4. Parciální a směrové derivace, gradient

Příklad 4.1. Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkce f.

a) $f(x,y) = (x^2y + y)^4$;

b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + x^y$;

c) $f(x,y,z) = (\frac{y}{z})^x$.

Řešení.

a) $f'_x = 4(x^2y + y)^3 \cdot 2xy = 8xy^4(x^2+1)^3$, $f'_y = 4(x^2y+y)^3 \cdot x^2 = 4y^3(x^2+1)^4$.

b) $f'_x = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y} + yx^{y-1}$, $f'_y = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2}) + \ln x \cdot x^y$.

c) $f'_x = (\frac{y}{z})^x \ln(\frac{y}{z})$, $f'_y = \frac{1}{z^x}xy^{x-1} = (\frac{x}{y})(\frac{y}{z})^x$, $f'_z = y^x(-x)z^{-x-1} = -(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^x$.

Příklad 4.2. Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě A.

a) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$, $A = [1,2]$.

b) $f(x,y) = (1 + \log_y x)^3$, $A = [\mathrm{e}, \mathrm{e}]$.

c) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y} + z^z$, $A = [1,1,2]$.

Řešení.

a) $f'_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}(1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_x(A) = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$f'_y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(A) = \frac{2}{5+\sqrt{5}}$.

b) Ze základních vztahů pro logaritmické funkce plyne, že $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$. Zadanou funkci f přepíšeme na tvar $f(x,y) = (1+\log_y x)^3 = (1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3$. Odtud

$f'_x = 3(1+\log_y x)^2 \frac{1}{x \ln y}$, $\quad f_x(A) = 3(1 + \log_\mathrm{e} \mathrm{e})^2 \frac{1}{\mathrm{e} \ln \mathrm{e}} = \frac{12}{\mathrm{e}}$;

$f'_y = 3(1+\log_y x)^2 \frac{-\ln x}{y \ln^2 y}$, $\quad f_y(A) = 3(1+\log_\mathrm{e} \mathrm{e})^2 \frac{-\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e} \ln^2 \mathrm{e}} = -\frac{12}{\mathrm{e}}$.

c) $f'_x = \frac{1}{1+x^y} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^y}} \cdot yx^{y-1}$, $f'_x(A) = \frac{1}{4}$;

$f'_y = \frac{1}{1+x^y} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^y}} \cdot x^y \ln x$, $f'_y(A) = 0$;

$f'_z = zz^{z-1} + \ln z \cdot z^z = z^z(\ln z + 1)$, $f'_z(A) = 4 + \ln 16$.

Příklad 4.3. Spočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A.

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2y}\sin x$, $A = [0,0]$;

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$, $A = [3,1]$;

c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}$, $A = [0,0]$.

Řešení.

a) $f'_x = \mathrm{e}^{2y}\cos x$, $f'_y = 2\mathrm{e}^{2y}\sin x$,
$f''_{xx} = -\mathrm{e}^{2y}\sin x$, $f''_{xx}(A) = 0$,
$f''_{yy} = 4\mathrm{e}^{2y}\sin x$, $f''_{yy}(A) = 0$,
$f''_{xy} = 2\mathrm{e}^{2y}\cos x$, $f''_{xy}(A) = 2$.

b) $f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x-y}{x+y})^2}\cdot\frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \frac{1}{1+(\frac{x-y}{x+y})^2}\cdot\frac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$,
$f''_{xx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xx}(A) = \frac{-6}{100}$,
$f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{yy}(A) = \frac{6}{100}$,
$f''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(A) = \frac{8}{100}$.

c) $f'_x = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot\mathrm{e}^y$, $f'_y = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot x\mathrm{e}^y$,
$f''_{xx} = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot(\mathrm{e}^y)^2$, $f''_{xx}(A) = 1$,
$f''_{yy} = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot(x\mathrm{e}^y)^2 + \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot(x\mathrm{e}^y) = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot x\mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^y+1)$, $f''_{yy}(A) = 0$,
$f''_{xy} = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot x\mathrm{e}^y\cdot\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}\cdot\mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^y+1)$, $f''_{xy}(A) = 1$.

Příklad 4.4. $f(x,y) = x\ln(xy)$. Spočtěte f'''_{xyy}.

Řešení. $f(x,y) = x\ln(xy)$, $f'_x = \ln(xy) + x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y = \ln(xy)+1$, $f''_{xx} = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}$, $f'''_{xxy} = 0$.

Příklad 4.5. $f(x,y) = \ln(1+x+y)$. Spočtěte $\frac{\partial^{136}}{\partial^{79}x\partial^{57}y}$.

