6 Křivočaré souřadnice

1. Nechť $n = 2$, zobrazení $T : U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^2(\varrho, \varphi)$, $V \subset \mathbb{R}^2(x, y)$. Pro $U = \langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, $V = \mathbb{R}^2$ a zobrazení T definované

$$T : \quad \begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi, \\ y &= \varrho \sin\varphi \end{aligned}$$

pak je Jacobiho matice $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{bmatrix}$ a tedy jacobián je roven $\det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{bmatrix} = \varrho$ pro $\varrho \neq 0$.

Transformace T nám tedy nyní umožňuje vyjadřovat body různé od nuly jednoznačně v souřadnicích ϱ a φ ($\varrho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), které nazýváme *polární*, viz obrázek 1 na straně 3.

2. Obecně – nelineární difeomorfismus $T : U \to V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$ v souřadnicích $\xi_1, \dots, \xi_n$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ v souřadnicích $x_1, \dots, x_n$ má tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= T_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \\ &\vdots \\ x_n &= T_n(\xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

se nazývá *transformace do křivočarých souřadnic.*

3. *Zobecněné polární souřadnice* pro $n = 2$ $(x, y \to \varrho, \varphi)$:

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi, \\ y &= b\varrho\sin\varphi, \end{aligned}$$

kde $a, b > 0$ a jacobián $J = ab\varrho$.

4. *Cylindrické souřadnice* pro $n = 3$, $(x, y, z \to \varrho, \varphi, \omega)$:

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi, \\ y &= \varrho\sin\varphi, \\ z &= \omega, \end{aligned}$$

kde jacobián $J = \varrho$, viz obrázek 2 na straně 3.

5. *Zobecněné cylindrické souřadnice* pro $n = 3$, $(x, y, z \to \varrho, \varphi, \omega)$:

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi, \\ y &= b\varrho\sin\varphi, \\ z &= \omega, \end{aligned}$$

kde $a, b > 0$ a jacobián $J = ab\varrho$.

6. *Sférické souřadnice* pro $n = 3$, $(x, y, z \to \varrho, \varphi, \theta)$. Jsou možné dvě varianty:

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= \varrho\cos\theta, \\ \\ J &= -\varrho^2\sin\theta, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= \varrho\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= \varrho\sin\theta, \\ \\ J &= -\varrho^2\cos\theta, \end{aligned}$$

kde $\varrho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a $0 \leq \theta \leq \pi$, viz obrázky 3 a 4 na straně 3.

7. *Zobecněné sférické souřadnice*:

$$x = a\varrho\cos\varphi\sin\theta, \qquad x = a\varrho\cos\varphi\cos\theta,$$
$$y = b\varrho\sin\varphi\sin\theta, \qquad y = b\varrho\sin\varphi\cos\theta,$$
$$z = c\varrho\cos\theta, \qquad z = c\varrho\sin\theta,$$

$$J = -abc\varrho^2\sin\theta, \qquad J = -abc\varrho^2\cos\theta,$$

kde $\varrho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ a $a, b, c > 0$.

8. *Parabolické souřadnice* pro $n = 2$ $(\xi, \eta \to x, y)$:

$$x = \xi\eta,$$
$$y = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right).$$

Je-li ξ rovno konstatně, tedy $\xi = c$, pak $x^2 = c^2\eta^2$, z čehož plyne, že $\eta^2 = \frac{x^2}{c^2}$. Dosazením tedy dostaneme $y = \frac{1}{2}\left(c^2 - \eta^2\right)$, čili $y = \frac{1}{2}\left(c^2 - \frac{x^2}{c^2}\right)$, což je rovnice paraboly. Body v těchto parabolických souřadnicích získáme vhodnou volbou konstant xi a η, přičemž získáme dvojici parabol, jejichž průsečík(y) jsou požadované body. Jacobián $J = -\eta^2 - \xi^2$ je nenulový za předpokladu $\xi \neq 0 \wedge \eta \neq 0$.

9. *Paraboloidické souřadnice* pro $n = 3$, kde ξ, η jsou libovolná, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$x = \xi\eta\cos\varphi,$$
$$y = \xi\eta\sin\varphi,$$
$$z = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right).$$

Princip těchto souřadnic je shodný s předchozím případem, dimenze je však rozšířena na 3. Jacobián $J = \xi\eta\left(\xi^2 + \eta^2\right)$ je nenulový, jestliže $\xi \neq 0 \wedge \eta \neq 0$.

