10. Polynomy a racionálně lomenné funkce

A. Polynomy

Definice 10.1. **Reálný polynom stupně n** (neboli mnohočlen) je funkce tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ kde } a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}, a_n \neq 0,$$

která každému komplexnímu číslu x přiřazuje komplexní číslo $p(x)$.

$a_0, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty.

a_0 je absolutní člen.

x je proměnná.

n je stupeň polynomu.

Polynom, který má za koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ komplexní čísla, se nazývá **komplexní polynom**.

Připouštíme-li hodnoty za proměnnou x z reálného oboru (tj. $x \in \mathbb{R}$), mluvíme o reálném (případně komplexním) polynomu **v reálném oboru**.

Připouštíme-li hodnoty za proměnnou x z komplexního oboru (tj. $x \in \mathbb{C}$), mluvíme o reálném (případně komplexním) polynomu **v komplexním oboru**.

Definice 10.2. Každé číslo α (reálné i komplexní, podle oboru v jakém pracujeme) takové, že splňuje $p(\alpha) = 0$ se nazývá **kořen polynomu $p(x)$**.

Poznámka 10.3. Každý kořen je tedy řešením rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0\,,$$

které říkáme **algebraická rovnice n-tého stupně**.

Příklad 10.4. Výraz $p(x) = x^2 + 3x - 5$ je reálný polynom 2. stupně. Rovnice $x^2 + 3x - 5 = 0$ je algebraická rovnice 2. stupně (kvadratická rovnice).

Poznámka 10.5. Je tedy jasné, že graf funkce $p(x)$ protíná osu x v bodech, které jsou reálnými kořeny polynomu $p(x)$. Toho se dá s výhodou využít například při řešení kvadratických nerovnic grafickou cestou.

Příklad 10.6. Určete kořeny polynomu $p(x)$ v komplexním oboru:

a) $p(x) = x^2 + x - 2$;

b) $p(x) = x^4 - 1$;

c) $p(x) = x^3 + 1$.

Řešení.

a) Polynom si zapíšeme ve tvaru algebraické rovnice, tj. $x^2 + x - 2 = 0$, což je „obyčejná“ kvadratická rovnice, kterou vyřešíme. Nalezneme dva reálné (což znamená, že jsou zároveň i komplexní) kořeny $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = -2$.

b) Řešíme algebraickou rovnici $x^4 - 1 = 0$. Tu upravíme na tvar $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$. Odtud již snadno získáme kořeny $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = \imath$, $\alpha_4 = -\imath$.

c) $p(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Otázkou tedy je, zda existuje nějaký univerzální algoritmus na hledání kořenů polynomu? Již v 16. století byly známy vzorce pro polynom stupně 1, 2, 3 a 4. Dlouhou dobu se potom matematikové snažili nalézt podobné vzorce pro kořeny polynomů stupně 5. Teprve v polovině 19. století bylo dokázáno, že takové vzorce pro polynomy většího nebo rovného pěti neexistují.

Při odhadování racionálních a celočíselných kořenů u polynomů s celočíselnými koeficienty a nenulovým absolutním členem nám výrazně pomůže následující věta. Upozorněme však na podstatný detail. Tvrzení věty nám dává pouze nutnou, nikoli však postačující podmínku pro to, aby číslo $\frac{r}{s}$ bylo kořenem polynomu.

Věta 10.7. Nechť číslo $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbf{Z}$ a $s \in \mathbf{N}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ a $a_0 \neq 0$. Pak platí

$$\mathbf{r}|\mathbf{a_0} \wedge \mathbf{s}|\mathbf{a_n}.$$

Poznámka 10.8. Pro ověřování, zda je číslo kořenem polynomu se s výhodou používá **Hornerovo schema**. Pomocí něj se také snadno zjišťuje násobnost kořene.

Příklad 10.9. Nalezněte všechny racionální a celočíslené kořeny polynomu $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$.

Řešení. Podle Věty 10.7 si vytipujeme čísla r a s takto:

$$r| - 3 \Longrightarrow r = 1, -1, 3, -3;$$

$$s\ |4 \Longrightarrow s = 1, 2, 4.$$

Dále si vypíšeme všechny možné hodnoty $\frac{r}{s}$.

$$\frac{r}{s}: \quad 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}.$$

Ověření, zda se jedná o kořeny polynomu $g(x)$ provedeme Hornerovým schematem, podle něhož zjistíme, že $-\frac{1}{2}$ je dvojnásobným kořenem a 3 je kořenem jednoduchým.

Věta 10.10. Nechť $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbf{Z}$ a $s \in \mathbf{N}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ a $a_0 \neq 0$. Potom pro libovolné celé číslo m platí:

$$(r - ms)|f(m).$$

Speciálně tedy: $(r - s)|f(1)$, resp. $(r + s)|f(-1)$.

