Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných

RNDr. Jiří Klaška, Dr.

Sbírka řešených příkladů k předmětu

Matematika II

pro profesní a kombinovanou formu studia

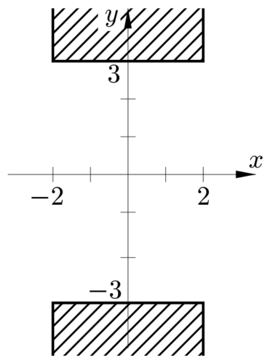
Obsah

Část I
Diferenciální počet funkcí více proměnných

1 Definiční obor funkce dvou proměnných

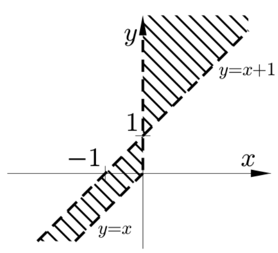
Vyšetřete a v kartézském souřadném systému (O, x, y) zakreslete definiční obory následujících funkcí dvou proměnných:

1. Příklad $f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-9}$.
Řešení $(4-x^2 \geq 0) \wedge (y^2-9 \geq 0) \Leftrightarrow (x^2 \leq 4) \wedge (y^2 \geq 9) \Leftrightarrow (|x| \leq 2) \wedge (|y| \geq 3) \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty)$. Tedy $Df = \langle -2, 2\rangle \times \big((-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty)\big)$. Viz Obr. 1.



Obr. 1

2. Příklad $f(x,y) = \ln\big(x \ln(y-x)\big)$.
Řešení $x \ln(y-x) > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge \ln(y-x) > 0) \vee (x < 0 \wedge \ln(y-x) < 0) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y-x > 1) \vee$ $\vee (x < 0 \wedge 0 < y-x < 1)$.
Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x > 0 \wedge y > x+1) \vee (x < 0 \wedge y < x+1 \wedge y > x)\}$. Viz Obr. 2.

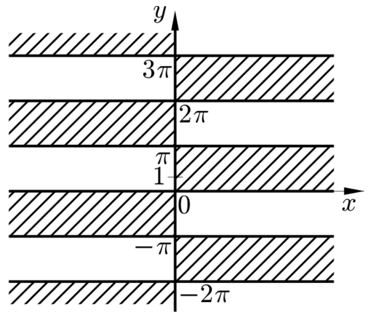


Obr. 2

3. Příklad $f(x,y) = \sqrt{x \sin y}$.

Řešení $x \sin y \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge \sin y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge \sin y \leq 0)$.

Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x \geq 0 \wedge y \in \cup_{k=0}^{\infty} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle) \vee (x \leq 0 \wedge y \in \cup_{k=0}^{-\infty} \langle (2k-1)\pi, 2k\pi \rangle)\}$. Viz Obr. 3.

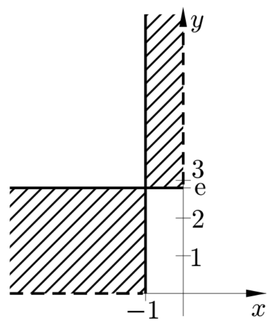


Obr. 3

4. Příklad $f(x,y) = \sqrt{(1 - \ln y) \ln(-x)}$.

Řešení $(1 - \ln y) \ln(-x) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - \ln y \geq 0 \wedge \ln(-x) \geq 0) \vee (1 - \ln y \leq 0 \wedge \ln(-x) \leq 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\ln y \leq 1 \wedge x \leq -1) \vee (\ln y \geq 1 \wedge 0 > x \geq -1)$.

Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (0 < y \leq \mathrm{e} \wedge x \leq -1) \vee (y \geq \mathrm{e} \wedge -1 \leq x < 0)\}$. Viz Obr. 4.

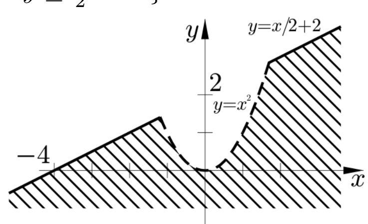


Obr. 4

5. Příklad $f(x,y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4}$.

Řešení $x^2 - y > 0 \wedge x - 2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y < x^2 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2$.

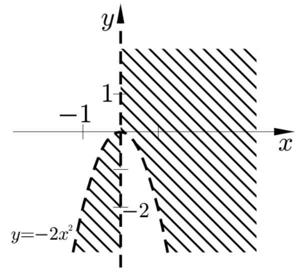
Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y < x^2 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2\}$. Viz Obr. 5.



Obr. 5

6. Příklad $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$.

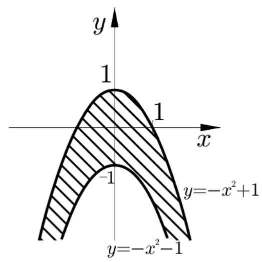
Řešení $x+\frac{y}{2x}>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+y}{2x}>0 \Leftrightarrow (2x^2+y>0 \wedge 2x>0) \vee (2x^2+y<0 \wedge 2x<0)$. Tedy $Df=\{[x,y]\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:(x>0\wedge y>-2x^2)\vee(x<0\wedge y<-2x^2)\}$. Viz Obr. 6.



Obr. 6

7. Příklad $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

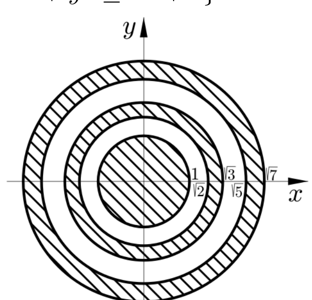
Řešení $1-(x^2+y)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y)^2\leq 1 \Leftrightarrow |x^2+y|\leq 1 \Leftrightarrow (x^2+y\leq 0\wedge -x^2-y\leq 1)\vee(x^2+y\geq 0\wedge$ $\wedge\, x^2+y\leq 1) \Leftrightarrow 0\leq x^2+y\leq 1 \vee -1\leq x^2+y\leq 0 \Leftrightarrow -1-x^2\leq y\leq 1-x^2$.
Tedy $Df=\{[x,y]\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:-1-x^2\leq y\leq 1-x^2\}$. Viz Obr. 7.



Obr. 7

8. Příklad $f(x,y)=\sqrt{\sin\left(\pi(x^2+y^2)\right)}$.

Řešení $\sin\pi(x^2+y^2)\geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi\leq\pi(x^2+y^2)\leq(2k+1)\pi, k\in Z \Leftrightarrow 2k\leq x^2+y^2\leq 2k+1$, kde $k\in Z$.
Tedy $Df=\cup_{k=0}^{\infty}\{[x,y]\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:2k\leq x^2+y^2\leq 2k+1\}$. Viz Obr. 8.

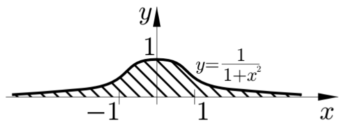


Obr. 8

9. Příklad $f(x,y) = \arcsin\big(2y(1+x^2)-1\big)$.

Řešení $-1 \le 2y(1+x^2)-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2y(1+x^2) \le 2 \Leftrightarrow 0 \le y \le \frac{1}{1+x^2}$.

Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 0 \le y \le \frac{1}{1+x^2}\}$. Po vyšetření průběhu funkce $\frac{1}{1+x^2}$ již snadno nakreslíme definiční obor. Viz Obr. 9.

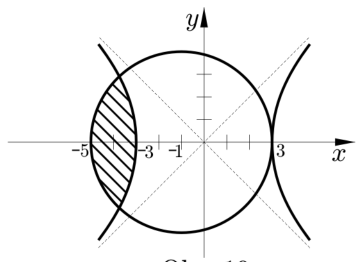


Obr. 9

10. Příklad $f(x,y) = \ln\left(1+\sqrt{x^2-y^2-9}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{15-x^2-y^2-2x}$.

Řešení $1+\sqrt{x^2-y^2-9} > 0 \wedge 15-x^2-y^2-2x \ge 0 \Leftrightarrow x^2-y^2-9 \ge 0 \wedge x^2+y^2+2x \le 15$.

Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2-y^2 \ge 9 \wedge (x+1)^2+y^2 \le 16\}$. Viz Obr. 10.



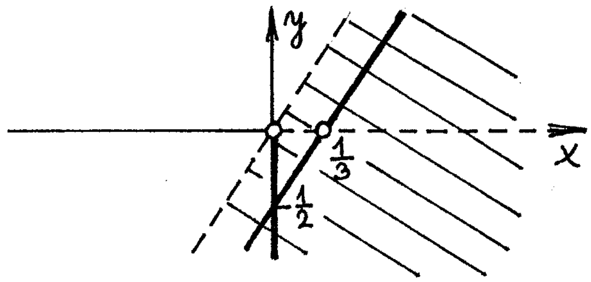
Obr. 10

2 Grafy funkce dvou proměnných (metoda řezů)

Vyšetřete a nakreslete řezy následujících funkcí:

11. Příklad $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \cdot \ln(3x - 2y)$ rovinou $z = 0$.

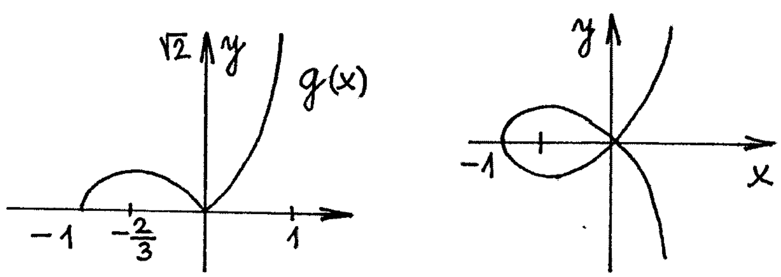
Řešení Předně vyšetříme definiční obor. Platí $[x,y] \in Df \Leftrightarrow y \neq 0 \wedge 3x-2y > 0 \Leftrightarrow y \neq 0 \wedge y < \frac{3}{2}x$. Odtud plyne, že $Df = \{[x,y]; y < \frac{3}{2}x \wedge y \neq 0\}$. Viz Obrázek 1. Najít řez rovinou $z = 0$ znamená řešit rovnici $\frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) = 0$. Platí $\frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x - 2y = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Odtud a z předchozího plyne, že řezem je otevřená polopřímka a přímka s výjimkou jednoho bodu. Viz Obrázek 1.



Obrázek 1:

12. Příklad $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ rovinou $z = 0$.

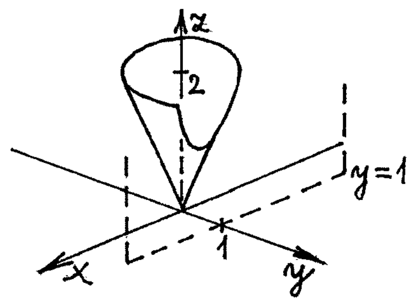
Řešení Definiční obor funkce $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ je celá rovina $\mathbb{R}^2$. Najít řez rovinou $z = 0$ znamená vyřešit rovnici $x^3 + x^2 - y^2 = 0$. Platí $y^2 = x^3 + x^2$ a odtud $y = \pm\sqrt{x^3 + x^2}$. Odtud plyne, že hledaný řez je symetrický podle osy x. Vyšetříme průběh funkce $g(x) = \pm\sqrt{x^3 + x^2}$. Předně $x \in Dg \Leftrightarrow x^2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Tedy $Dg = \langle -1, \infty)$. Určíme první derivaci $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{1}{2}\frac{x(3x+2)}{\sqrt{x^3+x^2}}$. Definiční obor derivace g' je $Dg' = (-1,\infty) - \{0\}$. Jediný nulový bod je $x = -\frac{2}{3}$. Dosazením vhodných bodů zjistíme signum g' na příslušných intervalech. Na $(-1, -\frac{2}{3})$ je g' kladná, na $(-\frac{2}{3}, 0)$ záporná a na $(0,\infty)$ kladná. Odtud plyne, že funkce g je na $(-1,-\frac{2}{3})$ rostoucí, na $(-\frac{2}{3}, 0)$ klesající a na $(0,\infty)$ rostoucí. V bodě $x = -\frac{2}{3}$ je maximum $g(-\frac{2}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.38$ a v bodě $x = 0$ je minimum $g(0) = 0$. Druhá derivace po úpravě vychází $g''(x) = \frac{1}{4}\frac{x(3x+4)}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)}}$. Odtud plyne, že na intervalu $(-1,0)$ je funkce g konkávní a na $(0,\infty)$ konvexní. Bod $x = 0$ není inflexní bod. Asymptoty funkce g nemá. Z těchto informací lze již nakreslit graf funkce g a tím i obrázek celého řezu. Viz Obrázek 2.



