1. Základy logiky a teorie množin

A. Logika

Matematická logika vznikla v 19. století. Jejím zakladatelem byl anglický matematik G. Boole (1815–1864). Boole prosadil algebraické pojetí logiky a zavedl logické spojky. K dalším tvůrcům booleovské logiky patřil J. Venn (1834–1923). Predikátová logika a její vznik je pak spojen s německým matematikem G. Fregem (1848–1925). Frege zavedl v logice pojem kvantifikátoru.

Definice 1.1. (intuitivní) **Výrok** je tvrzení o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé.

Buď A výrok. Je-li A pravdivý, zapisujeme tuto skutečnost symbolicky $p(A) = 1$, je-li A nepravdivý, píšeme $p(A) = 0$.

Symboly $0, 1$ se nazývají **pravdivostní hodnoty**.

Příklad 1.2. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků.

a) A: $\frac{1}{i} = -i$.

b) B: 51 je prvočíslo.

Řešení. a) Zřejmě $p(A) = 1$, neboť $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$. b) Zřejmě $p(B) = 0$, neboť $51 = 3 \cdot 17$.

Jednotlivé výroky lze spojovat ve složené výroky pomocí logických spojek (funktorů). Předmětem studia výrokové logiky je studium závislosti pravdivostní hodnoty složeného výroku na způsobu spojení a na pravdivostních hodnotách jednotlivých výroků.

Výrok se nazývá **elementární**, nebo též atomární, neobsahuje-li logické spojky. Například výroky A, B jsou atomární. Rozhodování o pravdivosti atomárního výroku přísluší odpovídající vědecké disciplíně, která zkoumá shodu jeho obsahu s objektivní realitou.

Definice 1.3. (Logické spojky) Buď A výrok. Výrok $\mathbf{A'}$, jehož pravdivostní hodnoty jsou definovány tabulkou

$p(A)$	$p(A')$
1	0
0	1

(1.1)

se nazývá **negace výroku** A. Negace mění pravdivostní hodnotu výroku v opačnou.

Buďte A, B výroky. Logické spojky, které spojují dva výroky, definujeme tabulkou pravdivostních hodnot vypsáním všech existujících kombinací. Spojky se po řadě nazývají **konjunkce** $\wedge$, **disjunkce** $\vee$, **implikace** $\Rightarrow$, **ekvivalence** $\Leftrightarrow$, **alternativa** $\veebar$ a **Shefferův symbol** $|$.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$	$p(A \veebar B)$	$p(A\|B)$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1

(1.2)

V následující tabulce uvedeme název spojky, její označení, slovní vyjádření a odpovídající logický význam.

název spojky	označení	slovní vyjádření	logický význam
konjunkce	$A \wedge B$	A a současně B	současně platí A i B
disjunkce	$A \vee B$	A nebo B	platí aspoň jeden z A, B
alternativa	$A \veebar B$	buď A, nebo B	platí právě jeden z A, B
implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A, pak B	z A plyne B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy, když B	A a B jsou ekvivalentní
Shefferův symbol	$A\|B$	nikoli A a B současně	neslučitelnost A a B

Speciálně pak pro implikaci platí následující terminologie. V implikaci $A \Rightarrow B$ se A nazývá **postačující podmínka** pro B a B **nutná podmínka** pro A. Implikace $B \Rightarrow A$ se nazývá obrácená implikace a $B' \Rightarrow A'$ obměna implikace.

Zřejmě všech možných logických spojek, které spojují dva výroky A, B je 16. Systém spojek nazveme **úplný**, když stačí k definování všech 16-ti spojek. Tzn. stačí k popisu libovolné logické situace.

Věta 1.4. Následující systém logických spojek $', \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ je úplný.

Lze rovněž dokázat, že k vytvoření úplného systému stačí vzít pouze dvě spojky negaci $'$ a libovolnou ze spojek $\wedge, \vee, \Rightarrow$. Dokonce lze dokázat, že všechny logické spojky lze popsat pomocí jediné. Touto spojkou je například Shefferův symbol. Analogicky existují logické spojky spojující tři výroky A, B, C. Všeobecně je známa například spojka $if\ A\ then\ B\ else\ C$, používaná v programování.