Příklad 10.11. Rozhodněte, které vytipované kořeny polynomu $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$ z předchozího příkladu nemá smysl vyšetřovat Hornerovým schématem.

Řešení. Určíme funkční hodotu $g(1) = 4 - 8 - 11 - 3 = -18$ a $g(-1) = -4 - 8 + 11 - 3 = -4$. Podíváme se na vytipované hodnoty $\frac{r}{s}$:

$\frac{r}{s}$:	$\frac{1}{1}$,	$\frac{-1}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{-1}{2}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{-1}{4}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{-3}{1}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{-3}{2}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{-3}{4}$	
$r + s$:	2	0	3	1	5	3	4	-2	5	-1	7	1	$g(-1) = -4$
$r - s$	0	-2	-1	-3	-3	-5	2	-4	1	-5	-1	-7	$g(1) = -18$

Z této tabulky je zřejmé, že Hornerovým schématem není nutno vyšetřovat tyto hodnoty $\frac{r}{s}$: $\frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$.

Je tedy vidět, že počet potenciálních kořenů se nám výrazně zredukoval a k ověření Hornerovým schématem zůstavají pouze tito adepti: $\frac{-1}{2}$, $\frac{3}{1}$.

Věta 10.12. **(Bézoutova věta)** Nechť $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ je libovolný polynom stupně $n \geq 1$. Potom číslo α **je kořenem** $p(x) \Longleftrightarrow p(x) = (x - \alpha) q(x)$, kde $q(x)$ je polynom stupně $n - 1$.

Následující věta měla pro celou algebru opravdu základní význam v dobách, kdy se algebra zabývala studiem číselných struktur. Platnost této věty tušili již italští matematikové v 16. století, ale první její správný a úplný důkaz nalezl teprve K. F. Gauss v roce 1799.

Věta 10.13. (Základní věta algebry) Každý nekonstantní komplexní polynom má v komplexním oboru alespoň jeden kořen.

Věta 10.14. (D'Alembertova věta o rozkladu na kořenové činitele v oboru komplexních čísel) Pro každý polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ stupně $n \geq 1$ existuje právě n komplexních čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (která od sebe nemusejí být různá) takových, že

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n). \tag{10.1}$$

Uvědomme si jen, že všechna čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny polynomu $p(x)$.

Poznámka 10.15. Pokud v rozkladu (10.1) vystupuje stejný činitel $(x-\alpha_i)$ právě k-krát, řekneme, že α_i je ***k*-násobným kořenem** polynomu $p(x)$.

Příklad 10.16. Určete kořeny (i jejich násobnost) polynomů v komplexním oboru:
a) $p(x) = x^2 - 2x + 1$;
b) $p(x) = x^4 + x^3$;
c) $p(x) = x^2 + 1$.

Řešení.
a) $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, tedy 1 je dvojnásobným kořenem.
b) $p(x) = x^4 + x^3 = x^3(x-1)$, tedy 0 je trojnásobným kořenem a 1 jednoduchým kořenem.
c) $p(x) = x^2 + 1 = (x+\imath)(x-\imath)$, tedy jednoduchými kořeny jsou čísla $-\imath$ a $\imath$.

Věta 10.17. Má-li reálný polynom $p(x)$ komplexní kořen $\alpha = a + b\imath$, pak má i komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = a - b\imath$. Násobnosti obou kořenů jsou stejné.

Příklad 10.18. Určete rozklad reálného polynomu $p(x) = x^2 + x + 1$ v komplexním oboru.

Řešení. Přepíšeme polynom $p(x) = x^2 + x + 1$ jako algebraickou rovnici $x^2 + x + 1 = 0$. Ta má diskriminant $D = -3$, a proto jsou jejím řešením dva kořeny $x_1 = \frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}$ a $x_2 = \frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2}$. Rozklad polynomu vypadá následovně: $p(x) = x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)$.

Příklad 10.19. Určete polynom nejnižšího stupně tak, aby $\alpha_1 = 0$ byl jednoduchý kořen, $\alpha_2 = -1$ byl dvojnásobný kořen, $\alpha_3 = \imath$ a $\alpha_4 = -\imath$.

Řešení. $p(x) = \big(x-0\big)\big(x-(-1)\big)^2\big(x-\imath\big)\big(x-(-\imath)\big) = x(x+1)^2(x-\imath)(x+\imath) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x.$

Poznámka 10.20. Pokud máme určit rozklad reálného polynomu pouze reálném oboru, tak kvadratické trojčleny $x^2 + px + q$ se záporným diskriminantem nerozkládáme.

Věta 10.21. (O rozkladu reálného polynomu v reálném oboru) Nechť $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ je reálný polynom stupně $n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ jsou všechny jeho reálné kořeny, každý s násobností $k_i, i = 1, \dots, r$. Pak rozkladem reálného polynomu v reálném oboru rozumíme vztah

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \tag{10.2}$$

kde $x^2 + p_jx + q_j, j = 1, \dots, s$ jsou nerozložitelné kvadratické trojčleny se záporným diskriminantem, které odpovídají komplexním kořenům.