Obrázek 2:

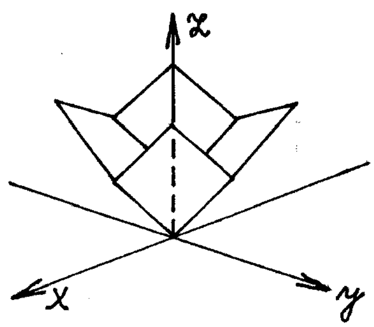
Pomocí metody řezů nakreslete grafy následujících funkcí dvou proměnných.

13. Příklad $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. **Řešení** Definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je celá rovina R^2 a $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ kružnice $x^2 + y^2 = c^2$, pro $z = 0$ bod $[0,0]$ a pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = \sqrt{x^2+c^2}$. Po umocnění dostáváme $z^2 - x^2 = c^2, z \geq 0$. Tedy řezy jsou pro $c \neq 0$ ramena rovnoosých hyperbol a pro $c = 0$ je řez $z = |x|$. Grafem funkce f je horní část kuželové plochy. Viz Obrázek 3. V grafu jsou znázorněny řezy rovinami $z = 2$ a $y = 1$.



Obrázek 3:

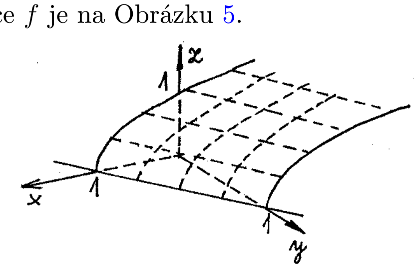
14. Příklad $f(x,y) = |x| + |y|$. **Řešení** Pro $f(x,y) = |x| + |y|$ platí, že $Df = R^2$ a $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny čtyřmi úsečkami $y = \pm x \pm c$, které tvoří hranici čtverce. Pro $z = 0$ je řez bod $[0,0]$ a pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = |x| + c$. Viz Obrázek 4.



Obrázek 4:

15. Příklad $f(x,y) = \sqrt{1-(x+y)}$.

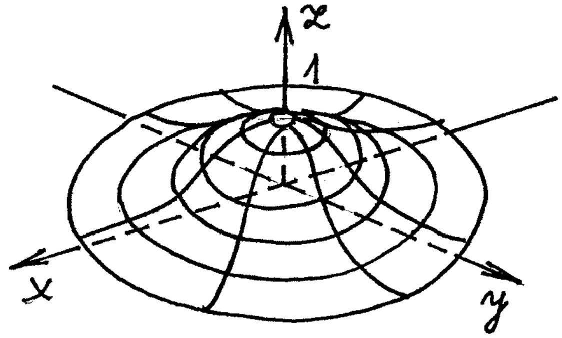
Řešení Pro $f(x,y) = \sqrt{1-(x+y)}$ platí, že $[x,y] \in Df \Leftrightarrow 1-(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1-x$. Tedy $Df = \{[x,y], y \leq 1-x\}$. Zřejmě $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z \geq 0$ přímky $y = 1-x-c^2$. Pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $x = 1 - z^2 - c$, $z \geq 0$. Tyto řezy jsou poloviny parabol. Graf funkce f je na Obrázku 5.



Obrázek 5:

16. Příklad $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2} - y^2$.

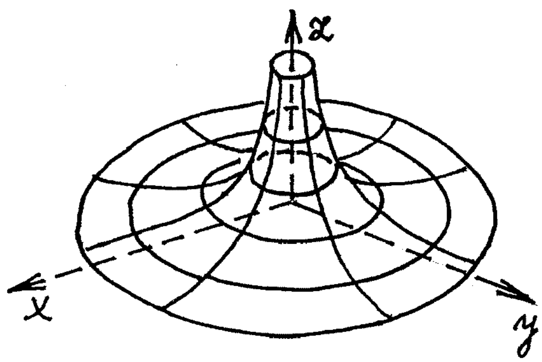
Řešení Pro $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je $Df = R^2$ a $Hf = \langle 0,1\rangle$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny kružnicemi $x^2 + y^2 = \ln\frac{1}{c}$. Pro $z = 1$ je řez bod $[0,0]$ a pro $c \le 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = \mathrm{e}^{-x^2-c^2}$. Jedná se o křivky, jejichž průběh je třeba vyšetřit zvlášť. Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ okolo osy z. Viz Obrázek 6.



Obrázek 6:

17. Příklad $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Řešení Pro $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je $Df = R^2 - \{[0,0]\}$ a $Hf = (0,\infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny kružnicemi $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$. Pro $c \le 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = \frac{1}{x^2+c^2}$. Průběh těchto křivek je zapotřebí vyšetřit zvlášť. Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $y = \frac{1}{x^2}$ okolo osy z. Viz Obrázek 7.

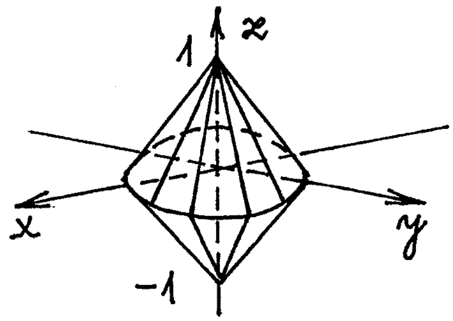


Obrázek 7:

Vyšetřete a v kartézském souřadnicovém systému (O,x,y,z) zakreslete definiční obory následujících funkcí tří proměnných.

18. Příklad $f(x,y,z) = \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z} + \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$

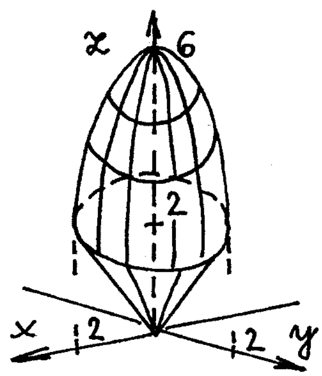
Řešení Pro $f(x,y,z) = \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z} + \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$ platí $[x,y,z] \in Df \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x^2+y^2} - z \ge 0 \wedge 1 - \sqrt{x^2+y^2} + z \ge 0 \Leftrightarrow z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2} \wedge z \ge \sqrt{x^2+y^2} - 1$. $Df = \{[x,y,z] : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} - 1 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$. Definiční obor je těleso ohraničené dvěma kuželovými plochami. Viz Obrázek 8.



Obrázek 8:

19. Příklad $f(x,y,z) = \sqrt{z - \sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{6-(x^2+y^2+z)}$.

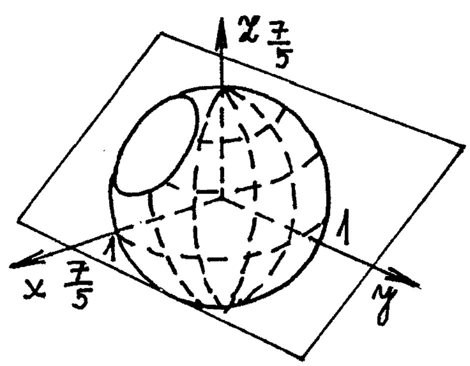
Řešení Pro $f(x,y,z) = \sqrt{z - \sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{6-(x^2+y^2+z)}$ platí $[x,y,z] \in Df \Leftrightarrow z - \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \wedge 6-(x^2+y^2+z) \geq 0 \Leftrightarrow z \leq \sqrt{x^2+y^2} \wedge z \leq 6-(x^2+y^2)$. $Df = \{[x,y,z], -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \ \leq 6-(x^2+y^2)\}$. Definiční obor je těleso ohraničené zhora paraboloidem a zdola kuželovou plochou. Průnik paraboloidu a kuželové plochy je kružnice $x^2+y^2=4$. Viz Obrázek 9.



Obrázek 9:

20. Příklad $f(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)} + \sqrt{7/5-(x+z)}$.

Řešení Pro $f(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)} + \sqrt{7/5-(x+z)}$ platí $[x,y,z] \in Df \Leftrightarrow 1-(x^2+y^2+z^2) \geq 0 \wedge \frac{7}{5}-(x+z) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge z \leq \frac{7}{5}-x$. Definiční obor je koule o poloměru 1 se středem v počátku, ze které je rovinou odříznuta její část. Viz Obrázek 10.



Obrázek 10:

3 Limita a spojitost

21. Příklad Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-2y}{3x+y}$.

Řešení K vyšetření limity použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{x-2y}{3x+y}) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x-2y}{3x+y}) = \lim_{y\to 0} \frac{-2y}{y} = \lim_{x\to 0}(-2) = -2.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

22. Příklad Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y}{x-y}$.

Řešení K vyšetření limity použijeme opět metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y}) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y}) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

23. Příklad Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$.

Řešení Metoda postupných limit selhává. K vyšetření limity použijeme metodu svazku přímek. Platí

$$L^* = \lim_{x\to 0, y=kx} \frac{x^3y}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot kx}{x^4+k^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4(k^4+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{k^4+1} = \frac{k}{k^4+1}.$$

Protože limita L^* závisí na parametru k, z věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f v bodě $[0,0]$ nemá limitu.

24. Příklad Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Řešení Metoda postupných limit i metoda svazku přímek selhává. K vyšetření limity použijeme metodu svazku parabol. Platí

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{k^2+1} = \frac{k}{k^2+1}.$$

Protože limita L^{**} závisí na parametru k, z věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f v bodě $[0,0]$ nemá limitu.

25. Příklad Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení K vyšetření limity použijeme metodu polárních souřadnic. Platí

$$L^{***} = \lim_{\varrho\to 0, x=\varrho\cos\varphi, y=\varrho\sin\varphi} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cos\varphi\varrho\sin\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\varrho\to 0}\cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Protože limita L^{***} závisí na φ, funkce f nemá v bodě $[0,0]$ limitu.

26. Příklad Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Dokažme, že tomu tak je. Použijeme větu, která tvrdí, že limita součinu funkce jejíž limita je nula a ohraničené funkce je rovna rovněž nula. Zřejmě platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} x \cdot \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Přitom $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x = 0$. Ukažme nyní že funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená. Platí

$$\big(|x|-|y|\big)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená.

27. Příklad Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda polárních souřadnic dávají výsledek nula. Metodou svazku parabol ukažme, že limita nula není a tedy zkoumaná funkce je v daném bodě nespojitá.

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^8}{(1+k^4)x^8} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Limita L^{**} závisí na parametru k. Odtud podle věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f je v $[0,0]$ nespojitá.

28. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Řešení Do funkce nelze bezprostředně dosadit. Provedeme proto vhodnou algebraickou úpravu. Výraz rozšíříme.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2+1-1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

29. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

Řešení Provedeme algebraickou úpravu funkce. Rozložíme čitatele i jmenovatele výrazu a provedeme pokrácení.

$$\lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{4+4+4}{4(4+4)} = \frac{3}{8}.$$

30. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Řešení Provedeme algebraickou úpravu funkce. Výraz rozšíříme vhodným zlomkem.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+y^2+4}-2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 3(2+2) = 12.$$

4 Parciální a směrové derivace, gradient

31. Příklad Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkce f.

a) $f(x,y) = (x^2y+y)^4$;

b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + x^y$;

c) $f(x,y,z) = (\frac{y}{z})^x$.