Příklad 1.5. Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$\big((2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 4 = 11)\big) \Rightarrow (2 < 1).$$

Řešení. Jedná se o složený výrok, který je tvořen třemi atomárními výroky A, B, C, kde $A : 2 \cdot 3 = 6$, $B : 3 \cdot 4 = 11$, $C : 2 < 1$. Určíme jejich pravdivostní hodnoty. Zřejmě $p(A) = 1, p(B) = 0$ a $p(C) = 0$. Odtud plyne $p\Big(\big((2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 4 = 11)\big) \Rightarrow (2 < 1)\Big) = p\big((1 \vee 0) \Rightarrow 0\big) = p(1 \Rightarrow 0) = 0$. Složený výrok je tedy nepravdivý.

Poznámka 1.6. Při vyhodnocování pravdivostní hodnoty složeného výroku budeme zachovávat následující pořadí operací: $', \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Uzávorkování je tomuto pořadí nadřazeno.

Matematické objekty s jednoznačně stanoveným významem, např. 1, π, $\sqrt{2}$ nazýváme **konstanty**. Objekty, které nemají jednoznačně stanovený význam, např. x, y, z, nazýváme **proměnné**.

Definice 1.7. **Výroková forma** je tvrzení obsahující proměnné, z něhož se stane výrok po dosazení konstant za proměnné.

Příklad 1.8. Tvrzení $A : 3x$ je sudé, je výroková forma.
Volíme-li $x = 1$, pak $p(A, x = 1) = 0$, zatímco pro $x = 2$ je $p(A, x = 2) = 1$.

Z výrokové formy lze utvořit výrok také tak, že všechny proměnné ve formě vážeme nějakou omezující podmínkou, jednoznačně specifikující jejich počet. Tato podmínka se nazývá kvantifikátor.

Poznámka 1.9. V matematice se nejčastěji používají následující dva kvantifikátory:
1. **obecný kvantifikátor**, který se označuje $\forall$ a čte se „pro každé“ a 2. **existenční kvantifikátor** $\exists$, který má význam „existuje aspoň jeden“.

Kvantifikátorů existuje nekonečně mnoho. Příkladem dalšího kvantifikátoru je kvantifikátor $\exists!$ s významem **existuje právě jeden**. Podobně existují kvantifikátory právě dva, právě tři, atd. Nejběžněji používané kvantifikátory využívají slovních spojení aspoň, právě a nejvýše.

Poznámka 1.10. Negací obecného kvantifikátoru je existenční a naopak.

Výroková forma, která při dosazení libovolné kombinace pravdivostních hodnot nabývá hodnotu 1 se nazývá **tautologie**, 0 **kontradikce**. V ostatních případech se forma nazývá splnitelná. Výrokové formy A, B se nazývají logicky ekvivalentní, což zapisujeme $A = B$, když je forma $A \Leftrightarrow B$ tautologie. Například formy $A \wedge B$ a $B \wedge A$ jsou logicky ekvivalentní, platí $A \wedge B = B \wedge A$ a forma $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ je tautologie.

Příklad 1.11. Šárka a Iva čekají na svoje kamarády Petra, Honzu a Jirku. Šárka tvrdí: Přijde-li Petr a Honza, přijde i Jirka. Iva říká: Já si myslím, že když přijde Petr a nepřijde Jirka, nepřijde ani Honza. Na to povídá Šárka: To ale říkáš totéž co já. Rozhodněte, zda obě skutečně říkají totéž.

Řešení. Nejprve provedeme vhodné označení atomárních výroků. Symbolem A označme výrok „Petr přijde“, symbolem B označme výrok „Honza přijde“ a dále C označme výrok „Jirka přijde“. V provedeném označení mají výpovědi Šárky a Ivy tvar: $X = (A \wedge B) \Rightarrow C$ a $Y = (A \wedge C') \Rightarrow B'$. Aby Šárka a Iva říkaly totéž musí být $X \Leftrightarrow Y$ tautologie. Sestavíme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C'$	X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot vyplývá, že $X \Leftrightarrow Y$ je tautologie, což znamená, že Šárka a Iva říkají skutečně totéž.

Věta 1.12. Následující výrokové formy jsou tautologie:

1. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$.
2. $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
3. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$.

Poznámka 1.13. Uvedené tautologie mají zásadní význam. Tvoří základ teorie důkazů.

Tvrzení (1) říká, že důkaz implikace je ekvivalentní důkazu její obměny. Vlastnost (2) se nazývá **tranzitivita implikace**. Matematickou indukcí můžeme tvrzení (2) rozšířit na libovolný konečný počet výrokových proměnných $A_1, \ldots, A_n$. Odtud plyne, že forma

$$[(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)] \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n).$$

je tautologie.

