 11: Obecná mocninná funkce $f(x) = x^a$

- $a \in \mathbb{N}$; $f(x) = x^a = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{a-krát}$; $\quad Dom\, f = \mathbb{R}$ (jde o polynom)
- $a \in \mathbb{Z}$
  - $a > 0, \; Dom\, f = \mathbb{R}$
  - $a = 0, \; Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$ (0^0 nedefinováno) $\qquad x^0 = 1$
  - $a < 0, \; Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\} \qquad x^a = \frac{1}{x^{-a}}$
- $a = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}$; $f(x) = \sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$; $\quad Dom\, f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{pro } a \text{ liché} \\ \langle 0, +\infty), & \text{pro } a \text{ sudé} \end{cases}$

15. Definice n-tá odmocnina $\sqrt[n]{x}$ je definovaná jako číslo $p \in \mathbb{R}$ takové, že $\underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{n-krát} = x$; jsou-li taková čísle dvě, pak pouze to kladné z nich.

16. Příklad

$n = 2 : \sqrt{4} \quad p: \ 2 \cdot 2 = 4 \wedge (-2) \cdot (-2) = 4 \rightarrow p = 2$

$n = 3 : \sqrt[3]{-27} \quad p: \ (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \rightarrow p = -3$

$\sqrt{x^2} = | x | \qquad \sqrt{-4}: \ p$ neexistuje.

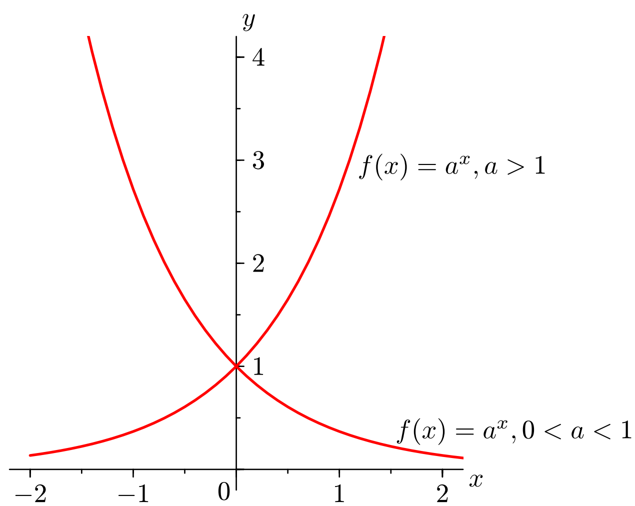
- $a \in \mathbb{Q}$; $f(x) = x^a = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$; $\quad Dom\, f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{pro } q \text{ liché} \\ \langle 0, +\infty), & \text{pro } q \text{sudé} \end{cases}$

17. Příklad $\sqrt{(-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{1} = 1$!!!!!
Náš postup je ovšem špatný, neboť definice racionálního čísla říká, že p a q jsou nesoudělná, tudíž krok $(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{4}}$ byl chybný a výsledek není správný.

- $a \in \mathbb{R}$; $\quad Dom\, f = \langle 0, +\infty)$ $a = \lim a_n \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (posloupnost racionálních čísel.) $x^a = x^{\lim a_n} = \lim x^{a_n}$.

Exponenciální funkce

18. Definice $f(x) = a^x$; $\quad a > 0$; $\quad Dom\, f = \mathbb{R}$. Viz Obr. 12.



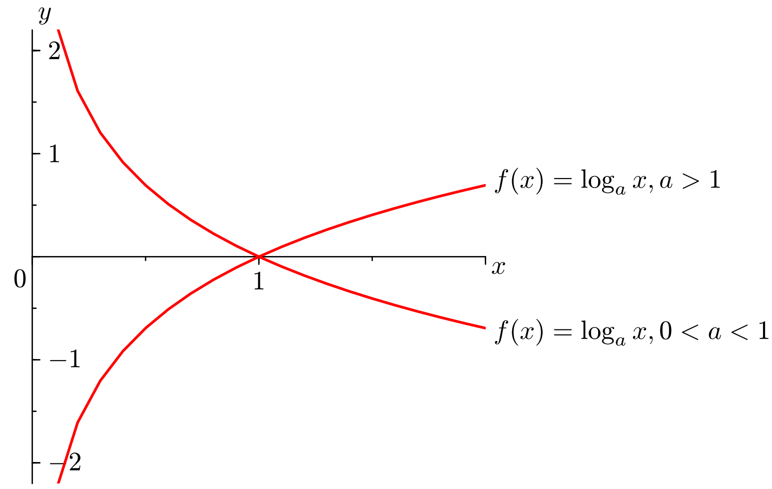
Obrázek 12: Exponenciální funkce $f(x) = a^x$

19. Poznámka Je-li $a = \mathrm{e}$, pak jde o přirozenou exponenciální funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ ($\mathrm{e} \doteq 2,718\,281\ldots$).

