

8 Kvadratické formy

1. Podle definice 7.5 lze vektoru přiřadit číslo pomocí kvadratické formy:

$$\vec{x} \rightarrow \sum_{i,j}^n a_{ij} dx_i dx_j.$$

Například, pro $n = 2$ uvažujme kvadratickou formu $\kappa = 4 dx^2 + 5 dx dy + 6 dy^2$ a vektor $\vec{u} = (1, 5)$, tedy $\kappa(\vec{u}) = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 = 179$.

Pak matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se nazývá it matice kvadratické formy.

V našem případě $\kappa = 4 dx^2 + 5 dx dy + 6 dy^2$ je $a_{11} = 4$, $a_{12} = a_{21} = \frac{5}{2}$ a $a_{22} = 6$, pak tedy matice kvadratické formy je $\begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$.

Matice kvadratické formy je symetrická, tzn. $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$.

- (a) Kvadratická forma κ je *pozitivně definitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$\kappa(\vec{u}) > 0.$$

- (b) Kvadratická forma κ je *negativně definitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$\kappa(\vec{u}) < 0.$$

- (c) Kvadratická forma κ je *pozitivně semidefinitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$\kappa(\vec{u}) \geq 0.$$

- (d) Kvadratická forma κ je *negativně semidefinitní*, je-li pro každý nenulový vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$\kappa(\vec{u}) \leq 0.$$

- (e) Kvadratická forma κ je *indefinitní*, existuje-li vektor \vec{u} a \vec{v} tak, že

$$\kappa(\vec{u}) > 0 \quad \kappa(\vec{v}) < 0.$$

2. Pozitivně definitní kvadratická forma je i pozitivně semidefinitní a i naopak negativně definitní kvadratická forma je i negativně semidefinitní.

Pozitivní definitnost, negativní definitnost a indefinitnost se navzájem vylučují.

Pozitivní semidefinitnost a negativní semidefinitnost splňuje pouze nulová kvadratická forma.

Pro $n = 1$ neexistuje indefinitní kvadratická forma ($\kappa = ax^2$).

3. Sylvestrové kritérium

Nechť \mathbb{D} je matice kvadratické formy κ a označme $D_1 = \det[d_{11}]$, $D_2 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$, \dots ,

$$D_n = \det \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pak řekneme, že kvadratická forma κ je

- (a) pozitivně definitní právě tehdy, když

$$D_1 > 0, \dots, D_n > 0,$$

- (b) negativně definitní právě tehdy, když

$$(-1)^1 D_1 > 0, (-1)^2 D_2 > 0, (-1)^3 D_3 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0,$$

tedy

$$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots,$$

- (c) pozitivně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0,$$

- (d) negativně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0, \dots,$$

- (e) indefinitní právě tehdy, když nenastane žádný případ z výše uvedených.

Příklad

Vyšetřete kvadratickou formu $\kappa = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4xz - 12yz$.

Řešení:

$D_1 = 2$, $D_2 = 6$, $D_3 = -60$, kvadratická forma κ je indefinitní.