Důkaz tvrzení rozdělíme na postupné dokazování elementárních kroků. Část (3) říká, že důkaz ekvivalentnosti dvou tvrzení dokážeme důkazem implikace a obrácené implikace.

Věta 1.14. Platí následující vztahy pro negace složených výroků:

1. $A'' = A$.
2. $(A \wedge B)' = A' \vee B'$.
3. $(A \vee B)' = A' \wedge B'$.
4. $(A \Rightarrow B)' = A \wedge B'$.
5. $(A \Leftrightarrow B)' = (A \vee B) \wedge (A' \vee B')$.

Definice 1.15. Buďte dány symboly $\circ, *$. Pak následující zákony nazýváme:

1. $a \circ b = b \circ a$ ... **komutativní zákon**.
2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ... **asociativní zákon**.
3. $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ ... **distributivní zákon**.

Věta 1.16. Pro logické spojky $\wedge, \vee$ platí komutativní, asociativní a distributivní zákon.

B. Důkazy v matematice

Matematická tvrzení mají často tvar implikací, nebo ekvivalencí. Ve větě tvaru $A \Rightarrow B$ se A nazývá předpoklad a B tvrzení věty nebo závěr. Existují tři základní možnosti důkazu implikace: přímý, nepřímý a sporem. V krátkosti si nyní vysvětlíme, jaký je logický základ těchto důkazů a v čem spočívají.

Přímý důkaz. Chceme-li dokázat implikaci $A \Rightarrow B$ přímým důkazem, pak se pokusíme zkonstruovat tzv. řetězec implikací $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$. Podle Věty 1.12, části (2) odtud plyne $A \Rightarrow B$. Zápis řetězce implikací je zvykem zapisovat v kratším tvaru

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B. \tag{1.3}$$

Nepřímý důkaz. Při nepřímém důkazu využijeme platnost tautologie (1) z Věty 1.12. Implikaci $B' \Rightarrow A'$ potom dokazujeme přímým důkazem.

Důkaz sporem. Vycházíme z předpokladu, že $p(A \wedge B') = 1$ a konstruujeme řetězec implikací $A \wedge B' \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_n \Rightarrow S$, až dojdeme k výroku S, který logicky popírá původní předpoklad, nebo nějaký evidentně pravdivý výrok. Spor je situace, kdy nějaký výrok a jeho negace mají být současně pravdivé.

Uvedené důkazové postupy budeme nyní demonstrovat na příkladu.

Příklad 1.17. Dokažte přímo, nepřímo i sporem, že $\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 2 \Rightarrow 6x + 3 > 13$.

Řešení. a) Přímý důkaz: Jednotlivé kroky důkazu vyžadují elementární znalosti o vlastnostech nerovností.

$$x \geq 2 \Rightarrow 6x \geq 12 \Rightarrow 6x + 1 \geq 12 + 1 \Rightarrow 6x + 1 \geq 13 \Rightarrow 6x + 3 > 13.$$

Uvedený řetězec implikací tvoří důkaz tvrzení.

b) Nepřímý důkaz: Sestrojíme obměnu původní implikace.

$$\forall x \in \mathbb{N} : 6x + 3 \leq 13 \Rightarrow x < 2.$$

Toto tvrzení je logicky ekvivalentní původnímu tvrzení. Obměnu dokážeme přímým důkazem. Zkonstruujeme řetězec implikací

$$6x + 3 \leq 13 \Rightarrow 6x < 10 \Rightarrow 6x \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{10}{3} \Rightarrow x < 2.$$

c) Důkaz sporem: Předpokládejme, že dokazované tvrzení neplatí. Pak je ale pravdivá jeho negace. Negace implikace má tvar

$$\exists x \in \mathbb{N} : x \geq 2 \wedge 6x + 3 \leq 13.$$

Z tohoto předpokladu nyní plyne, že existuje $x \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x \geq 2 \wedge 6x + 3 \leq 13 \Rightarrow x \leq 2 \wedge 6x \leq 10 \Rightarrow x \geq 2 \wedge x \leq \frac{10}{6},$$

což je spor, neboť žádné $x \in \mathbb{N}$ vlastnost $x \geq 2 \wedge x \leq \frac{10}{6}$ nemá. Předpoklad, z něhož se řetězec implikací odvíjel, je tedy nepravdivý. To ale znamená, že je pravdivá jeho negace. Tato negace je však ekvivalentní původní implikaci.