Řešení

a) $f'_x = 4(x^2y+y)^3 \cdot 2xy = 8xy^4(x^2+1)^3$, $f'_y = 4(x^2y+y)^3 \cdot x^2 = 4y^3(x^2+1)^4$.

b) $f'_x = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y} + yx^{y-1}$, $f'_y = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2}) + \ln x \cdot x^y$.

c) $f'_x = (\frac{y}{z})^x \ln(\frac{y}{z})$, $f'_y = \frac{1}{z^x}xy^{x-1} = (\frac{x}{y})(\frac{y}{z})^x$, $f'_z = y^x(-x)z^{-x-1} = -(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^x$.

32. Příklad Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě A.

a) $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, $A = [1,2]$.

b) $f(x,y) = (1+\log_y x)^3$, $A = [\mathrm{e},\mathrm{e}]$.

c) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y} + z^z$, $A = [1,1,2]$.

Řešení

a) $f'_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_x(A) = \frac{1}{\sqrt{5}}$;
$f'_y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(A) = \frac{2}{5+\sqrt{5}}$.

b) Ze základních vztahů pro logaritmické funkce plyne, že $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$. Zadanou funkci f přepíšeme na tvar $f(x,y) = (1+\log_y x)^3 = (1+\frac{\ln x}{\ln y})^3$. Odtud
$f'_x = 3(1+\log_y x)^2\frac{1}{x\ln y}$, $\quad f_x(A) = 3(1+\log_\mathrm{e}\mathrm{e})^2\frac{1}{\mathrm{e}\ln\mathrm{e}} = \frac{12}{\mathrm{e}}$;
$f'_y = 3(1+\log_y x)^2\frac{-\ln x}{y\ln^2 y}$, $\quad f_y(A) = 3(1+\log_\mathrm{e}\mathrm{e})^2\frac{-\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}\ln^2\mathrm{e}} = -\frac{12}{\mathrm{e}}$.

c) $f'_x = \frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^y}}\cdot yx^{y-1}$, $f'_x(A) = \frac{1}{4}$;
$f'_y = \frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^y}}\cdot x^y\ln x$, $f'_y(A) = 0$;
$f'_z = zz^{z-1} + \ln z\cdot z^z = z^z(\ln z+1)$, $f'_z(A) = 4+\ln 16$.

33. Příklad Spočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A.

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2y}\sin x$, $A = [0,0]$;

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$, $A = [3,1]$;

c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}$, $A = [0,0]$.

Řešení

a) $f'_x = \mathrm{e}^{2y}\cos x$, $f'_y = 2\mathrm{e}^{2y}\sin x$,
$f''_{xx} = -\mathrm{e}^{2y}\sin x$, $f''_{xx}(A) = 0$,
$f''_{yy} = 4\mathrm{e}^{2y}\sin x$, $f''_{yy}(A) = 0$,
$f''_{xy} = 2\mathrm{e}^{2y}\cos x$, $f''_{xy}(A) = 2$.

b) $f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x-y}{x+y})^2} \cdot \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \frac{1}{1+(\frac{x-y}{x+y})^2} \cdot \frac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$,
$f''_{xx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xx}(A) = \frac{-6}{100}$,
$f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{yy}(A) = \frac{6}{100}$,
$f''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(A) = \frac{8}{100}$.

c) $f'_x = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot \mathrm{e}^y$, $f'_y = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot x\mathrm{e}^y$,
$f''_{xx} = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot (\mathrm{e}^y)^2$, $f''_{xx}(A) = 1$,
$f''_{yy} = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot (x\mathrm{e}^y)^2 + \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot (x\mathrm{e}^y) = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot x\mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^y+1)$, $f''_{yy}(A) = 0$,
$f''_{xy} = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot x\mathrm{e}^y \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y} \cdot \mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^y+1)$, $f''_{xy}(A) = 1$.

34. Příklad $f(x,y) = x\ln(xy)$. Spočtěte f'''_{xxy}.

Řešení $f(x,y) = x\ln(xy)$, $f'_x = \ln(xy) + x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \ln(xy) + 1$, $f''_{xx} = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$, $f'''_{xxy} = 0$.

35. Příklad $f(x,y) = \ln(1+x+y)$. Spočtěte $\dfrac{\partial^{136}}{\partial^{79}x\partial^{57}y}$.

Řešení Funkce $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ je symetrická vzhledem k proměnným x a y. Odtud plyne, že u smíšených parciálních derivací nazáleží na tom, podle kterých proměnných derivujeme, ale pouze na řádu derivace. Platí tedy, že

$$\frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial^{79}x\partial^{57}y} = \frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial^{136}x}.$$

Pro derivace malých řádů snadno spočteme, že

$$f'_x = \frac{1}{1+x+y}, f''_{xx} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}, f'''_{xxx} = \frac{2}{(1+x+y)^3}, f''''_{xxxx} = \frac{-6}{(1+x+y)^4}, f^{(5)}_{xxxxx} = \frac{24}{(1+x+y)^5}.$$

Z tvaru uvedených derivací se nabízí hypotéza, že

$$\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x+y)^k}.$$

Tuto hypotézu lze dokázat pomocí principu matematické indukce. Speciálně tedy platí

$$\frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial^{79}x\partial^{57}y} = \frac{\partial^{136}f(x,y)}{\partial x^{136}} = \frac{-135!}{(1+x+y)^{136}}.$$

36. Příklad Určete bod, ve kterém je gradient funkce $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ roven vektoru $\left(1, \frac{-16}{9}\right)$.

Řešení Spočítáme gradient funkce $f(x,y) = \ln(x + \frac{1}{y})$. Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f'_x = \frac{1}{x+\frac{1}{y}} = \frac{y}{xy+1}, f'_y = \frac{1}{x+\frac{1}{y}} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{xy^2+y}.$$

Odtud $\mathbf{grad}f = (\frac{y}{xy+1}, \frac{-1}{xy^2+y})$. Gradient funkce f porovnáme se zadaným vektorem $(1, -\frac{16}{9})$. Platí $(\frac{y}{xy+1}, \frac{-1}{xy^2+y}) = (1, -\frac{16}{9})$. Z rovnosti složek vektorů získáme systém rovnic $\frac{y}{xy+1} = 1$, $\frac{-1}{xy^2+y} = -\frac{16}{9}$. Dosazením první rovnice do druhé dostáváme $\frac{1}{y^2} = \frac{16}{9}$. Odtud $y = \pm\frac{3}{4}$. Dopočítáme x. Pro $y = \frac{3}{4}$ je $x = -\frac{1}{3}$, pro $y = -\frac{3}{4}$ je $x = \frac{7}{3}$. Gradient zadané funkce je roven vektoru $(1, -\frac{16}{9})$ v bodech $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}]$.

37. Příklad Určete body, ve kterých se velikost gradientu funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.

Řešení Spočítáme gradient funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$. Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f'_x = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+y^2}, f'_y = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y = 3y\sqrt{x^2+y^2}.$$

Odtud $\mathbf{grad} f = (3x\sqrt{x^2+y^2}, 3y\sqrt{x^2+y^2})$. Pro velikost gradientu funkce f platí

$$|\mathbf{grad} f| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2} = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y(x^2+y^2)} = \sqrt{9(x^2+y^2)^2} = 3(x^2+y^2).$$

Dostáváme rovnici $3(x^2+y^2) = 2$. Velikost gradientu funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ se rovná 2 v bodech ležících na kružnici $x^2+y^2 = \frac{2}{3}$.

38. Příklad Spočtěte derivaci $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $A = [1,1]$ ve směru vektoru $u = (2,1)$.

Řešení Nejprve určíme parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $A = [1,1]$.

$$f'_x = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, f'_x(A) = 1$$

.

$$f'_y = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}, f'_y(A) = -1.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{grad} f(A) = (1,-1)$. Nyní můžeme určit derivaci ve směru. Platí

$$f'_u(A) = \mathbf{grad} f(A) \cdot u = (1,-1)\cdot(2,1) = 2 - 1 = 1.$$

39. Příklad Zjistěte, zda je funkce $f(x,y) = \sqrt{x^3+y}$ v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $u = (-3,1)$ rostoucí.

Řešení Spočítáme derivaci funkce $f(x,y) = \sqrt{x^3+y}$ v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $u = (-3,1)$. Nejprve určíme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě A.

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}, f'_x(A) = \frac{3}{2\sqrt{3}}, f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y}}, f'_y(A) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{grad} f(A) = (\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$. Nyní určíme derivaci ve směru. Platí

$$f'_u(A) = \mathbf{grad} f(A) \cdot u = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\cdot(-3,1) = \frac{-9}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Protože je derivace $f'_u(A)$ záporná, je funkce f v bodě A ve směru u klesající.

40. Příklad Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ v bodě $A = [1,2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě.

Řešení Nejprve určíme parciální derivace funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v bodě $A = [1,2]$.

$$f'_x = \frac{1}{x+y}, f'_x(A) = \frac{1}{3}, f'_y = \frac{1}{x+y}, f'_y(A) = \frac{1}{3}$$

Odtud plyne, že $\mathbf{grad} f(A) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Spočteme rovnici tečny k parabole $x = \frac{1}{4}y^2$. Platí $x - x_0 = = x'(y_0)(y-y_0)$, kde $x_0 = 1, y_0 = 2, x'(2) = 1$. Rovnice tečny je tvaru $x - y + 1 = 0$ a tečna má směrový vektor $v = (1,1)$. Jeho velikost je $\sqrt{2}$. Jednotkový vektor tečny je tedy $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Spočítáme derivaci ve směru.

$$f'_u(A) = \mathbf{grad} f(A) \cdot u = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

5 Diferenciál a Taylorův polynom

41. Příklad Spočtěte diferenciály funkcí f v daném bodě A.

a) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$, $A=[3,2]$.

b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\,\frac{x}{y}$, $A=[2,1]$.

c) $f(x,y,z)=\frac{x-y}{\sqrt{z}}$, $A=[1,2,4]$.

Řešení

a) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $A=[3,2]$. Platí $f'_x=\frac{2x(xy)-(x^2-y^2)y}{x^2y^2}=$ $=\frac{x^2+y^2}{x^2y}$, $f'_x(A)=\frac{13}{18}$, $f'_y(A)=\frac{-2y(xy)-(x^2-y^2)x}{x^2y^2}=-\frac{x^2+y^2}{xy^2}$, $f'_y(A)=-\frac{13}{12}$. Diferenciál je tvaru $\mathrm{d}_hf(A)=f'_x(A)\mathrm{d}x+f'_y(A)\mathrm{d}y$. Dosadíme. Platí $\mathrm{d}_hf(A)=\frac{13}{18}\mathrm{d}x-\frac{13}{12}\mathrm{d}y$.

b) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ v bodě $A=[2,1]$. Platí $f'_x=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y}=$ $=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_x(A)=\frac{1}{5}$, $f'_y(A)=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}$, $f'_y(A)=-\frac{2}{5}$. Diferenciál je tvaru $\mathrm{d}_hf(A)=$ $=f'_x(A)\mathrm{d}x+f'_y(A)\mathrm{d}y$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}_hf(A)=\frac{1}{5}\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\mathrm{d}y$.

c) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y,z)=\frac{x-y}{\sqrt{z}}$ v bodě $A=[1,2,4]$. Platí $f'_x=\frac{1}{\sqrt{z}}$, $f'_x(A)=$ $=\frac{1}{2}$, $f'_y(A)=\frac{-1}{\sqrt{z}}$, $f'_y(A)=-\frac{1}{2}$, $f'_z=-\frac{x-y}{2(\sqrt{z})^3}$, $f'_z(A)=\frac{1}{16}$. Diferenciál je tvaru $\mathrm{d}_hf(A)=f'_x(A)\mathrm{d}x+$ $+f'_y(A)\mathrm{d}y+f'_z(A)dz$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}_hf(A)=\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\frac{1}{16}dz$.

