

13. L'Hospitalovo pravidlo

Markýz de l'Hospital (též l'Hôpital), celým jménem Guillaume Francois Antoine žil v letech 1661–1704. Zabýval se matematickou analýzou a geometrií. V roce 1696 publikoval učebnici diferenciálního počtu „Analýza nekonečně malých veličin“. Ve zmíněné knize je poprvé uveřejněno tvrzení, které je v současné době známé jako l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit. Je paradoxní, že autorem tohoto tvrzení je l'Hospitalův učitel Johann Bernoulli I.

Věta 13.1. (l'Hospitalovo pravidlo) Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a necht' jsou splněny tyto podmínky: Funkce f, g jsou diferencovatelné v nějakém ryzím okolí bodu a

$$\text{buď } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad \text{nebo } \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty.$$

Pak je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{existuje-li limita vpravo.}$$

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava v bodech $a < +\infty$ a zleva v bodech $a > -\infty$.

A. L'HOSPITALOVO PRAVIDLO PRO LIMITU FUNKCE TYPU $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Základní metodický postup je následující. Funkce, jejíž limitu v daném bodě máme počítat, má tvar zlomku. Určíme nejprve limitu čitatele a limitu jmenovatele. Tyto limity často zjistíme pouhým dosazením. Je-li limita čitatele i jmenovatele rovna nule, lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo. Při výpočtu je pak mnohdy nutné provést aplikaci pravidla vícekrát po sobě. Pravidlo lze rovněž použít pro výpočet jednostranných limit. Postup nyní demonstrujeme na příkladech.

Příklad 13.2. Spočtěte následující limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 3x}$.

Řešení.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2}{2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{2x} - 1)}{3 \cdot \sin 6x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot e^{2x}}{18 \cdot \cos 6x} = \frac{4 \cdot 1}{18 \cdot 1} = \frac{2}{9}$.

B. L'HOSPITALOVO PRAVIDLO PRO LIMITU FUNKCE TYPU $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.

Postup při výpočtu je analogický jako v případě limit typu $\left|\frac{0}{0}\right|$. Funkce, jejíž limitu v daném bodě máme počítat, je ve tvaru zlomku. Určíme limitu absolutní hodnoty jmenovatele. Je-li tato limita rovna ∞ , lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo. Při výpočtu je v řadě případů opět nutné provést aplikaci pravidla vícekrát po sobě. Zdůrazníme skutečnost, že limita čitatele ani jmenovatele nemusí sama o sobě existovat. Dále připomeňme, že výraz $\frac{a}{\infty} = 0$ pro libovolné reálné číslo a .

Příklad 13.3. Spočítejte následující limity:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3^x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{tg} x}$.

Řešení.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3^x \cdot \ln 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3^x \cdot \ln^2 3} = \frac{2}{\infty \cdot \ln^2 3} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^2 x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin 2x}{1} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{tg} x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{-1}{\sin^2 2x} \cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x}{4 \cos^2 x \sin^2 x} =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$.

C. DALŠÍ TYPY LIMIT.

Nejprve zjistíme, jakého je limita typu. Typ určíme většinou snadno dosazením, nebo krátkým výpočtem. Potom volbou vhodné úpravy podle typu převedeme výpočet zadané limity na výpočet limity, při němž lze l'Hospitalovo pravidlo použít. Na l'Hospitalovo pravidlo jsou převoditelné následující typy limit:

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Pro typ $0 \cdot \infty$ používáme nejčastěji jednu z úprav

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

kteřá výpočet převede na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Pro limitu typu $\infty - \infty$ lze použít úpravy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

V řadě případů lze u typu $\infty - \infty$ postupovat jinou cestou. V případě, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají tvar zlomků, stojí za pokus provést jejich rozdíl převedením na společného jmenovatele. V jiných případech lze realizovat vytknutí některé části a převést limitu rozdílu na limitu součinu funkcí. U limit typu 0^0 , ∞^0 , 1^∞ lze použít následující úpravy:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)} \cdot \ln f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \cdot \ln f(x).$$

Příklad 13.4. Spočítejte následující limity:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = |0 \cdot \infty|$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctg x) \cdot \ln x$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$.

Řešení.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \cdot \ln x &= |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{\ln x}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\frac{x^2 + 1}{x \ln^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{x \ln^2 x}{x^2 + 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\ln^2 x + 2x \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^3(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}}{\frac{1}{x(x+1)} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)} - x(x+1)}{\frac{x^2 - x(x+1) \cdot \ln(x+1)}{x^3 + x^4}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1) \cdot \ln(x+1)}{x^2 + x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1}}{2x - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(x+1)}{2x - 3x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x+1}}{2 - 6x} = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x = |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \cdot \infty = \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = |\infty^0| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = |0 \cdot \infty| = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} &= |\infty^0| = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\operatorname{tg} x \cdot \ln x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln x} = \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \\ &= e^0 \cdot 1 = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}}} = \left| \frac{0}{0} \right| = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{x(x+1)}{x^3}}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x(x+1)}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{4} = e^\infty = \infty. \end{aligned}$$