Speciálním, ale v matematice často používaným důkazem je důkaz pomocí principu matematické indukce. **Matematická indukce** je věta, která umožňuje provádět důkazy tvrzení týkajících se množiny přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Důkaz matematické indukce provedeme sporem.

Věta 1.18. **(Matematická indukce)** Buď $V(n)$ výroková forma proměnné $n \in \mathbb{N}$.

$$\Big(p\big(V(1)\big) = 1\Big) \wedge \Big(\forall k \in \mathbb{N} : p\big(V(k)\big) = 1 \Rightarrow p\big(V(k+1)\big) = 1\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : p\big(V(n)\big) = 1. \tag{1.4}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje číslo $k \in \mathbb{N}$, takové, že $p\big(V(k)\big) = 0$. Odtud plyne, že množina $M =$
$= \{k; p\big(V(k)\big) = 0\}$ je neprázdná a symbolem m označme její nejmenší prvek. Protože $p\big(V(1)\big) = 1$ je $m > 1$ a protože $m - 1 \notin M$ platí $p\big(V(m-1)\big) = 1$. Z indukčního předpokladu ale plyne $p\big(V(m)\big) = 1$, což je spor.

Poznámka 1.19. Důkaz tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : p\big(V(n)\big) = 1$ pomocí matematické indukce se skládá ze tří částí:

1. Dokážeme, že je $p\big(V(1)\big) = 1$.
   (Pozn. Obecněji platí, že dokážeme platnost formule pro nejmenší přípustné n a nejčastěji je to právě číslo 1.)
2. Dokážeme, že platí implikace $\forall k \in \mathbb{N} : p(V(k)) = 1 \Rightarrow p(V(k+1)) = 1$.
3. Odvoláme se na Větu 1.18 o matematické indukci, podle které je nyní tvrzení $V(n)$ pravdivé pro každé přirozené číslo n.

Postup vysvětlíme na příkladu.

Příklad 1.20. Řekneme, že a dělí b a píšeme $a|b$, když existuje číslo c tak, že $b = ac$. Pomocí matematické indukce dokažte následující tvrzení $\forall k \in \mathbb{N} : 7|6^{2k} - 8$.

Řešení. Důkaz provedeme ve třech krocích:

1. Nejprve dokážeme, že tvrzení je pravdivé pro $k = 1$. Výrok $V(1)$ má tvar $7|6^2 - 8 = 28$. Platí ale $28 = 4 \cdot 7$. Tedy tvrzení pro $k = 1$ platí.
2. Předpokládejme nyní, že tvrzení je pravdivé pro libovolné pevně zvolené číslo k a dokažme, že platí rovněž pro $k+1$. Označme $V(k+1) = 7|6^{2(k+1)} - 8$. Je třeba dokázat, že $\forall k \in \mathbb{N} : 7|6^{2k} - 8 \Rightarrow 7|6^{2(k+1)} - 8$. Číslo $6^{2(k+1)} - 8$ z výroku $V(k+1)$, jehož dělitelnost číslem 7 máme dokázat, upravíme na tvar
   $$6^{2(k+1)} - 8 = 6^{2k+2} - 8 = 6^2 \cdot 6^{2k} - 8 = 36 \cdot 6^{2k} - 8 = (6^{2k} - 8) + 35 \cdot 6^{2k}.$$
   První člen součtu $(6^{2k} - 8) + 35 \cdot 6^{2k}$ je dělitelný číslem 7 podle indukčního předpokladu, dělitelnost druhého člene je zřejmá, neboť $7|35$. Protože jsou číslem 7 dělitelné oba členy je jím dělitelný i jejich součet a to bylo třeba dokázat.
3. Podle Věty 1.18 o matematické indukci je tvrzení pravdivé pro každé přirozené číslo n.

Deduktivní úvahou nazýváme takovou úvahu, při níž z obecného tvrzení vyvozujeme zvláštní, individuální. Podstata dedukce je tedy v tom, že zvláštní případ zahrnuje pod obecný princip. Matematické úvahy jsou převážně deduktivní.

C. Základní množinové pojmy

Privilegované postavení mezi matematickými teoriemi zaujímá teorie množin. Za jejího zakladatele je považován německý matematik G. Cantor (1845–1918). Základní problematikou, kterou se teorie množin zabývala byly otázky týkající se vlastností nekonečna, zejména srovnávání různých velikostí nekonečna. Ukázalo se však, že v teorii množin lze modelovat i jiné matematické teorie a to tak, že se každému matematickému objektu přiřadí určitá množina, která ho reprezentuje. V tomto smyslu se teorie množin stala základem celé matematiky.