42. Příklad Spočtěte druhé diferenciály následujících funkcí.

a) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y^2}$.

b) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$.

c) $f(x,y)=x\ln\frac{y}{x}$.

Řešení

a) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y^2}$. Platí $f'_x=\mathrm{e}^{x-y^2}$, $f'_y=-2y\mathrm{e}^{x-y^2}$, $f''_{xx}=$ $=\mathrm{e}^{x-y^2}$, $f''_{xy}=-2y\mathrm{e}^{x-y^2}$, $f''_{yy}=\mathrm{e}^{x-y^2}(-2y)(-2y)+\mathrm{e}^{x-y^2}(-2)=(4y^2-2)\mathrm{e}^{x-y^2}$. Druhý diferenciál je tvaru $\mathrm{d}^2_hf=f''_{xx}\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}\mathrm{d}y^2$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}^2_hf=\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}x^2-$ $-4y\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(4y^2-2)\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}y^2$.

b) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$. Platí $f'_x=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $f'_y=\frac{-2x}{(x+y)^2}$, $f''_{xx}=$ $=\frac{-4y}{(x+y)^3}$, $f''_{xy}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $f''_{yy}=\frac{4x}{(x+y)^3}$. Druhý diferenciál je tvaru $\mathrm{d}^2_hf=f''_{xx}\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}\mathrm{d}y^2$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}^2_hf=\frac{-4y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x^2+\frac{4(x-y)}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{4x}{(x+y)^3}\mathrm{d}y^2$.

c) Spočteme druhé parciální derivace $f(x,y)=x\ln\frac{y}{x}$. Platí $f'_x=\ln yx+x\cdot\frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}=\ln\frac{y}{x}-1$, $f'_y=x\cdot\frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{y}$, $f''_{xx}=\frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-1}{x}$, $f''_{xy}=\frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$, $f''_{yy}=\frac{-x}{y^2}$. Druhý diferenciál je tvaru $\mathrm{d}^2_hf=f''_{xx}\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}\mathrm{d}y^2$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}^2_hf=\frac{-1}{x}\mathrm{d}x^2+\frac{2}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y^2$.

43. Příklad Spočtěte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v daném v bodě A.

a) $f(x,y)=x^4+2x^2y-xy+x$, $A=[1,0]$.

b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $A=[2,1]$.

Řešení

a) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)=x^4+2x^2y-xy+x$ v bodě $A=[1,0]$.

Platí $f'_x=4x^3+$
$+4xy-y+1, f'_x(A)=5, f'_y(A)=2x^2-x, f'_y(A)=1$.

Dopočítáme z-ovou souřadnici $z_0=f(A)=2$.

Rovnice tečné roviny má tvar $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$, kde $A=[x_0,y_0]$.

Provedeme dosazení. Platí $z-2=5(x-1)+1(y-0)$. Odtud plyne $5x+y-z-3=0$. Nyní nalezneme rovnici normály. Její obecná rovnice je tvaru $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

Po dosazení dostáváme $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$. Úlohu o nalezení normály lze řešit také tak, že z rovnice tečné roviny $5x+y-z-3=0$ napíšeme normálový vektor $n=(5,1,-1)$. Pak vektorová rovnice normály v bodě $[1,0,2]$ je tvaru $[x,y,z]=[1,0,2]+t(5,1,-1), t\in R$. Tedyparametrické rovnice jsou $x=1+5t, y=t, z=2-t$. Vyloučením parametru t a porovnáním dostáváme opět vztah $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

b) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ v bodě $A=[2,1]$.

Platí $f'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}, f'_x(A)=\frac{4}{5}, f'_y(A)=\frac{2y}{x^2+y^2}, f'_y(A)=\frac{2}{5}$.

Dopočítáme z-ovou souřadnici $z_0=f(A)=\ln 5$. Provedeme dosazení do rovnice tečné roviny. Platí $z-\ln 5=\frac{4}{5}(x-2)+\frac{2}{5}(y-1)$. Odtud plyne $4x+2y=5z-5(2-\ln 5)=0$. Nyní nalezneme rovnici normály. Platí $\frac{5(x-2)}{4}=\frac{5(y-1)}{2}=\frac{z-\ln 5}{-1}$.

44. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_1(x,y)$ funkce $f(x,y)=\ln(7x-3y)$ v bodě $A=[1,2]$.

Řešení Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y)=\ln(7x-3y)$ v bodě $A=[1,2]$.
Platí $f'_x=\frac{7}{7x-3y}, f'_x(A)=7, f'_y=\frac{-3}{7x-3y}, f'_y(A)=-3$.
Dále $\mathrm{d}x=x-1$ a $\mathrm{d}y=y-2$.

Diferenciál funkce f v bodě A je tvaru $\mathrm{d}_hf(A)=f'_x(A)\mathrm{d}x+f'_y(A)\mathrm{d}y=7\mathrm{d}x-3\mathrm{d}y=7(x-1)-3(y-2)=$ $=7x-3y-1$. Provedeme dosazení do vzorce pro Taylorův polynom $T_1(x,y)=f(A)+\frac{1}{1!}\mathrm{d}_hf(A)$. Platí $f(A)=\ln 1=0$. Odtud $T_1(x,y)=7x-3y-1$.

45. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_1(x,y)$ funkce $f(x,y)=\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin 2y}$ v bodě $A=[0,0]$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}+\sin 1}$.

Řešení Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)=\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin 2y}$ v bodě $A=[0,0]$.
Platí $f'_x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin 2y}}, f'_x(A)=\frac{1}{2}, f'_y=\frac{1}{2}\frac{2\cos 2y}{\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin 2y}}, f'_y(A)=1$.
Dále $\mathrm{d}x=x$ a $\mathrm{d}y=y$.

Diferenciál funkce f v bodě A má tvar $\mathrm{d}_hf(A)=f'_x(A)\mathrm{d}x+f'_y(A)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\frac{x}{2}+y$. Dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom $T_1(x,y)=f(A)+\frac{1}{1!}\mathrm{d}_hf(A)$. Platí $f(A)=\sqrt{\mathrm{e}^0+\sin 0}=1$. Odtud $T_1(x,y)=1+\frac{x}{2}+y$.

Nyní zřejmě $\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}+\sin 1}=f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\approx T_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{7}{4}$.

46. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x,y)$ funkce $f(x,y)=x^y$ v bodě $A=[1,1]$.

Řešení Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y)=x^y$ v bodě $A=[1,1]$.
Platí $f'_x=yx^{y-1}, f'_x(A)=1, f'_y=\ln x\cdot x^y, f'_y(A)=0$;
$f''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}, f''_{xx}(A)=0, f''_{xy}=x^{y-1}+y\ln x\cdot x^{y-1}, f''_{xy}(A)=1, f''_{yy}=(\ln x)^2x^y, f''_{yy}(A)=0$.
Dále $\mathrm{d}x=x-1$ a $\mathrm{d}y=y-1$.

Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_hf(A)=f'_x(A)\mathrm{d}x+$ $+f'_y(A)\mathrm{d}y=x-1$, $\mathrm{d}^2_hf(A)=f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2=2(x-1)(y-1)$. Diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_2(x,y)=f(A)+\frac{1}{1!}\mathrm{d}_hf(A)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_hf(A)$ a upravíme. Platí $T_2(x,y)=xy-y+1$.

47. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A = [3,4]$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{(2.98)^2 + (4.05)^2}$.

Řešení Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A = [3,4]$.
$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_x(A) = \frac{3}{5}$, $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(A) = \frac{4}{5}$, $f''_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $f''_{xx}(A) = \frac{16}{125}$, $f''_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $f''_{xy}(A) = -\frac{12}{125}$, $f''_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $f''_{yy}(A) = \frac{9}{125}$. Dále platí $\mathrm{d}x = x-3$ a $\mathrm{d}y = y-4$. Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = \frac{16}{125}(x-3)^2 - \frac{24}{125}(x-3)(x-4) + \frac{9}{125}(y-4)^2$. Diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_2(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A)$. Dostáváme $T_2(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{16}{250}(x-3)^2 - \frac{24}{250}(x-3)(x-4) + \frac{9}{250}(y-4)^2$. Dále $\sqrt{2.98^2 + 4.05^2} \approx T_2(2.98, 4.05) = 5 + 0.028 + 0.0002116 = 5.0282116$. Hodnota z kalkulačky je přibližně 5.028210417.

48. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$. v bodě $A = [1,-1]$.

Řešení Parciální derivace funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ potřebné k určení diferenciálů nalezneme snadno. Platí $f = f'_x = f'_y = f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yy} = f'''_{xxx} = f'''_{xxy} = f'''_{xyy} = f'''_{yyy} = \mathrm{e}^{x+y}$. $f(A) = f'_x(A) = f'_y(A) = f''_{xx}(A) = f''_{xy}(A) = f''_{yy}(A) = f'''_{xxx}(A) = f'''_{xxy}(A) = f'''_{xyy}(A) = f'''_{yyy}(A) = 1$.
Dále platí $\mathrm{d}x = x-1$ a $\mathrm{d}y = y+1$.

Diferenciály mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = (x-1) + (y+1)$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2$, $d^3_h f(A) = f'''_{xxx}(A)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(A)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xyy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(A)\mathrm{d}y^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3$.

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3_h f(A)$. Odtud $T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x+1) + \frac{1}{2}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2] + \frac{1}{6}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3]$.

49. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$.

Řešení Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$.
$f'_x = \cos x \cos y$, $f'_x(A) = 1$, $f'_y = -\sin x \sin y$, $f'_y(A) = 0$, $f''_{xx} = -\sin x \cos y$;
$f''_{xx}(A) = 0$, $f''_{xy} = -\cos x \sin y$, $f''_{xy}(A) = 0$, $f''_{yy} = -\sin x \cos y$, $f''_{yy}(A) = 0$;
$f'''_{xxx} = -\cos x \cos y$, $f'''_{xxx}(A) = -1$, $f'''_{xxy} = \sin x \sin y$, $f'''_{xxy}(A) = 0$, $f'''_{xyy} = -\cos x \cos y$, $f'''_{xyy}(A) = -1$, $f'''_{yyy} = \sin x \sin y$, $f'''_{yyy}(A) = 0$.
Dále platí $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y$.

Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = 1\cdot x + 0\cdot y = x$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = 0\cdot x^2 + 0\cdot xy + 0\cdot y^2 = 0$, $\mathrm{d}^3_h f(A) = f'''_{xxx}(A)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(A)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xyy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(A)\mathrm{d}y^3 = -1\cdot x^3 + 3\cdot 0\cdot x^2y + 3(-1)xy^2 + 0\cdot y^3 = -x^3 - 3xy^2$.

Dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3_h f(A)$.

Platí $T_3(x,y) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2$.

50. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ v bodě $A = [0,0]$.

Řešení Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ v bodě $A = [0,0]$.
$f'_x = \mathrm{e}^x \sin y$, $f'_x(A) = 0$, $f'_y = \mathrm{e}^x \cos y$, $f'_y(A) = 1$;
$f''_{xx} = \mathrm{e}^x \sin y$, $f''_{xx}(A) = 0$, $f''_{xy} = \mathrm{e}^x \cos y$, $f''_{xy}(A) = 1$, $f''_{yy} = -\mathrm{e}^x \sin y$, $f''_{yy}(A) = 0$;
$f'''_{xxx} = \mathrm{e}^x \sin y$, $f'''_{xxx}(A) = 0$, $f'''_{xxy} = \mathrm{e}^x \cos y$, $f'''_{xxy}(A) = 1$, $f'''_{xyy} = -\mathrm{e}^x \sin y$, $f'''_{xyy}(A) = 0$, $f'''_{yyy} = -\mathrm{e}^x \cos y$, $f'''_{yyy}(A) = -1$.
Dále platí $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y$.

Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = 0\cdot x + 1\cdot y = y$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = 0\cdot x^2 + 2\cdot 1\cdot xy + 0\cdot y^2 = 2xy$, $\mathrm{d}^3_h f(A) = f'''_{xxx}(A)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(A)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xyy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(A)\mathrm{d}y^3 = 0\cdot x^3 + 3\cdot 1\cdot x^2y + 3\cdot 0\cdot xy^2 + (-1)\cdot y^3 = 3x^2y - y^3$.