Platí $k_1 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$.

Příklad 10.22. Rozložte polynomy v reálném oboru:
a) $a(x) = x^4 - 1$;
b) $b(x) = 16x^4 - 9$;
c) $c(x) = x^2 + 2x + 5$;
d) $d(x) = x^3 + 1$;
e) $e(x) = x^4 + 1$;
f) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$.

Řešení.
a) $a(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$.
b) $b(x) = 16x^4 - 9 = 16\left(x^4 - \frac{9}{16}\right) = 16\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 16\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
c) $c(x) = x^2 + 2x + 5$ nelze v reálném oboru rozložit, protože příslušná kvadratická rovnice má $D < 0$.
d) $d(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.
e) $e(x) = x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$.
f) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^2(x^3-1) + x(x^3-1) + x^3 - 1 = (x^3-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+x+1)^2$.

B. Funkce reálná racionální lomená

Definice 10.23. Nechť $p(x)$ je reálný polynom stupně m a $q(x)$ nenulový reálný polynom stupně n. Pak funkce

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

se nazývá reálná **racionální lomená funkce**.

Je-li $m < n$, pak mluvíme o **ryze racionální lomené funkci**.
Je-li $m \geq n$, pak mluvíme o **neryze racionální lomenéfunkci**.

Příklad 10.24. a) $\frac{x^2+1}{x^3-2x-1}$ je ryze racionální lomená funkce (krátce: ryze lomená).
b) $\frac{x^4+x-2}{x^2-x-1}$ je neryze racionální lomená funkce (krátce: neryze lomená).

Poznámka 10.25. Každá neryze racionální lomená funkce se dá zapsat jako součet polynomu a ryze racionální lomené funkce ve tvaru

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{s(x)}{t(x)}.$$

Příklad 10.26. Vyjádřete racionální funkce jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce:
a) $r(x) = \frac{-4x^2+10x-1}{x^2-3x+6}$;
b) $r(x) = \frac{2x^5-x^4+3x^2-x+1}{x^2-2x+4}$.

Řešení. Polynomy vydělíme tak, jak jsme zvyklí ze střední školy a výsledek dělení zapíšeme ve tvaru:
a) $r(x) = -4 + \frac{23-2x}{x^2-3x+6}$;
b) $r(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x+53}{x^2-2x+4}$.

Definice 10.27. Zlomky tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{a} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}, \text{ kde } p^2-4q<0$$

nazýváme **parciální zlomky**.

Věta 10.28. (Rozklad ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky)
Každou ryze racionální lomenou funkci $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.
1. Jmenovatel $q(x)$ rozložíme v reálném oboru:
$q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$.
2. Pak každému faktoru $(x-\alpha_i)^{k_i}, i = 1,\dots,r$ odpovídá skupina k_i zlomků ve tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}$$

a faktoru $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}, j = 1,\dots,s$ odpovídá skupina zlomků ve tvaru

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{M_{l_j}x+N_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}.$$

3. Funkci $r(x)$ zapíšeme pomocí součtu odpovídajících skupin zlomků, kterému se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Na příkladu si ukážeme, jakým způsobem vypočítáme příslušné konstanty A_k, M_l a N_l.

Příklad 10.29. Rozložte na parciální zlomky funkci $r(x) = \frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}$.

Řešení. Funkce $r(x)$ je ryze lomená racionální funkce.
1. Rozložíme jmenovatel v reálném oboru, tj. $q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 2x + 2)$, kde kvadratický výraz $x^2 - 2x + 2$ má záporný diskriminant.
2. Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar:

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2-2x+2}. \tag{10.3}$$

3. Určíme konstanty A_1, A_2, M_1, N_1. Vynásobíme rovnici (10.3) společným jmenovatelem $x^2(x^2-2x+2)$. Dostaneme

$$x^2 - 2 = A_1x(x^2-2x+2) + A_2(x^2-2x+2) + (M_1x+N_1)x^2. \tag{10.4}$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin proměnné x na levé a pravé straně rovnice (10.4) dostáváme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} A_1 + M_1 &= 0 \\ -2A_1 + A_2 + N_1 &= 1 \\ 2A_1 - 2A_2 &= 0 \\ 2A_2 &= -2, \end{aligned}$$

ze které je přímo vidět, že $A_1 = -1, A_2 = -1, M_1 = 1, N_1 = 0$. Tedy rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2-2x+2}.$$

Příklad 10.30. Rozložte na parciální zlomky funkci $r(x) = \frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$.

Řešení. $r(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{(x-1)^2}$.

Příklad 10.31. Rozložte na parciální zlomky funkci $r(x) = \frac{x^4-x^3+3x^2-x+1}{x^5+2x^3+x}$.

Řešení. $r(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x}$.