

# Kapitola 8

## Transformace v rovině

### 8.1 Transformace v rovině

Mějme dány body  $A [1, 2]$ ,  $B [3, 5]$  a rovnice

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + 6 \\x'_2 &= x_1 + x_2 + 3\end{aligned}\tag{8.1}$$

Pomocí těchto bodů získáme body  $A'$ ,  $B'$

$$\begin{aligned}a'_1 &= a_1 + 6 = 1 + 6 = 7 \\a'_2 &= a_1 + a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6\end{aligned}\tag{8.2}$$

Bod  $A'$  má souřadnice  $[7, 6]$  a bod  $B' = [9, 11]$

Provedli jsme transformaci úsečky  $AB$  na úsečku  $A'B'$  pomocí rovnic 8.1. Rovnice 8.1 budeme nazývat **transformační rovnice** a lze je maticově zapsat jako

$$\mathbf{x}' = T * \mathbf{x} + \mathbf{r}\tag{8.3}$$

Matice  $\mathbf{T}$  se nazývá **transformační matice**. V našem případě vypadá takto

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Příklad:**

Mějme dány body  $A [1, -5]$ ,  $B [7, 6]$  a rovnice

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + x_2 + 6 \\x'_2 &= x_1 + 3 * x_2 + 3\end{aligned}\tag{8.4}$$

Pomocí těchto bodů vypočtete body  $A'$ ,  $B'$  a napište transformační matici  $\mathbf{T}$

## Homogenizace

Při práci s transformací se používá homogenizace ke zjednodušení výpočtu. Vezme se transformační matice  $\mathbf{T}$  a vektor  $\mathbf{r}$  z rovnice transformace  $\mathbf{x}' = T * \mathbf{x} + \mathbf{r}$  a vytvoří se z nich jediná matice 3 krát 3.

$$H = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & r_1 \\ t_{21} & t_{22} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro použití v programu je nutné tuto matici transponovat

$$H = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & r_1 \\ t_{12} & t_{22} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Typy zobrazení

1. Osová souměrnost  
z rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{8.5}$$

vyplývá matice

$$H_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Středová souměrnost  
z rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 \\ x'_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{8.6}$$

vyplývá matice

$$H_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Posunutí  
z rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + u_1 \\ x'_2 &= x_2 + u_2 \end{aligned} \tag{8.7}$$

vyplývá matice

$$H_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Stejnolehlost – homotetie  
z rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda x_1 \\ x'_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \tag{8.8}$$

vyplývá matice

$$H_o = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Osová afinita  
z rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_1 x_1 \\ x'_2 &= p_2 x_1 + x_2 \end{aligned} \tag{8.9}$$

vyplývá matice

$$H_o = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8.2 Transformace v prostoru

Rozdíl mezi transformací v rovině a v prostoru je pouze v tom, že transformační matice je o jeden rozměr větší, tedy *4times4*. Můžeme ji zapsat jako:

$$H = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Na ukázkou uvedeme několik typů transformačních matic pro transformace v prostoru. Může to být například otáčení kolem některé ze souřadných os, středová souměrnost podle počátku či posunutí. Obecné transformace dostáváme složením těchto základních. Prakticky je to v programu prováděno postupným součinem transformačních matic.

## Příklady transformačních matic

Souměrnost podle počátku

$$H_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posunutí

$$H_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Osová souměrnost podle roviny  $xy$ .

$$H_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osová souměrnost podle osy  $y$

$$H_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8.3 Kontrolní otázky

1. Jaké znáte transformace?
2. Jaký je matematický rozdíl mezi transformací v rovině a prostoru?
3. Napište transformační matici středové souměrnosti v rovině.
4. Napište transformační matici osové souměrnosti v rovině.
5. Jak probíhá skládání transformací?

## 8.4 Literatura

Martišek, D. - Matematické principy grafických systémů