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3_h f(A)$.

Platí $T_3(x,y) = y + \frac{1}{2}(2xy) + \frac{1}{6}(3x^2y - y^3) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$.

6 Lokální extrémy

Vyšetřete lokální extrémy následujících funkcí více proměnných:

51. Příklad $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y.$

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x + 2y + 5 = 0, \\ f'_y &= 2x + 6y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je lineární, můžeme tedy použít metod lineární algebry.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{13}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right).$$

Nalezli jsme stacionární bod $a = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 2, f''_{yy} = 6.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium (viz učební text).
Platí $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = 8 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$ lokální minimum funkce f.

52. Příklad $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y.$

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= 2y - 6x + 1 = 0, \\ f'_y &= 2x - 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava má jediné řešení $a = \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = -6, f''_{xy} = 2, f''_{yy} = \ = -4.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a) = -6 < 0$ a $D_2(a) = 20 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ lokální maximum funkce f.

53. Příklad $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ f'_y &= 2xy + 2y = 0. \end{aligned}$$

Jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je nelineární. Ze druhé rovnice plyne $2y(x+1)=0$. Odtud $x=-1 \vee y=0$. Dosazením $x=-1$ do první rovnice dostáváme $6+y^2-10=0$, odkud $y=\pm 2$. Dále dosazením $y=0$ dostáváme $6x^2+10x=0$, odkud $x=0 \vee x=-\frac{5}{3}$. Soustava má čtyři řešení. Nalezli jsme čtyři stacionární body $a_1=[0,0], a_2=[-\frac{5}{3},0], a_3=[-1,2], a_4=[-1,-2]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_i), i=1,2,3,4$. Platí

$$f''_{xx}=12x+10, f''_{xy}=2y, f''_{yy}=2x+2.$$

Odtud plyne, že

$$f''=\begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1)=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2)=\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad f''(a_3)=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(a_4)=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic $f''(a_i)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1)=10>0$, $D_2(a_1)=20>0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální minimum funkce f.
Dále $D_1(a_2)=-10<0$, $D_2(a_2)=\frac{40}{3}>0$. V bodě a_2 nastává lokální maximum funkce f.
Dále platí $D_1(a_3)=-2<0$, $D_2(a_3)=-16<0$ a $D_1(a_4)=-2<0$, $D_2(a_4)=-12<0$.
Podle kritéria nenastává v bodě a_3 ani v bodě a_4 lokální extrém funkce f.

54. Příklad $f(x,y)=x^3+xy^2-2xy-5x$.

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x=3x^2+y^2-2y-5=0,$$
$$f'_y=2xy-2x=0.$$

Nalezneme stacionární body. Soustava je nelineární. Ze druhé rovnice plyne $x(y-1)=0$. Odtud $x=0 \vee y=1$. Dosazením $x=0$ do první rovnice dostáváme $y^2-2y-5=0$, odkud $y=1\pm\sqrt{6}$. Dále dosazením $y=1$ dostáváme $3x^2-6=0$, odkud $x=\pm\sqrt{2}$. Soustava má čtyři řešení. Nalezli jsme čtyři stacionární body $a_1=[\sqrt{2},1], a_2=[-\sqrt{2},1], a_3=[0,1+\sqrt{6}], a_4=[0,1-\sqrt{6}]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_i), i=1,2,3,4$. Platí

$$f''_{xx}=6x, f''_{xy}=2y-2, f''_{yy}=2x.$$

Odtud plyne, že

$$f''=\begin{pmatrix} 6x & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1)=\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad f''(a_2)=\begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$
$$f''(a_3)=\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f''(a_4)=\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic $f''(a_i)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1)=6\sqrt{2}>0$, $D_2(a_1)=24>0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální minimum funkce f.
Dále $D_1(a_2)=-6\sqrt{2}<0$, $D_2(a_2)=24>0$. V bodě a_2 nastává lokální maximum funkce f.
Dále platí $D_1(a_3)=0$, $D_2(a_3)=-24<0$ a $D_1(a_4)=0$, $D_2(a_4)=-24<0$.
Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodech a_3, a_4 dochází k lokálním extrémům funkce f.

Vyšetříme nejprve podrobně okolí bodu a_3. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $y=1+\sqrt{6}$. Zřejmě platí $f\left(x,1+\sqrt{6}\right)=x^3+\left(1+\sqrt{6}\right)^2x-2x\left(1+\sqrt{6}\right)-5x=x^3$. Je-li $x>0$, pak $f\left(x,1+\sqrt{6}\right)>0$, Je-li $x<0$, pak $f\left(x,1+\sqrt{6}\right)<0$. Odtud plyne, že v bodě a_3 není lokální extrém. Podobně postupujeme v případě bodu a_4. Volme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $y=1-\sqrt{6}$. Zřejmě platí $f\left(x,1-\sqrt{6}\right)=x^3+\left(1-\sqrt{6}\right)^2x-2x\left(1-\sqrt{6}\right)-5x=x^3$. Je-li $x>0$, pak $f\left(x,1-\sqrt{6}\right)>0$, Je-li $x<0$, pak $f\left(x,1-\sqrt{6}\right)<0$. Odtud plyne, že ani v bodě a_4 není lokální extrém.

55. Příklad $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$.

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x = 6x^2 - 3y = 0,$$
$$f'_y = -3x + 6y^2 = 0.$$

Nalezneme stacionární body. Soustava je nelineární. Z první rovnice plyne $y = 2x^2$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $6(2x^2)^2 - 3x = 0$, odkud $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$. Soustava má dvě řešení. Nalezli jsme dva stacionární body $a_1 = [0,0], a_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí

$$f''_{xx} = 12x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 12y.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 0$, $D_2(a_1) = -9$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodě a_1 nastává extrém funkce f. Dále $D_1(a_2) = 6 > 0$, $D_2(a_2) = 27 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

Nyní vyšetříme podrobně okolí bodu a_1. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s osou x, tj. přímkou $y = 0$. Zřejmě platí $f(x,0) = 2x^3 + 1$. Je-li $x > 0$, pak $f(x,0) > 1 = f(a_1)$. Je-li $x < 0$, pak $f(x,0) < 1 = f(a_1)$. Odtud plyne, že v bodě a_1 není lokální extrém.

56. Příklad $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

Řešení Sestavíme soustavu rovnic

$$f'_x = 3x^2 - 3z = 0,$$
$$f'_y = 2y - 2 = 0,$$
$$f'_z = z - 3x + 2 = 0.$$

Ze druhé rovnice plyne $y = 1$. Ze třetí plyne $z = 3x - 2$. Dosazením do první rovnice dostáváme $3x^2 - 3(3x - 2) = 0$, odkud $x = 1 \vee x = 2$. Soustava má dvě řešení $a_1 = [1,1,1], a_2 = [2,1,4]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí

$$f''_{xx} = 6x, f''_{yy} = 2, f''_{zz} = 1, f''_{xy} = 0, f''_{xz} = -3, f''_{yz} = 0.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 6 > 0$, $D_2(a_1) = 12 > 0$, $D_3(a_1) = -6 < 0$. Podle kritéria nenastává v bodě a_1 lokální extrém funkce f.
Dále $D_1(a_2) = 12 > 0$, $D_2(a_2) = 24 > 0$, $D_3(a_2) = 6 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

57. Příklad $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + 12y = 0,\\ f'_y &= 2y + 12x = 0,\\ f'_z &= 2z + 2 = 0. \end{aligned}$$

Z třetí rovnice plyne $z = -1$. Ze druhé plyne $y = -6x$. Dosazením do první rovnice dostáváme $x^2 - 24x = = 0$, odkud $x = 0 \vee x = 24$. Soustava má dvě řešení $a_1 = [0,0,-1], a_2 = [24,-144,-1]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{zz} = 2, \quad f''_{xy} = 12, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = 0.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 0$, $D_2(a_1) = -144 < 0$, $D_3(a_1) = -288 < 0$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodě a_1 nastává lokální extrém funkce f.
Dále $D_1(a_2) = 144 > 0$, $D_2(a_2) = 288 > 0$, $D_3(a_2) = 288 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

Nyní vyšetříme podrobně okolí bodu a_1. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $x = x, y = 0, z = -1$. Zřejmě platí $f(x,0,-1) = x^3 - 1$. Je-li $x > 0$, pak $f(x,0,-1) > -1 = f(a_1)$, Je-li $x < 0$, pak $f(x,0,-1) < -1 = f(a_1)$. Odtud plyne, že v bodě a_1 není lokální extrém.

58. Příklad $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$

Řešení Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\left(x+y^2\right) + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{2} + 1\right) = 0,\\ f'_y &= 2y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = 0$. Dosazením do první rovnice dostáváme $\frac{x}{2} + 1 = 0$. Odtud $x = -2$. Soustava má jediné řešení $a = [-2, 0]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice f'' a $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 4\right), f''_{xy} = y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, f''_{yy} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2+4\right) & y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},\\ y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mathrm{e}} & 0\\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice.

Platí $D_1(a) = \frac{1}{2e} > 0$, $D_2(a) = \frac{1}{\mathrm{e}^2} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.

59. Příklad $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \frac{2x(1-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} = 0,\\
f'_y &= \frac{2y(1-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} = 0.
\end{aligned}
$$

Nalezneme stacionární body. Z první rovnice plyne $x = 0 \vee x^2+y^2 = 1$ a ze druhé rovnice plyne $y = 0 \vee x^2+y^2 = 1$. Nalezli jsme stacionární bod $a = [0,0]$ a body b na kružnici $x^2+y^2 = 1$.

Spočteme druhé parciální derivace a matice f'' a $f''(a)$. Platí

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2x^2)-4x^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}},\\
f''_{xy} &= \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}},\\
f''_{yy} &= \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2y^2)-4y^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne, že

$$
f'' = \begin{pmatrix} \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2x^2)-4x^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} & \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} \\ \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} & \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2y^2)-4y^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} \end{pmatrix},
$$

$$
f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(b) = \begin{pmatrix} -\frac{4x^2}{\mathrm{e}} & -\frac{4xy}{\mathrm{e}} \\ -\frac{4xy}{\mathrm{e}} & -\frac{4y^2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.
$$

Určíme hlavní minory matic.
Platí $D_1(a) = 2 > 0$, $D_2(a) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.
$D_1(b) = -\frac{4x^2}{\mathrm{e}} > 0$, $D_2(b) = 0$. Podle kritéria nelze rozhodnout. Platí však $f(b) = \frac{1}{\mathrm{e}} \geq \frac{c}{\mathrm{e}^c}$ pro libovolné $c \geq 0$. Odtud plyne, že na $x^2+y^2 = 1$ nastává neostré maximum f.

60. Příklad $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$.

Řešení Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \mathrm{e}^{2x}(2y^2+2x+4y+1) = 0,\\
f'_y &= 2\mathrm{e}^{2x}(y+1) = 0.
\end{aligned}
$$

Nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = -1$. Dosazením do první rovnice dostáváme $x = \frac{1}{2}$. Soustava má jediné řešení $a = \left[\frac{1}{2}, -1\right]$. Spočteme druhé parciální derivace a matice f'' a $f''(a)$. Platí

$$
f''_{xx} = 4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1), f''_{xy} = 4\mathrm{e}^{2x}(y+1), f''_{yy} = 2\mathrm{e}^{2x}.
$$

Odtud plyne, že

$$
f'' = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1) & 4\mathrm{e}^{2x}(y+1) \\ 4\mathrm{e}^{2x}(y+1) & 2\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e} \end{pmatrix}.
$$

Určíme hlavní minory matice.
Platí $D_1(a) = 2\mathrm{e} > 0$, $D_2(a) = 4\mathrm{e}^2 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.