S jistou nadsázkou lze říci, že se teorie množin narodila 7. 12. 1873. Toho dne totiž G. Cantor nalezl odpověď na otázku, zda lze všechna reálná čísla z nějakého intervalu (a, b) spočítat v tom smyslu, že je lze bijektivně zobrazit na množinu všech přirozených čísel. Ke svému překvapení zjistil, že takové zobrazení neexistuje.

Otázku, zda má smysl porovnávat nekonečné systémy podle velikosti, si položil například již v roce 1638 jeden z géniů té doby, Galileo Galilei. Ten vypsal řadu čísel $1, 2, 3, 4, \ldots$ a jejich druhých mocnin $1, 4, 9, 16, \ldots$ a uvědomil si, že mezi těmito množinami existuje bijekce. To by však znamenalo, že jsou uvedené systémy čísel stejně velké. Tento závěr se mu jevil naprosto absurdní. Popíral totiž jeden ze základních Eukleidových logických axiomů, který říká, že celek je vždy větší než jeho část. Galilei proto dospěl k závěru, že pro nekonečné systémy nemá otázka o jejich velikosti žádný smysl. Na konci svého života sepsal B. Bolzano (1781–1848) matematicko-filozofické dílo Paradoxy nekonečna. Vyšlo posmrtně v roce 1851. V tomto díle dospěl na práh teorie množin. Na přelomu 19. a 20. století se objevily v teorii množin antinomie, které si vynutily novou metodiku výstavby matematických teorií. Nejobvyklejší metodou se stala axiomatická výstavba.

Definice 1.21. **(intuitivní)** **Množina** je souhrn libovolných navzájem rozlišitelných objektů.

Poznámka 1.22.

1. Jednotlivé objekty nazveme **prvky množiny** a shrnování v jeden celek budeme označovat pomocí složených závorek.
2. Množiny zpravidla označujeme velkými písmeny a jejich prvky malými písmeny.
3. Zápis $a \in A$ znamená, že objekt a je prvkem množiny A.
4. Negace má tvar $a \notin A$.
5. Symbolem $\emptyset$ označujeme množinu, která nemá žádný prvek (tzv. **prázdná množina**).
6. Řekneme, že **množiny** A, B **jsou si rovny**, když mají tytéž prvky. Pak píšeme $A = B$.
7. Řekneme, že množina A **je podmnožinou množiny** B, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B. Pak píšeme $A \subseteq B$.
8. Symbol $\subseteq$ se nazývá znak **inkluze**.
9. Některé často používané množiny mají vlastní stálé označení.
10. Množinu lze zadat výčtem prvků, tj. napsáním seznamu, např. $\{1, 2, 3\}$ nebo pomocí charakteristické vlastnosti $\{x \in \mathbb{N}; x \leq 3\}$.

Věta 1.23. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

1. $\emptyset \subseteq A$.
2. $A \subseteq A$.
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ … **tranzitivita inkluze.**
4. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

Tvrzení (1) a (2) jsou zřejmá a (3) znamená tranzitivitu inkluze. Tvrzení (4) má zásadní význam pro důkazy množinových rovností. Chceme-li dokázat, že $A = B$, tak postupujeme tak, že dokážeme, že $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$. Odtud podle (4) již plyne, že $A = B$.

Příklad 1.24. Rozhodněte, které z výroků jsou pravdivé:
1. Množina $\{\emptyset\}$ nemá žádný prvek.
2. $\{1, 1\} = \{1\}$.
3. $\{1\} \subset \{1\}$.
4. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Poznámka 1.25. V množinových závorkách nezáleží na pořadí, v jakém prvky zapíšeme. Nezáleží ani na tom, kolikrát prvek v množině zapíšeme. Proto budeme pro přehlednost zapisovat každý prvek pouze jednou.

Russelův paradox (1903). Následující úvaha je typickým příkladem, který se objevil na počátku 20. století v souvislosti se třetí krizí matematiky. Buď A libovolná množina. Pak nastane právě jedna z možností buď $A \in A$ nebo $A \notin A$.