Logaritmické funkce

20. Definice Inverzní funkce k exponenciálním jsou logaritmické (viz Obr. 13)

$$f(x) = \log_a x; \quad a > 0, \ a \neq 1; \quad Dom\, f = (0, \infty).$$

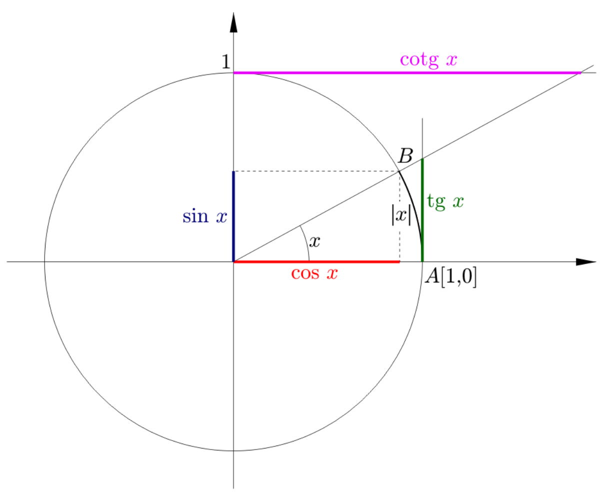


Obrázek 13: Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$

21. Poznámka Je-li $a = \mathrm{e}$, jde přirozený logaritmus, který zapisujeme jako $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$.
Je-li $a = 10$ pak značíme $\log_{10} x = \log x$.

Goniometrické funkce

22. Jednotková kružnice Viz Obr. 14.



Obrázek 14: Jednotková kružnice

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
  $Dom\, f = \mathbb{R}$
  $Im\, f = \langle -1; 1\rangle$
  perioda: 2π, lichá funkce
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
  $Dom\, f = \mathbb{R}$

$Im\, f = \langle -1; 1\rangle$
perioda: 2π, sudá funkce

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
  $Dom\, f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
  $Im\, f = \mathbb{R}$
  perioda: π

- $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}^{-1} \alpha$
  $Dom\, f = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
  $Im\, f = \mathbb{R}$
  perioda: π

- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b}$
  $Dom\, f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
  $Im\, f = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$

- $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{a}$
  $Dom\, f = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
  $Im\, f = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

- $\operatorname{arc} \sin x$
  $Dom\, f = \langle -1; 1\rangle$
  $Im\, f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$

- $\operatorname{arc} \cos x$
  $Dom\, f = \langle -1; 1\rangle$
  $Im\, f = \langle 0; \pi\rangle$

- $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$
  $Dom\, f = \mathbb{R}$
  $Im\, f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$

- $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$
  $Dom\, f = \mathbb{R}$
  $Im\, f = \langle 0; \pi\rangle$

- $\operatorname{arc} \sec x$
  $Dom\, f = \mathbb{R} - (-1; 1)$
  $Im\, f = \langle 0; \pi\rangle - \{\frac{\pi}{2}\}$

- $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$
  $Dom\, f = \mathbb{R} - (-1; 1)$
  $Im\, f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle - \{0\}$

Hyperbolické funkce

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

- $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} x}$

- $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

- $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\sinh x}$

Hyperbolometrické funkce

Hyperbolometrické funkce jsou inverzní k hyperbolickým funkcím:

- $\arg\sinh x$[1]

- $\arg\cosh x$

- $\arg\ \operatorname{tgh} x$

- $\arg\ \operatorname{cotgh} x$

23. Operace:

- $f \pm g = h$
  $f(x) \pm g(x) = h(x)$

- $f \cdot g = h$
  $f(x) \cdot g(x) = h(x)$

- $\frac{f}{g} = h$
  $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$

- $f^g = h$
  $f(x)^{g(x)} = h(x)$

- $f(g(x)) = h(x); \quad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R};$
  skládání značíme $f \circ g$ a čteme f po g

Každá funkce je definována nejen funkčním předpisem, ale také svým definičním oborem.

24. Příklad Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - x)}{\sqrt{1 + \arcsin x^2}}$.

Řešení:

1. $x^2 - x > 0$
   $x(x-1) > 0 \qquad x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

[1] čteme argument hyperbolického sinu

2. $\underbrace{\sqrt{1+\arcsin x^2} \neq 0 \quad \wedge \quad 1+\arcsin x^2 \geq 0}$

   $1+\arcsin x^2 > 0$
   $\arcsin x^2 > -1$
   $x^2 > \sin(-1)$
   $x^2 > -\sin 1$ platí vždy $x \in \mathbb{R}$

3. $x^2 \geq -1$ platí vždy $x \in \mathbb{R}$

4. $x^2 \leq 1$ $x \in \langle -1; 1 \rangle$

průnikem je interval $Dom\, f = \langle -1; 0)$.

25. Poznámka Nejznámější *neelementární funkce* jsou e^{-x^2}, $\operatorname{erf}(x)$, $\Gamma(x)$.