24 Orientovaný plošný integrál

1. Uvažujme orientovanou (orientovanou souhlasně se svojí parametrizací) jednotkovou plochu třídy C^1 takovou, že $\vec{\Gamma} : M \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\Gamma}\big(\Gamma_1(s,t), \Gamma_2(s,t), \Gamma_3(s,t)\big)$ a jednotkové normálové pole

$$\vec{n} = \frac{\vec{\Gamma}'_s \times \vec{\Gamma}'_t}{|\vec{\Gamma}'_s \times \vec{\Gamma}'_t|},$$

druhou možností je $-\vec{n}$, kterou ale nebudeme uvažovat. Dále uvažujme vektorové pole

$$\vec{a} = \big(a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z)\big),$$

kde $\Gamma(M) \subset \operatorname{Dom} \vec{a}$.

Orientovaným plošným integrálem pak rozumíme integrál

$$\iint_M \vec{a}\big(\Gamma_1(s,t), \Gamma_2(s,t), \Gamma_3(s,t)\big) \cdot \vec{n}(s,t)\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S},$$

u uzavřených ploch tento integrál nazýváme *tokem* danou plochou a píšeme

$$\oint\!\!\!\oint_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S}.$$

2. Je-li plocha po částech třídy C^1, definujeme orientovaný plošný integrál jako součet orientovaných plošných integrálů částí třídy C^1.

3. Platí, že

$$\iint_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\vec{\Gamma}} a_1\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + a_2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + a_3\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (\clubsuit)$$

Je-li například plocha Γ dána jako graf funkce $g : z = g(x,y)$, pak tečná rovina je

$$z = g(A) + g'_x(A)(x - a_1) + g'_y(A)(y - a_2),$$

znamená to tedy, že normálový vektor je

$$\vec{n} = \big(g'_x(A), g'_y(A), -1\big)$$

pro směr dolů a $\vec{n} = \big(-g'_x(A), -g'_y(A), 1\big)$ pro směr nahoru.

Pak pro plochu nahoru je integrál ($\clubsuit$) roven

$$\iint_M \Big(-g'_x a_1\big(x,y,g(x,y)\big) - g'_y a_2\big(x,y,g(x,y)\big) + a_3\big(x,y,g(x,y)\big)\Big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (\heartsuit)$$

kde M je průmět plochy Γ do roviny $z = 0$.

4. *Příklad*

Vypočtěte integrál $\iint_{\vec{\Gamma}} x\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde plocha $\vec{\Gamma}$ je část paraboloidu $z = g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ orientovaná ven.

$$\iint_{\vec{\Gamma}} x\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \big(2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)\big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dots,$$

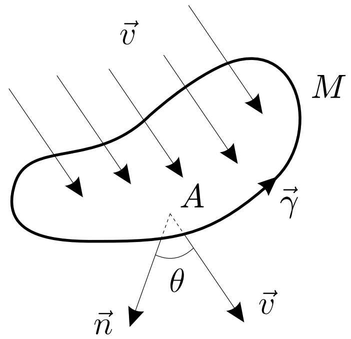
kde oblast M je kruh o poloměru $r = 2$ se středem v bodě $[0, 0]$,

$$\dots = \iint_M (4 + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dots,$$

nyní zavedeme polární souřadnice, pro které platí $0 \le \varrho \le 2$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$,

$$\dots = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 + \varrho^2)\varrho\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[2\varrho^2 + \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^2 \mathrm{d}\varphi = 24\pi.$$

5. Uvažujme rychlostí pole $\vec{v}$ proudění kapaliny.

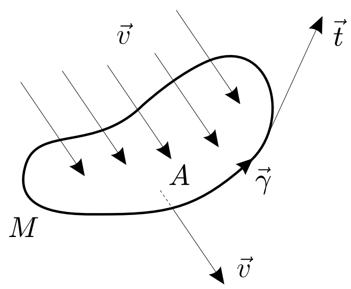


Vytéká-li kapalina ven z oblasti M, pak úhel θ mezi vektorem $\vec{v}$ a $\vec{n}$ v bodě A je ostrý, tedy skalární součin je kladný.

Tok vektorového pole přes uzavřenou křivku $\vec{\gamma}$ je

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s > 0$$

v případě, že kapalina více vytéká z oblasti M ven. Naopak $\oint_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s < 0$ v případě, pokud kapalina více vtéká z oblasti M dovnitř.



Cirkulace vektorového pole přes uzavřenou křivku $\vec{\gamma}$ je

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s > 0$$

v případě, že více kapaliny teče ve směru orientace křivky γ. Naopak $\oint_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s < 0$ v případě, pokud více kapaliny teče v protisměru orientace křivky γ.

Tedy tok vektorového pole přes uzavřenou křivku γ lze nyní přepsat do tvaru

$$\oint_{\vec{\gamma}} (v_1, v_2) \cdot ({\gamma_2}', -{\gamma_1}')\,\mathrm{d}s$$

a stejně tak lze cirkulaci vektorového pole přes uzavřenou křivku γ vyjádřit jako

$$\oint_{\vec{\gamma}} (v_1, v_2) \cdot ({\gamma_1}', {\gamma_2}')\,\mathrm{d}s.$$

6. V případě ploch (uzavřených i neuzavřených), které nemají jednoznačně určené tečné pole má smysl pouze tok.

$$T = \iint_{\vec{\Gamma}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

7. *Příklad*

Spočtěte tok rychlostního pole $\vec{v} = (x^2, y^2, z^2)$ osminou sféry $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ $(x, y, z \ge 0)$, která je orientována ven.

Tedy $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = g(x, y)$ a tok rychlostního pole se spočte jako

$$T = \iint_{\vec{\Gamma}} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{s} = \iint_{\vec{\Gamma}} x^2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tento integrál se dále řeší podle vztahu (♡) (viz bod 3 této kapitoly na straně 1).

$$g'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad g'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Počítejme dále

$$T = \iint_M \left(\frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + 1 - x^2 - y^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde oblast M je čtvrtkružnice o poloměru $r = 1$ v prvním kvadrantu. V tomto případě je opět vhodné zavést polární souřadnice s mezemi $0 \leq \varrho \leq 0$ a $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Pak tedy tok daného rychlostního pole je

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \varrho \left(\frac{\varrho^3 \cos^3 \varphi}{\sqrt{1 - \varrho^2}} + \frac{\varrho^3 \sin^3 \varphi}{\sqrt{1 - \varrho^2}} + 1 - \varrho^2 \right) \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \cdots = \frac{3}{8}\pi.$$