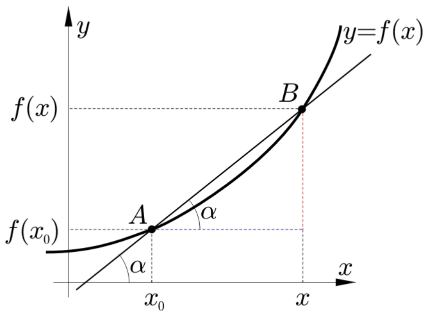
12. Derivace funkce

Dříve než přistoupíme k vlastní definici pojmu derivace, podívejme se na obrázek 12.1. Na křivce $y = f(x)$ je pevně zvolený bod $A[x_0, f(x_0)]$. „Kousek“ od něj si zvolme bod $B[x, f(x)]$. Sečna AB vyjádřená ve směrnicovém tvaru jako přímka $y = k_s x + q$ má směrnici $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Limitním přechodem (tj. bod B volíme nekonečně blízko bodu A) se sečna změní v tečnu, pro niž je směrnice $k_t = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



Obr. 12.1: Grafické znázornění derivace

Definice 12.1. Nechť f je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

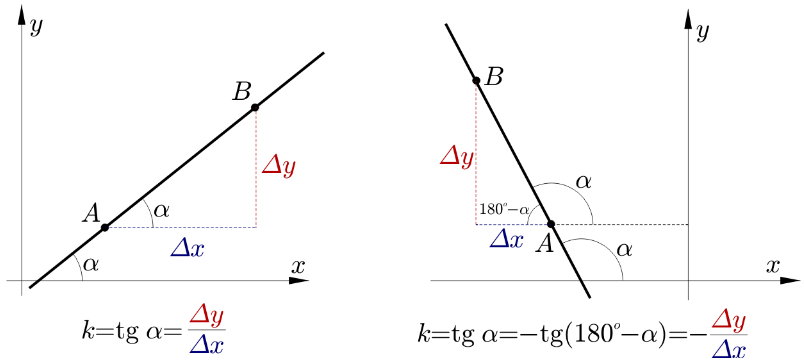
nazýváme tuto limitu **derivací funkce v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

V ostatních případech, tj. limita je rovna $\pm\infty$, nebo neexistuje, řekneme, že funkce f derivaci v bodě x_0 nemá.

Z matematického hlediska pod pojmem derivace funkce v bodě tedy vidíme směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$.

Z fyzikálního hlediska jde o změnu sledované veličiny nejčastěji v čase. Proto se ve fyzice k označení derivace podle času t používá značení $\dot{f}(t)$.

Poznámka 12.2. **Směrnice** přímky $y = kx + q$ (tj. číslo k) je definována jako tangenta úhlu α, který tato přímka svírá s kladným směrem osy x. Hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček považujeme za kladnou, hodnotu měřenou po směru otáčení hodinových ručiček považujeme za zápornou. Tak například hodnoty 210° a −150° udávají směr stejné přímky. Podívejte se na příklady na Obrázku 12.2.



Obr. 12.2: Směrnice přímky

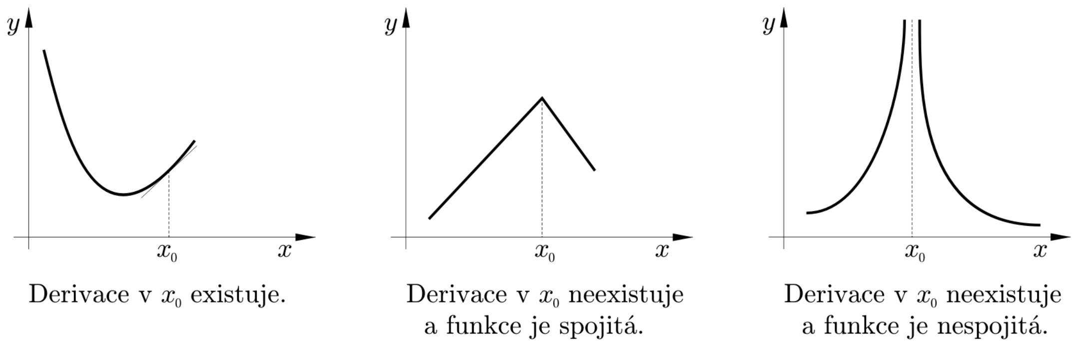
Podobně, jako tomu bylo u limit, definujeme derivaci v bodě zprava a zleva. Označujeme je $f'(x_0^+)$ a $f'(x_0^-)$.

Definice 12.3. Nechť $f(x)$ je funkce a $M \subseteq D(f)$ množina bodů x_0, v nichž má $f(x)$ derivaci. Pak funkce, která každému x_0 přiřadí hodnotu derivace v bodě x_0 se nazývá **derivací funkce $f(x)$** a značí se $f'(x)$.

Věta 12.4. Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci $f'(x_0)$ právě když má derivaci zprava i zleva a platí $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Věta 12.5. Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 **derivaci**, pak je v x_0 **spojitá**.

Jasnou představu o důležitosti této věty si uděláme z obrázku 12.3.



Obr. 12.3: Existence derivace ve vztahu ke spojitosti

Věta 12.6. **Základní vzorce pro derivování**

1. $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R}, x > 0;$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, x \in \mathbb{R};$
4. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x;$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1;$
7. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R};$
8. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R};$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$
10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq 0 + k\pi;$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$
14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Málokdy se stane, že derivujeme přímo základní funkci. Většinou potřebujeme zderivovat součin nebo podíl dvou funkcí, nejčastěji však složenou funkci. Uveďme základní pravidla pro derivování.

Věta 12.7. Základní pravidla pro derivování

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R};$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$ **(derivace součinu)**;
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2},$ **(derivace podílu)**;
5. $(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x),$ **(derivace složené funkce);**
6. $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{g(x)\cdot \ln f(x)}\right)'.$

Poznámka 12.8. Platí: $\sin^2 x = (\sin x)^2$; $\cos x^2 = \cos(x^2)$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{x} = x^{-1}$.

Definice 12.9. Provedeme-li n-krát derivaci funkce $f(x)$ (tedy pokaždé znovu zderivujeme získanou derivaci), dostaneme **derivaci n-tého řádu**. Označení: $f^{(n)}$; derivace nižších řádů značíme $f'(x), f''(x), f'''(x)$.

Celou dobu máme na paměti, derivace v bodě se týká směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Uveďme tedy jeden z možných způsobů vyjádření tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$.

Poznámka 12.10. **Rovnice tečny** ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0, y_0]$: $t:\ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0, y_0]$: $n:\ y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.