7 Vázané a globální extrémy

61. Příklad Vyšetřete vázané extrémy funkce $f(x,y) = xy - x + y - 1$ s vazbou $x + y = 1$.

Řešení Uveďme dva způsoby řešení této úlohy:

a) Z vazby $x + y = 1$ lze jednoznačně vyjádřit y. Platí $y = 1 - x$. Dosadíme tento vztah do zadané funkce $f(x,y) = xy - x + y - 1$. Tím vznikne funkce

$$F(x) = f(x, 1-x) = -x^2 - x.$$

Zadanou úlohu jsme tak převedli na ekvivalentní úlohu o nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = -x^2 - x$. Platí $F'(x) = -2x - 1$. Derivaci položíme rovnu nule a nalezneme stacionární bod $x = -\frac{1}{2}$. Protože $F''(x) = -2$ má F v bodě $x = -\frac{1}{2}$ lokální maximum. Dopočítáme $y = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. Odtud plyne, že f má v bodě $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ vázané lokální maximum. Hodnota maxima je $\frac{1}{4}$.

b) Úlohu řešme nyní pomocí Lagrangeovy funkce. Platí

$$L(x,y) = xy - x + y - 1 + \lambda(x + y - 1).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí

$$\begin{aligned} L'_x &= y - 1 + \lambda = 0, \\ L'_y &= x + 1 + \lambda = 0, \\ x + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme λ. Platí $\lambda = 1 - y, \lambda = -1 - x$. Odtud $x - y + 2 = 0$. Ze třetí rovnice dosadíme za $y = 1 - x$ a snadno dostáváme jediný stacionární bod $a = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Spočteme druhé derivace Lagrangeovy funkce. Platí $L''_{xx} = 0, L''_{xy} = 1, L''_{yy} = 0$. Odtud plyne

$$L'' = L''(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice.

Platí $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = -1$. Podle kritéria nelze rozhodnout. Vyšetříme podrobně okolí bodu a. Zřejmě pro $\lambda = -\frac{1}{2}$ je $L\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Nechť (u,v) je libovolný (tzv. přírůstkový vektor). Spočteme $L\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] + (u,v)\right) = uv + \frac{1}{4}$. Je zřejmé, že výraz $uv + \frac{1}{4}$ může nabývat hodnot větších než $\frac{1}{4}$ i menších než $\frac{1}{4}$. Odtud plyne, že Lagrangeova funkce L nemá ve zkoumaném bodě lokální extrém. O existenci vázaného extrému nelze z této informace nic usuzovat.

62. Příklad Vyšetřete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ s vazbou $x^2 + y^2 = 288$.

Řešení Sestavíme Lagrangeovu funkci. Platí

$$L(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 288).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí

$$\begin{aligned} L'_x &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y &= 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 &= 288. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic plyne $x = y$ a $\lambda = -\frac{1}{2x}$. Dosazením do vazby dostáváme $x = \pm 12$. Nalezli jsme dva stacionární body Lagrangeovy funkce $a_1 = [12, 12]$ pro $\lambda = -\frac{1}{24}$ a $a_2 = [-12, -12]$ pro $\lambda = \frac{1}{24}$. Spočteme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí $L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$. Odtud plyne

$$L'' = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad L''(a_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}, \quad L''(a_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic.

Platí $D_1(a_1) = -\frac{1}{12} < 0$, $D_2(a_1) = \frac{1}{144} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální maximum funkce L a tedy vázané maximum funkce f.

Dále $D_1(a_2) = \frac{1}{12} > 0$, $D_2(a_2) = \frac{1}{144} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a_2 lokální minimum funkce L a tedy vázané minimum funkce f.

63. Příklad Vyšetřete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(xy)$ s vazbou $x^2 + y^2 = 2$.

Řešení Sestavíme Lagrangeovu funkci. Platí

$$L(x, y) = \ln(xy) + \lambda(x^2 + y^2 - 2).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí

$$\begin{aligned} L'_x &= \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0, \\ L'_y &= \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic plyne $\lambda = -\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2y^2}$. Odtud $x^2 = y^2$ Dosazením do vazby dostáváme $x = \pm 1$. Nalezli jsme čtyři řešení soustavy rovnic $a_1 = [-1, -1], a_2 = [1, 1], a_3 = [-1, 1], a_4 = [1, -1]$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}$. Pozor! Body $a_3, a_4 \notin DL = Df$. V dalším vyšetřování se tedy stačí omezit pouze na body a_1, a_2. Spočteme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí $L''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2\lambda, L''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + 2\lambda, L''_{xy} = 0$. Odtud plyne

$$L'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} + 2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} + 2\lambda \end{pmatrix}, \quad L''(a_1) = L''(a_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a_1) = D_1(a_2) = -2 < 0$, $D_2(a_1) = D_2(a_2) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodech a_1, a_2 lokální maximum funkce L a tedy vázané maximum funkce f.

64. Příklad Vyšetřete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 6x + 6y$ s vazbou $x^3 + y^3 = 16$.

Řešení Sestavíme Lagrangeovu funkci. Platí

$$L(x, y) = 6x + 6y + \lambda(x^3 + y^3 - 16).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí

$$\begin{aligned} L'_x &= 6 + 3\lambda x^2 = 0, \\ L'_y &= 6 + 3\lambda y^2 = 0, \\ x^3 + y^3 &= 16. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic plyne $\lambda = -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{y^2}$. Odtud $x^2 = y^2$ a $y = \pm x$. Dosazením $y = x$ do vazby dostáváme $2x^3 = 16$ a tedy $x = 2$. Nalezli jsme stacionární bod $a = [2, 2]$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}$. Dosazení $y = -x$ vede k rovnosti $-16 = 0$. Bod a je jediné řešení soustavy. Spočteme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí $L''_{xx} = 6\lambda x, L''_{yy} = 6\lambda y, L''_{xy} = 0$. Odtud plyne

$$L'' = \begin{pmatrix} 6\lambda x & 0 \\ 0 & 6\lambda y \end{pmatrix}, \quad L''(a) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = -6 < 0$, $D_2(a) = 36 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální maximum funkce L a tedy vázané maximum funkce f.

65. Příklad Určete rozměry pravoúhlé nádrže tvaru kvádru o objemu $V = 32\text{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly co nejmenší povrch.

Řešení Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme minimalizovat povrch nádrže $P(x, y, z)$, je-li předepsán její objem $V(x, y, z) = 32\text{m}^3$. Máme tedy nalézt vázané minimum funkce $P(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ s vazbou $V(x, y, z) = xyz = 32$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = \frac{32}{xy}$. Úlohu na vázaný extrém funkce P převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(x, y) = P\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}.$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí

$$\begin{aligned} f'_x &= y + \frac{-64}{x^2} = 0, \\ f'_y &= x + \frac{-64}{y^2} = 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne $y = \frac{64}{x^2}$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $x - \frac{x^4}{64} = 0$. Odtud $x = 0 \vee x = 4$. Zřejmě $x = 0$ nevyhovuje zadání úlohy.

Nalezli jsme jediný stacionární bod $a = [4, 4]$. Dopočítáme $z = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{128}{x^3}, f''_{yy} = \frac{128}{y^3}, f''_{xy} = 1$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = 2 > 0$, $D_2(a) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [4, 4]$ lokální minimum funkce f a tedy v bodě $[4, 4, 2]$ vázané minimum funkce P. Rozměry nádrže jsou $4\text{m} \times 4\text{m} \times 2\text{m}$.

66. Příklad Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96cm a jeho objem byl co největší.

Řešení Označme x, y, z rozměry kvádru. Podle zadání máme maximalizovat objem $V(x, y, z)$, je-li předepsáno, že $4x + 4y + 4z = 96$, tj. že součet délek hran kvádru je 96cm. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $4x + 4y + 4z = 96$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = 24 - x - y$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(x, y) = V(x, y, 24 - x - y) = xy(24 - x - y).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí

$$\begin{aligned} f'_x &= y(24 - x - y) - xy = 0, \\ f'_y &= x(24 - x - y) - xy = 0. \end{aligned}$$

Triviální řešení, kdy $x = 0 \vee y = 0$ nebudeme uvažovat. Soustavu lze tak převést na tvar

$$\begin{aligned} 2x + y &= 24, \\ x + 2y &= 24. \end{aligned}$$

Snadno nalezneme jediné řešení $a = [8, 8]$. Dopočítáme $z = 24 - 8 - 8 = 8$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = -2y, f''_{yy} = -2x, f''_{xy} = 24 - 2x - 2y$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 24 - 2x - 2y \\ 24 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = -16 < 0$, $D_2(a) = 192 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [8, 8]$ lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[8, 8, 8]$ vázané maximum funkce V. Rozměry kvádru jsou 8cm × 8cm × 8cm.

67. Příklad Určete rozměry otevřené nádrže tvaru kvádru tak, aby při daném povrchu $P = 108\mathrm{m}^2$ měla co největší objem.

Řešení Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme maximalizovat objem nádrže $V(x, y, z)$, je-li předepsáno, že $xy + 2yz + 2xz = 108$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $xy + 2yz + 2xz = 108$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = \frac{108-xy}{2(x+y)}$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(x, y) = V\left(x, y, \frac{108 - xy}{2(x + y)}\right) = \frac{xy(108 - xy)}{2(x + y)}.$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí

$$f'_x = \frac{-y^2(x^2 + 2xy - 108)}{2(x + y)^2} = 0,$$
$$f'_y = \frac{-x^2(y^2 + 2xy - 108)}{2(x + y)^2} = 0.$$

Triviální řešení, kdy $x = 0 \vee y = 0$ nebudeme uvažovat. Soustavu lze tak převést na tvar

$$x^2 + 2xy = 108,$$
$$y^2 + 2xy = 108.$$

Odtud plyne, že $x = y$ a $3x^2 = 108$. Tedy $x = 6$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $a = [6, 6]$. Dopočítáme $z = \frac{108-36}{2\cdot 12} = 3$. Spočteme matice f'', $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{-y^4-108y^2}{(x+y)^3}$, $f''_{yy} = \frac{-x^4-108x^2}{(x+y)^3}$, $f''_{xy} =$ $= \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3}$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{-y^4-108y^2}{(x+y)^3} & \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3} \\ \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3} & \frac{-x^4-108x^2}{(x+y)^3} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = -3 < 0$, $D_2(a) = \frac{27}{4} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [6, 6]$ lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[6, 6, 3]$ vázané maximum funkce V. Rozměry nádrže jsou 6m × 6m × 3m.

68. Příklad Určete rozměry válce o největším objemu, jestliže jeho povrch je $6\pi\mathrm{dm}^2$.

Řešení Označme r, v poloměr a výšku válce. Podle zadání máme maximalizovat jeho objem $V(r, v)$, je-li předepsáno, že povrch válce je $P(r, v) = 6\pi\mathrm{dm}^2$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(r, v) = \pi r^2 v$ s vazbou $P(r, v) = 2\pi rv + 2\pi r^2 = 6\pi$. Po úpravě má vazba tvar $rv + r^2 = 3$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k v. Platí $v = \frac{3-r^2}{r}$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(r) = V\left(r, \frac{3 - r^2}{r}\right) = \pi r(3 - r^2).$$

Spočteme

$$f'(r) = \pi(3 - r^2) - 2\pi r^2 = 3\pi - 3\pi r^2.$$

Derivaci položíme rovnu nule a získáme rovnici $3 - 3r^2 = 0$. Odtud plyne $r = \pm 1$. Zřejmě řešení $r = -1$ nevyhovuje. Jediný stacionární bod je $r = 1$. Z vazby dopočítáme $v = 2$. Spočteme $f''(r) = -6\pi r$ a $f''(1) = -6\pi < 0$. Odtud plyne, že v bodě $r = 1$ nastává lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[1, 2]$ vázané maximum funkce V. Rozměry válce jsou $r = 1\mathrm{dm}$, $v = 2\mathrm{dm}$.

69. Příklad $f(x,y)=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ na množině Ω ohraničené křivkami $y=x^2$ a $y=4$.