Řešení. Funkce $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ je symetrická vzhledem k proměnným x a y. Odtud plyne, že u smíšených parciálních derivací nazáleží na tom, podle kterých proměnných derivujeme, ale pouze na řádu derivace. Platí tedy, že

$$\frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial^{79}x\partial^{57}y} = \frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial^{136}x}.$$

Pro derivace malých řádů snadno spočteme, že

$$f'_x = \frac{1}{1+x+y}, f''_{xx} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}, f'''_{xxx} = \frac{2}{(1+x+y)^3}, f''''_{xxxx} = \frac{-6}{(1+x+y)^4}, f^{(5)}_{xxxxx} = \frac{24}{(1+x+y)^5}.$$

Z tvaru uvedených derivací se nabízí hypotéza, že

$$\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x+y)^k}.$$

Tuto hypotézu lze dokázat pomocí principu matematické indukce. Speciálně tedy platí

$$\frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial^{79}x\partial^{57}y} = \frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial x^{136}} = \frac{-135!}{(1+x+y)^{136}}.$$

Příklad 4.6. Určete bod, ve kterém je gradient funkce $f(x,y) = \ln\left(x+\frac{1}{y}\right)$ roven vektoru $\left(1, \frac{-16}{9}\right)$.

Řešení. Spočítáme gradient funkce $f(x,y) = \ln(x+\frac{1}{y})$. Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f'_x = \frac{1}{x+\frac{1}{y}} = \frac{y}{xy+1}, f'_y = \frac{1}{x+\frac{1}{y}}\cdot\frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{xy^2+y}.$$

Odtud grad $f = (\frac{y}{xy+1}, \frac{-1}{xy^2+y})$. Gradient funkce f porovnáme se zadaným vektorem $(1, -\frac{16}{9})$. Platí $(\frac{y}{xy+1}, \frac{-1}{xy^2+y}) = (1, -\frac{16}{9})$. Z rovnosti složek vektorů získáme systém rovnic $\frac{y}{xy+1} = 1$, $\frac{-1}{xy^2+y} = -\frac{16}{9}$. Dosazením první rovnice do druhé dostáváme $\frac{1}{y^2} = \frac{16}{9}$. Odtud $y = \pm\frac{3}{4}$. Dopočítáme x. Pro $y = \frac{3}{4}$ je $x = -\frac{1}{3}$, pro $y = -\frac{3}{4}$ je $x = \frac{7}{3}$. Gradient zadané funkce je roven vektoru $(1, -\frac{16}{9})$ v bodech $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}], [\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}]$.

Příklad 4.7. Určete body, ve kterých se velikost gradientu funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.

Řešení. Spočítáme gradient funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$. Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f'_x = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+y^2}, f'_y = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y = 3y\sqrt{x^2+y^2}.$$

Odtud $\operatorname{grad} f = (3x\sqrt{x^2+y^2}, 3y\sqrt{x^2+y^2})$. Pro velikost gradientu funkce f platí

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2} = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y(x^2+y^2)} = \sqrt{9(x^2+y^2)^2} = 3(x^2+y^2).$$

Dostáváme rovnici $3(x^2+y^2) = 2$. Velikost gradientu funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ se rovná 2 v bodech ležících na kružnici $x^2+y^2 = \frac{2}{3}$.

Příklad 4.8. Spočtěte derivaci $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $A = [1,1]$ ve směru vektoru $u = (2,1)$.

Řešení. Nejprve určíme parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $A = [1,1]$.

$$f'_x = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, f'_x(A) = 1$$

.

$$f'_y = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}, f'_y(A) = -1.$$

Odtud plyne, že $\operatorname{grad} f(A) = (1,-1)$. Nyní můžeme určit derivaci ve směru. Platí

$$f'_u(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot u = (1,-1) \cdot (2,1) = 2 - 1 = 1.$$

Příklad 4.9. Zjistěte, zda je funkce $f(x,y) = \sqrt{x^3+y}$ v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $u = (-3,1)$ rostoucí.

Řešení. Spočítáme derivaci funkce $f(x,y) = \sqrt{x^3+y}$ v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $u = (-3,1)$. Nejprve určíme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě A.

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}, f'_x(A) = \frac{3}{2\sqrt{3}}, f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y}}, f'_y(A) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Odtud plyne, že $\operatorname{grad} f(A) = (\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$. Nyní určíme derivaci ve směru. Platí

$$f'_u(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot u = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \cdot (-3,1) = \frac{-9}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Protože je derivace $f'_u(A)$ záporná, je funkce f v bodě A ve směru u klesající.

Příklad 4.10. Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ v bodě $A = [1,2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě.

Řešení. Nejprve určíme parciální derivace funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v bodě $A = [1,2]$.

$$f'_x = \frac{1}{x+y}, f'_x(A) = \frac{1}{3}, f'_y = \frac{1}{x+y}, f'_y(A) = \frac{1}{3}$$

Odtud plyne, že grad $f(A) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Spočteme rovnici tečny k parabole $x = \frac{1}{4}y^2$. Platí $x - x_0 = = x'(y_0)(y - y_0)$, kde $x_0 = 1, y_0 = 2, x'(2) = 1$. Rovnice tečny je tvaru $x - y + 1 = 0$ a tečna má směrový vektor $v = (1, 1)$. Jeho velikost je $\sqrt{2}$. Jednotkový vektor tečny je tedy $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Spočítáme derivaci ve směru.

$$f'_u(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot u = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$