Všechny množiny rozdělíme do dvou skupin $X = \{A; A \in A\}$, $Y = \{B; B \notin B\}$. Je zřejmé, že žádná množina nemůže patřit do X i Y současně a že X, Y jsou také množiny. Uvažme nyní Y. Protože Y je množina, musí sama ležet v X nebo Y. Připusťme nejprve $Y \in X$. Pak ale podle definice X platí $Y \in Y$, což je spor, neboť Y nemůže ležet v X i Y. Připusťme tedy, že $Y \in Y$. Pak ale z definice Y plyne $Y \notin Y$, což je rovněž spor, protože Y nemůže ležet a současně neležet v Y. Vzniká neřešitelná situace na úrovni intuitivní teorie množin. Pojem množiny v intuitivním smyslu se ukázal příliš široký. Problém spočívá ve shrnování v jeden celek.

Definice 1.26. Mezi množinami A, B definujeme následující základní operace:

1. **Průnik** $A \cap B := \{x; x \in A \wedge x \in B\}$.
2. **Sjednocení** $A \cup B := \{x; x \in A \vee x \in B\}$.
3. **Rozdíl** $A - B := \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$.

Speciálním případem rozdílu množin je tzv. **množinový komplement**. Je-li dána nějaká základní množina Z, vzhledem ke které se vztahují naše úvahy, pak komplement množiny A v množině Z definujeme vztahem $A^c := Z - A$.

Poznámka 1.27. Symbolem $2^A := \{X; X \subseteq A\}$ označujeme **množinu všech podmnožin množiny A**.

Věta 1.28. Pro množinové operace $\cup, \cap$ platí komutativní asociativní a distributivní zákon.

Definice 1.29.

1. **Uspořádanou dvojicí** prvků a, b v tomto pořadí nazýváme množinu $[a, b] := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
2. Buďte A, B libovolné množiny. **Kartézským součinem** mezi množinami A, B nazýváme množinu $A \times B := \{[a, b]; a \in A \wedge b \in B\}$.
3. Místo $A \times A$ píšeme A^2.

Pro kartézský součin neplatí asociativní zákon. Tj. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$. Tato skutečnost je ihned zřejmá, pokud si uvědomíme, že uvedené množiny mají jiné prvky.

Příklad 1.30. Nechť $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$. Určete $A \times (B \times C)$ a $(A \times B) \times C$.

Řešení. Pak $A \times (B \times C) = \{[a, [b, c]]\}$ a $(A \times B) \times C = \{[[a, b], c]\}$.

Definice 1.31. **Binární relace** ρ mezi množinami A, B je libovolná podmnožina množiny $A \times B$.
Je-li $A = B$, mluvíme o relaci **na** množině.
Každé binární relaci ρ odpovídají dvě význačné množiny:
$D\rho := \{a \in A; \exists b \in B : [a, b] \in \rho\}$ ... **definiční obor** $D\rho$
$H\rho := \{b \in B; \exists a \in A : [a, b] \in \rho\}$ ... **obor hodnot** $H\rho$.

Binární relace na množině mohou mít řadu významných vlastností. Nejdůležitější z nich popíšeme v následující definici.

Definice 1.32. Buď ρ binární relace na množině A. Nazveme ji

1. **reflexivní**, splňuje-li $\forall a \in A : [a, a] \in \rho$.
2. **symetrická**, splňuje-li $\forall a, b \in A : [a, b] \in \rho \Rightarrow [b, a] \in \rho$.
3. **antisymetrická**, splňuje-li $\forall a, b \in A : [a, b] \in \rho \wedge [b, a] \in \rho \Rightarrow a = b$.
4. **tranzitivní**, splňuje-li $\forall a, b, c \in A : [a, b] \in rho \wedge [b, c] \in \rho \Rightarrow [a, c] \in \rho$.

Definice 1.33. Binární relace $\rho \subseteq A \times B$ se nazývá **zobrazení z A do B**, když pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ tak, že $[x, y] \in A \times B$.
Úmluva: Místo ρ obvykle píšeme f a místo $[x, y] \in \rho$ píšeme $y = f(x)$. Zobrazení z A do B budeme označovat symbolem $f : A \to B$.
Je-li $Df = A$, mluvíme o zobrazení A do B, je-li $Hf = B$, mluvíme o zobrazení A na B a f nazýváme **surjekce** (čti syrjekce).
Zobrazení f se nazývá **prosté** nebo též **injekce**, když $\forall a, b \in A : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
Je-li f injekce i surjekce, nazývá se **bijekce**, nebo též vzájemně jednoznačné zobrazení.