Řešení Nejprve nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y)=2x^3+4x^2+y^2-2xy$. Spočteme parciální derivace

$$\begin{aligned} f'_x &= 6x^2+8x-2y=0,\\ f'_y &= 2y-2x=0 \end{aligned}$$

a nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y=x$. Po dosazení do první rovnice dostáváme $x(x+1)=0$. Odtud plyne $a_1=[0,0], a_2=[-1,-1]$. Přitom $a_1\in h(\Omega)$ a $a_2\notin\Omega$. Funkce f tedy nemá uvnitř Ω lokální extrém.

Hranice množiny Ω je tvořena dvěma křivkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení dvou úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1: y=4$, $V_2: y=x^2$. Je zapotřebí zvlášť vyšetřit body $A=[-2,4], B=[2,4]$, které jsou průniky vazeb V_1 a V_2. Úlohy f,V_1 a f,V_2 převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí jedné proměnné.

Úloha f,V_1 je ekvivalentní úloze nalézt lokální extrémy funkce

$$F_1(x)=f(x,4)=2x^3+4x^2-8x+16.$$

Platí $F'_1(x)=6x^2+8x-8=6(x+2)(x-\frac{2}{3})$. Stacionární body jsou $x=-2$ a $x=\frac{2}{3}$. Dále $F''_1(x)=12x+8$. Odtud $F''_1(-2)=-16$. Tedy v $x=-2$ je maximum funkce F_1 a v $A=[-2,4]$ vázané maximum f. Podobně spočteme, že v bodě $a=\left[\frac{2}{3},4\right]$ dochází k vázanému minimu f.

Úloha f,V_2 je ekvivalentní úloze nalézt lokální extrémy funkce

$$F_2(x)=f(x,x^2)=x^4+4x^2.$$

Snadno se zjistí, že úloha f,V_2 má vázané minimum v bodě $b=[0,0]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a)=\frac{352}{27}, f(b)=0, f(A)=32, f(B)=16$. Odtud $M=\left\{0,\frac{352}{27},16,32\right\}$. Tedy $\max f(\Omega)=\max M=32$ a nastává v bodě A a $\min f(\Omega)=\min M=0$ a nastává v bodě b.

70. Příklad $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+1$ na množině $\Omega: A=[0,0], B=[3,0], C=[0,5]$.

Řešení Nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+1$. Spočteme parciální derivace $f'_x=2x-2$ a $f_y=2y-4$ a nalezneme stacionární bod $a=[1,2]$. Matice druhé derivace je rovna $f''=f''(a)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě a nastává lokální minimum funkce f. Platí $f(a)=-4$. Tedy $\mathbb{A}=\{-4\}$.

Hranice množiny Ω je tvořena třemi úsečkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení tří úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami

$$\begin{aligned} &V_1: y=0,\\ &V_2: 5x+3y=15,\\ &V_3: x=0. \end{aligned}$$

Zvlášť vyšetříme body A,B,C, které jsou průniky různých vazeb. Úlohy f,V_i, kde $i=1,2,3$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde

$$\begin{aligned} F_1(x)&=f(x,0)=x^2-2x+1,\\ F_2(x)&=f\left(x,\tfrac{15-5x}{3}\right)=\tfrac{34}{9}x^2-12x+6,\\ F_3(y)&=f(0,y)=y^2-4y+1. \end{aligned}$$

Snadno se zjistí, že úloha f,V_1 má vázané minimum v bodě $a_1=[1,0]$; f,V_2 má vázané minimum v $a_2=[0,2]$; f,V_3 má vázané minimum v $a_3=\left[\frac{27}{17},\frac{40}{17}\right]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech.

Platí $f(a_1)=0, f(a_2)=-3, f(a_3)=-\frac{60}{17}, f(A)=1, f(B)=4, f(C)=6$. Odtud $\mathbb{B}=\left\{0,-3,-\frac{60}{17},1,4,6\right\}$. $M=\left\{-4,0,-3,-\frac{60}{17},1,4,6\right\}$. Odtud $\max f(\Omega)=\max M=6$ v bodě C. Dále $\min f(\Omega)=\min M=-4$ v bodě a.

8 Implicitní funkce

71. Příklad Spočtěte y' a y'', je-li $x^2 - 2xy + y^3 = 0$.

Řešení První derivaci y' určíme oběma možnými metodami.
a) Nejprve podle vzorce

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2x - 2y}{-2x + 3y^2} = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}.$$

b) Druhá možnost výpočtu spočívá ve zderivování dané rovnice $x^2 - 2xy + y^3 = 0$ podle x, přičemž y považujeme za funkci proměnné x. Platí

$$2x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0.$$

Vypočítáme y' a opět dostáváme $y' = \frac{2y-2x}{3y^2-2x}$.

Nyní přistupme k výpočtu druhé derivace y''.
Tu podle vzorce určovat nebudeme. Pro výpočet druhé derivace budeme vždy používat metodu derivování rovnice podle x. Vztah $2x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí

$$2 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0.$$

Rovnici upravíme a vypočteme y''. Dostáváme

$$y'' = \frac{4y' - 2 - 6y(y')^2}{3y^3 - 2x}.$$

72. Příklad Spočtěte y' a y'', je-li $x + y - \mathrm{e}^{x-y} = 0$.

Řešení Vzorec pro výpočet y' je vhodné použít, pokud nemusíme určovat derivace vyšších řádů. Použijeme tedy k výpočtu druhé metody. Rovnici $x + y - \mathrm{e}^{x-y} = 0$ zderivujeme podle x. Platí

$$1 + y' - - \mathrm{e}^{x-y}(1 - y') = 0.$$

Odtud po úpravě plyne

$$y' = \frac{\mathrm{e}^{x-y} - 1}{\mathrm{e}^{x-y} + 1}.$$

Druhou derivaci y'' funkce dané implicitně získáme dalším derivováním vztahu $1+y'-\mathrm{e}^{x-y}(1-y') = 0$. Platí

$$y'' - \mathrm{e}^{x-y}(1 - y')^2 - \mathrm{e}^{x-y}(-y'') = 0.$$

Z poslední rovnice již vypočítáme y''. Dostáváme $y'' = \dfrac{\mathrm{e}^{x-y}(1 - y')^2}{\mathrm{e}^{x-y} + 1}$.

73. Příklad Spočtěte y' a y'', je-li $xy + y^2 - x\mathrm{e}^x = 0$.

Řešení Postupujme jako v předchozí úloze. První derivací rovnice $xy + y^2 - x\mathrm{e}^x = 0$ dostáváme

$$y + xy' + 2yy' - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = 0.$$

Odtud plyne

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - y}{2y + x}.$$

Druhým zderivováním dostaneme

$$y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = 0.$$

Vztah upravíme a vypočítáme y''. Platí $y'' = \dfrac{2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2y' - 2(y')^2}{2y + x}$.

74. Příklad Spočtěte a upravte y''', je-li $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Řešení Rovnici $x^2 - y^2 - 1 = 0$ třikrát zderivujeme podle x. Pro první derivaci platí

$$2x - 2yy' = 0. \quad \text{Odtud } y' = \frac{x}{y}.$$

Druhou derivací rovnice dostáváme

$$2 - 2y'y' - 2yy'' = 0. \quad \text{Odtud } y'' = \frac{1-(y')^2}{y}.$$

Ze třetí derivací rovnice dostáváme

$$-4y'y'' - 2y'y'' - 2yy''' = 0. \quad \text{Odtud } y''' = -\frac{6y'y''}{y}.$$

Po dosazení za y' a y'' a krátké úpravě získáme

$$y''' = \frac{6x(x^2-y^2)}{y^5}.$$

75. Příklad Určete, zda je funkce daná implicitně rovnicí $2^{xy} + y^2 - 5 = 0$ rostoucí v bodě $[0, -2]$.

Řešení Rovnici $2^{xy} + y^2 - 5 = 0$ zderivujeme podle x. Platí

$$\ln 2 \cdot 2^{xy}(y + xy') + 2yy' = 0. \quad \text{Odtud } y' = -\frac{\ln 2 \cdot y \cdot 2^{xy}}{2y + \ln 2 \cdot x \cdot 2^{xy}}.$$

Nyní dosadíme souřadnice zadaného bodu $[0, -2]$ do y' a získáváme

$$y'(0) = -\frac{\ln 2(-2)2^0}{2(-2) + \ln 2 \cdot 0 \cdot 2^0} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Protože je derivace ve vyšetřovaném bodě záporná, je funkce daná implicitně v tomto bodě klesající.

76. Příklad Spočtěte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $x^5+y^5-2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení Předně rovnice tečny ke grafu funkce $y = y(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je dána vztahem

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = 1$. K vyřešení úlohy tedy stačí určit hodnotu derivace $y'(1)$. Rovnici $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ zderivujeme podle x. Platí

$$5x^4 + 5y^4y' - 2y - 2xy' = 0.. \quad \text{Odtud } y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$$

a

$$y'(1) = \frac{2-5}{5-2} = -1.$$

Dosadíme do rovnice tečny. Platí $y - 1 = -1(x - 1)$. Po úpravě dostáváme $x + y - 2 = 0$.

77. Příklad Spočtěte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ v bodě $[2, 0]$.

Řešení Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 2$ a $y_0 = 0$. Určíme hodnotu derivace $y'(2)$. Rovnici $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ zderivujeme podle x. Platí

$$e^{xy}(y + xy') + \cos y \cdot y' + 2yy' = 0.$$

Odtud $y' = \frac{y\mathrm{e}^{xy}}{2y+\cos y + x\mathrm{e}^{xy}}$ a $y'(2) = 0$. Po dosazení dostáváme, že rovnice tečny je $y = 0$.

78. Příklad Spočtěte rovnici normály ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $xy + \ln y - 1 = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení Předně rovnice normály ke grafu funkce $y = y(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je dána vztahem

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = 1$. K vyřešení úlohy tedy opět stačí určit hodnotu derivace $y'(1)$. Rovnici $xy+\ln y-1 = 0$ zderivujeme podle x. Platí $y+xy'+\frac{1}{y}y' = 0$. Odtud $y' = \frac{-y^2}{1+xy}$ a $y'(1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$. Dosadíme do rovnice normály. Platí $y - 1 = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}(x - 1)$. Po úpravě dostáváme $2x - y - 1 = 0$.

79. Příklad Rozhodněte, zda je funkce daná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1]$.

Řešení Abychom rozhodli, zda je funkce daná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1]$, musíme spočítat hodnotu derivace $y''(1)$. Zadanou rovnici zderivujeme podle x. Platí $3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0$. Odtud $y' = \dfrac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$ a tedy $y'(1) = \frac{2-3}{3-2} = -1$. Z tohoto výsledku lze usoudit, že funkce je v bodě $x_0 = 1$ klesající. Nyní zderivujeme zadanou rovnici podruhé. Platí $6x + 6yy'y' + 3y^2y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$. Odtud

$$y'' = \frac{4y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 2x}, \qquad y''(1) = \frac{4(-1) - 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = -16.$$

Protože je druhá derivace záporná, leží graf funkce v okolí bodu $[1, 1]$ pod tečnou a tedy funkce je v bodě $x_0 = 1$ konkávní.