10. *Toroidální souřadnice*:

$$x = \frac{\sinh\omega \cdot \cos\varphi}{\cosh\omega - \cos\theta},$$
$$y = \frac{\sinh\omega \cdot \sin\varphi}{\cosh\omega - \cos\theta},$$
$$z = \frac{\sin\theta}{\cosh\omega - \cos\theta},$$

kde $\omega \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$. V případě, že ω je konstantou, získáme anuloid. Jacobián je již složitější:

$$J = -\frac{\sinh\omega}{\cosh^3\omega - 3\cosh^2\omega \cdot \cos\theta + 3\cosh\omega \cdot \cos^2\theta - \cos^3\theta}.$$

11. Parciální derivace v křivočarých souřadnicích se počítají stejně jako parciální derivace složené funkce.

Příklad

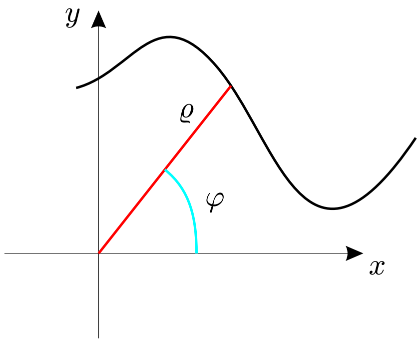
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, kde $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$. Pak tedy $f(\varrho, \varphi) = \varrho^2 - 1$ a $f'_\varrho = 2\varrho$.

12. *Cvičení*

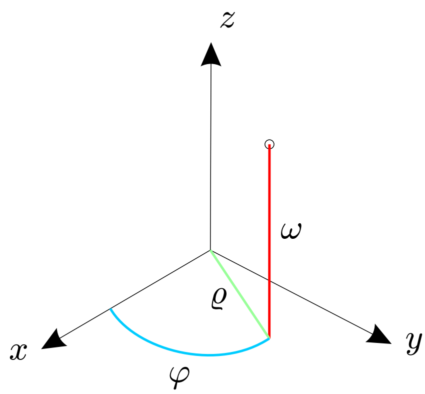
Vypočtěte rovnici sféry $x^2 + y^2 + z^2 - R = 0$ v souřadnících a) sférických, b) cylindrických, c) parabolických a d) toroidálních.

Řešení:

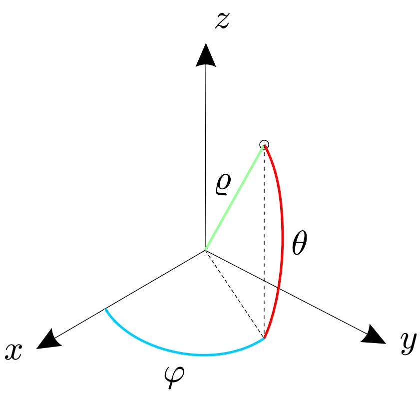
a) $\varrho^2 - R = 0$, b $\omega^2 - R + \varrho^2 = 0$, c) $\frac{1}{4}\eta^2 - R + \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 = 0$ a d) $-\frac{R\cosh\omega - \cosh\omega - R\cos\theta - \cos\theta}{\cosh\omega - \cos\theta} = 0$.



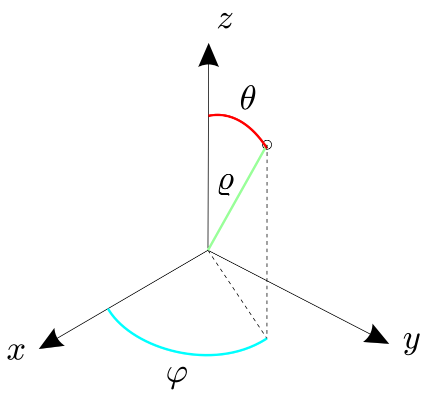
Obrázek 1: Polární souřadnice



Obrázek 2: Cylindrické souřadnice



Obrázek 3: Sférické souřadnice – typ I.



Obrázek 4: Sférické souřadnice – typ II.