22 Riemannova metrika a obsah plochy

1. *Riemannovou metrikou* v $\mathbb{R}^m$ rozumíme pozitivně definitní kvadratickou formu (viz 7.5 a 8.2)
$$\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j,$$
(kde $g_{ij} = g_{ij}(u_1, \dots, u_m)$ jsou třídy C^1), definovanou na tečných vektorech.

2. Délka křivky $\gamma = \gamma(\tau) = \big(\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_m(\tau)\big)$ je pak
$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\big(\gamma(\tau)\big)\gamma_i{}'\gamma_j{}'}\,\mathrm{d}\tau.$$
Euklidovská metrika je speciální případ $g_{ij} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta,
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$
Tedy pro $m = 3$ je $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, tedy
$$l = \int_a^b \sqrt{\gamma_1{}'^2 + \gamma_2{}'^2 + \gamma_3{}'^2}\,\mathrm{d}\tau$$
a pro $m = 2$ v případě polárních souřadnic je $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ a $g_{22} = \varrho^2$.

3. Nechť
$$\gamma = \Gamma \circ \overline{\gamma} = \big(\Gamma_1(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2), \Gamma_2(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2), \Gamma_3(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)\big)$$
je křivka na ploše, kde $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$, $\overline{\gamma} : J \to M \subset \mathbb{R}^2$ a $\Gamma : M \to \mathbb{R}^3$. Chceme tedy definovat délku křivky na ploše a je přirozené požadovat, aby byla stejná jako délka křivky v $\mathbb{R}^3$. Tedy
$$l = \int_a^b \sqrt{\gamma_1{}'^2 + \gamma_2{}'^2 + \gamma_3{}'^2}\,\mathrm{d}\tau,$$
kde
$$\begin{aligned}\gamma_1{}'^2 + \gamma_2{}'^2 + \gamma_3{}'^2 = (\Gamma_1{}'_s\overline{\gamma}_1{}' + \Gamma_1{}'_t\overline{\gamma}_2{}')^2 + (\Gamma_2{}'_s\overline{\gamma}_1{}' + \Gamma_2{}'_t\overline{\gamma}_2{}')^2 + (\Gamma_3{}'_s\overline{\gamma}_1{}' + \Gamma_3{}'_t\overline{\gamma}_2{}')^2 = \\ = E\,\overline{\gamma}_1{}'^2 + 2F\,\overline{\gamma}_1{}'^2\overline{\gamma}_2{}'^2 + G\,\overline{\gamma}_2{}'^2,\end{aligned}$$
přičemž platí, že
$$\begin{aligned} E &= \Gamma_1{}'^2_s + \Gamma_2{}'^2_s + \Gamma_3{}'^2_s, \\ F &= \Gamma_1{}'_s\Gamma_1{}'_t + \Gamma_2{}'_s\Gamma_2{}'_t + \Gamma_3{}'_s\Gamma_3{}'_t, \\ G &= \Gamma_1{}'^2_t + \Gamma_2{}'^2_t + \Gamma_3{}'^2_t. \end{aligned}$$

4. Nyní ukážeme, je jde opravdu o Riemannovskou metriku pozitivně definitní – pro nenulový vektor, tzn. v regulárním bodě platí
$$E > 0 \qquad EG - F^2 > 2$$

a Schwarzova nerovnost
$$|\vec{\Gamma}'_s|^2 \cdot |\vec{\Gamma}'_t|^2 - |\vec{\Gamma}'_s \vec{\Gamma}'_s|^2 \geq 0.$$

Tedy máme skutečně Riemannovskou metriku, tzv. *první kvadratickou formu plochy.*

Délka křivky na ploše je tedy
$$l = \int_a^b \sqrt{E\,\overline{\gamma}_1{}'^2 + 2F\,\overline{\gamma}_1{}'\overline{\gamma}_2{}' + G\,\overline{\gamma}_1{}'^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

Například pro rovinu $z = 0$ máme $x = \Gamma_1(s,t) = s$, $y = \Gamma_2(s,t) = t$ a $z = \Gamma_3(s,t) = 0$. Pak tedy $E = 1$, $F = 0$ a $G = 1$. Pak délka křivky na této rovině je $l = \int_a^b \sqrt{\overline{\gamma}_1{}'^2 + \overline{\gamma}_2{}'^2}\,\mathrm{d}\tau$.

5. *Příklad*

   Nechť plocha Γ je určena rovnicemi $x = s$, $y = t$ a $z = \mathrm{e}^s$ a křivka $\overline{\gamma}$ na této ploše je definována rovnicemi $x = \cos\tau$ a $y = \sin\tau$, kde $\tau \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

   Pak délka této křivky na dané ploše je
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \mathrm{e}^{2\cos\tau})\sin^2\tau + \cos^2\tau}\,\mathrm{d}t.$$

6. Obsah rovinné oblasti M se vypočte jako
$$P(M) = \iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
   obsah oblasti $\Gamma(M)$ na ploše se pak vypočte jako
$$\iint_M \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$
   kde $\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ je plošný element $\mathrm{d}S$.

7. Nechť platí
$$\sqrt{EG - F^2} = |\vec{\Gamma}'_s \times \vec{\Gamma}'_t|.$$

   Důkaz: spočívá v rozepsání levé i pravé strany a jejich porovnání.

8. *Poznámka*

   Klasický Riemannův přístup je možný.

9. *Poznámka*

   Zavedení Riemannovy metriky je uspokojujícím obecným popisem i na tzv. neeuklidovských geometriích.

10. Je-li plocha zadána implicitně (21.8), lze ji lokálně vyjádřit explicitně jako fce, například $z = f(x,y)$, pak tedy $\Gamma_1 = s$, $\Gamma_2 = t$ a $\Gamma_3 = f(s,t)$. Pak $E = 1 + f_s'^2$, $F = f_s' f_t'$ a $G = 1 + f_t'^2$, přičemž platí
$$\iint_M \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint_M \sqrt{1 + f_s'^2 + f_t'^2}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint_M \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

11. *Příklad*

Spočtěte obsah paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ohraničeného rovinou $z = 1$.

Pro povrch daného paraboloidu platí

$$P = \iint_M \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je průmět kružnice, která vznikne průnikem paraboloidu a roviny $z = 1$, do roviny xy. Pro řešení zavedeme polární souřadnice $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$, kde jacobián $J = \varrho$. Oblast M určují podmínky $0 \le \varrho \le 1$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$P = \iint_M \sqrt{1 + 4\varrho^2\cos^2\varphi + 4\varrho^2\sin^2\varphi}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\varrho^2}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \cdots = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

12. *Příklad*

Spočtěte obsah šroubového konoidu $x = t\cos s$, $y = t\sin s$, $z = s$ pro $0 \le t \le 1$ a $0 \le s \le 2\pi$.

Platí tedy, že $E = t^2 + 1$, $F = 0$ a $G = 1$.

Pak obsah konoidu spočteme jako

$$\iint_M \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \cdots = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right).$$