80. Příklad Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$.

Řešení Nejprve vypočteme y'. Rovnici $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$ zderivujeme podle x. Platí $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2yy') - \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}) = 0$. Vztah upravíme. $\frac{x+yy'}{x^2+y^2} - \frac{xy'-y}{x^2+y^2} = 0$ a tedy $\frac{x+y+yy'-xy'}{x^2+y^2} = 0$. Odtud plyne $x + y + yy' - xy' = 0$ a $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Podobně dojdeme k výsledku podle vzorce

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \dfrac{-y}{x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \dfrac{1}{x}} = -\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{y}{x^2+y^2} - \dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Ve druhém kroku nalezneme stacionární body, tj. body, pro které platí $y' = 0$. Z předchozího výpočtu ale plyne, že $y' = 0$ právě když $x + y = 0$, tj. $y = -x$. Dosazením do zadané rovnice dostaneme $\ln\sqrt{2x^2} - \operatorname{arctg}(-1) = 0$. Odtud plyne $\ln\sqrt{2}|x| + \frac{\pi}{4} = 0$. Odlogaritmováním získáme $\sqrt{2}|x| = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ a $|x| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. Nalezli jsme dva stacionární body

$$s_1 = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \text{ a } s_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

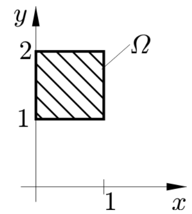
Ve třetím kroku určíme druhou derivaci y''. Rovnici $x + y + y'y - y'x = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí $1 + y' + y''y + (y')^2 - y''x - y' = 0$. Odtud plyne, že $y'' = \dfrac{(y')^2 + 1}{x - y} = \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$. Poslední rovnost vznikla dosazením $y' = \frac{x+y}{x-y}$. V závěrečném kroku pomocí druhé derivace rozhodneme, zda v bodech S_1 a S_2 dochází k lokálním extrémům. Pro bod s_1 platí $y''(s_1) = \dfrac{2s_1^2}{(s_1 - (-s_1))^3} = \dfrac{1}{2s_1} < 0$. Podobně pro bod s_2 platí $y''(s_2) = \dfrac{1}{2s_2} > 0$. Tedy v bodě s_1 dochází k lokálnímu maximu a v bodě s_2 k lokálnímu minimu implicitní funkce.

Část II
Integrální počet funkcí více proměnných

9 Dvojný integrál - Fubiniho věta

81. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$. Viz Obrázek 11. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y,x).



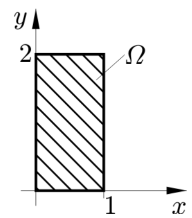
Obrázek 11: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \Big(\int_0^1 x^y \mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \Big[\ln|y+1|\Big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\tfrac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x,y), narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\mathrm{d}x$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

82. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 y \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x,y).



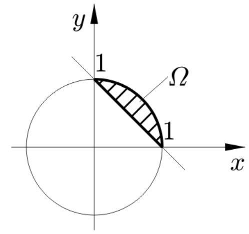
Obrázek 12: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 y, & u'_y = x^2 \\ v'_y = \mathrm{e}^{xy}, & v = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} \end{array} \right| = \int_0^1 \left(\Big[xy\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 - x\int_0^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \Big[(xy-1)\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} - x\Big]_0^1 = 2.$$

83. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \le 0, x + y - 1 \ge 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 13. Oblast Ω je typu (x,y) i (y,x). Zvolme typ (x,y). Platí $\Omega = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}xy^3\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \tfrac{x}{3}\left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{20}.$$



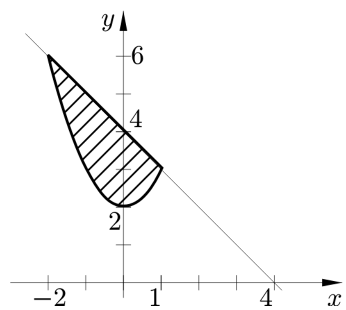
Obrázek 13: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \le 0, x + y - 1 \ge 0$

Zvolíme-li typ (y, x), pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \le y \le 1, 1-y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_\Omega xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 (y^3 - y^4)\mathrm{d}y = \tfrac{1}{20}.$$

84. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 14. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \le x \le \le 1, x^2 + 2 \le y \le 4 - x\}$.



Obrázek 14: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{x^2+2}^{4-x} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \tfrac{1}{2} \left((4-x)^2 - (x^2+2)^2 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{81}{5}.$$

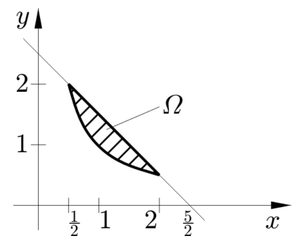
85. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 15. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x\left(\frac{5}{2} - x\right) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Platí $\Omega = \left\{[x, y]; \frac{1}{2} \le x \le \ \le 2, \frac{1}{x} \le y \le \frac{5}{2} - x\right\}$.

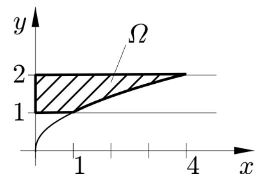
$$\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x(\tfrac{5}{2} - x) - \tfrac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = \tfrac{165}{128} - \ln 2.$$

86. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 16. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le y \le 2, 0 \le y \le y^2\}$.



Obrázek 15: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$

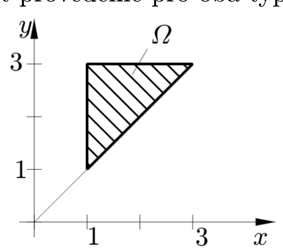


Obrázek 16: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left[y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 (y\mathrm{e}^y - y)\,\mathrm{d}y = \left[y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \tfrac{3}{2}.$$

87. Příklad Spočtěte $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 17. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 3, x \le y \le 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega =$ $= \{[x, y]; 1 \le y \le 3, 1 \le x \le y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.



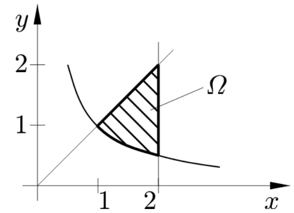
Obrázek 17: $\Omega : 1 \le x \le y \le 3$

$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{x}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_x^3 \tfrac{x}{y^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left[-\tfrac{x}{y} \right]_x^3 \mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(1 - \tfrac{x}{3}\right) \mathrm{d}x = \left[x - \tfrac{x^2}{6} \right]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$
$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{x}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_1^y \tfrac{x}{y^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\tfrac{x^2}{2y^2} \right]_1^y \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \int\limits_1^3 \left(1 - \tfrac{1}{y^2} \right) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \left[y + \tfrac{1}{y} \right]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

88. Příklad Spočtěte $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 18. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$.

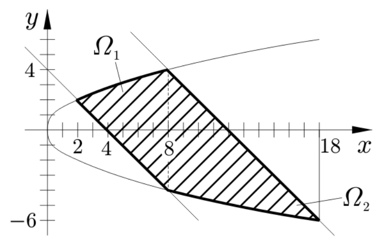
$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{x^2}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^x \tfrac{x^2}{y^2} \mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[-\tfrac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(x^3 - x \right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \tfrac{9}{4}.$$



Obrázek 18: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

89. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 19. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y). Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

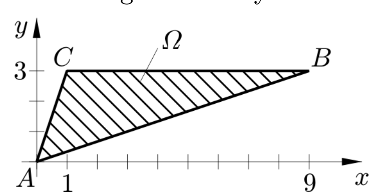


Obrázek 19: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{2}^{8} \left(\int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{8}^{18} \left(\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{2}^{8} (\sqrt{2x} + x - 4)\mathrm{d}x + \int\limits_{8}^{18} (\sqrt{2x} -$$
$$- x + 12)\mathrm{d}x = \tfrac{74}{3} + \tfrac{122}{3} = 62.$$

90. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sin y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 20. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 3, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integálu $\int \sin y^2 \, \mathrm{d}y$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.



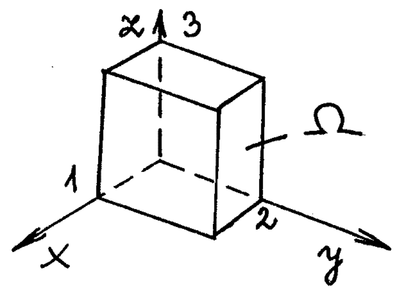
Obrázek 20: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\iint\limits_{\Omega} \cos y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{3} \left(\int\limits_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{3} \Big[x \cos y^2 \Big]_{\frac{y}{3}}^{3y} \mathrm{d}y = \tfrac{4}{3} \int\limits_{0}^{3} 2y \cos y^2 \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = y^2 \\ 0 \to 0, 3 \to 9 \end{array} \right| =$$
$$= \tfrac{4}{3} \int\limits_{0}^{9} \cos t dt = \tfrac{4}{3} \Big[\sin t \Big]_{0}^{9} = \tfrac{4}{3} \sin 9.$$

10 Trojný integrál - Fubiniho věta

91. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x + y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$.

Řešení Integrační obor $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$ je trojrozměrný interval (kvádr). Viz Obrázek 21. K výpočtu použijeme Dirichletovu větu. Speciální verzi věty ale nelze použít, protože integrand není ve tvaru součinu.



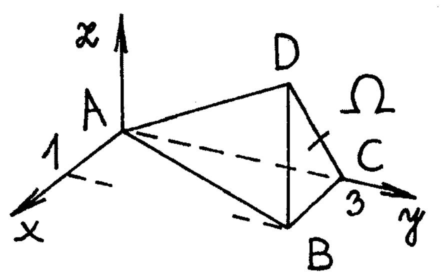
Obrázek 21: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$

$$\iiint\limits_{\Omega} x + y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 x + y \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^2 \Big[xz + yz \Big]_0^3 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 3 \int_0^1 \left(\int_0^2 x + y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 3 \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 \mathrm{d}x = 3 \int_0^1 2x + 2 \, \mathrm{d}x = 6 \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = 9.$$

92. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω je čtyřstěn $A = [0,0,0], B = [1,3,0], C = [0,3,0], D = [1,3,2]$.

Řešení Integrační obor Ω je čtyřstěn $ABCD$. Viz Obrázek 22. Nejprve musíme čtyřstěn zapsat pomocí nerovností jako oblast nějakého typu. Oblast Ω je libovolného typu. Lze zvolit tedy typ (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 1, 3x \le y \le 3, 0 \le z \le 2x\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.



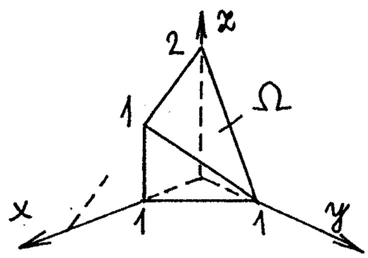
Obrázek 22: $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 1, 3x \le y \le 3, 0 \le z \le 2x\}$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_{3x}^3 \left(\int_0^{2x} x^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{3x}^3 \Big[x^2 z \Big]_0^{2x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\int_{3x}^3 x^3 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \left[x^3 y \right]_{3x}^3 \mathrm{d}x = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4) \, \mathrm{d}x = 6 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

93. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} xy + z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, x + 2y + z = 2$.

Řešení Integrační obor Ω je jehlan. Viz Obrázek 23. Oblast Ω je libovolného typu. Lze zvolit tedy typ (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 2 - x - 2y\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.



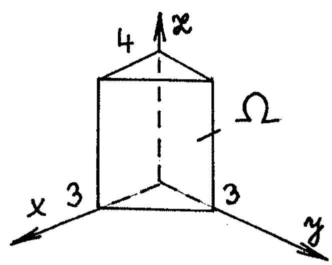
Obrázek 23: $\Omega : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, x + 2y + z = 2$

$$\iiint\limits_{\Omega} xy + z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2-x-2y} xy + z \,dz \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[xyz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-2y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy(2 - x - 2y) + \frac{1}{2}(2 - x - 2y)^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{13}{40}.$$

94. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \frac{x + y}{z + 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x = 0, y = 0, 0 \le z \le 4, x + y = 3$.

Řešení Integrační obor Ω je hranol. Viz Obrázek 24. Obor Ω zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x, 0 \le z \le 4\}$.



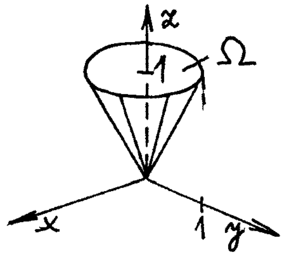
Obrázek 24: $\Omega : x = 0, y = 0, 0 \le z \le 4, x + y = 3$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x + y}{z + 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left(\int_0^4 \frac{x + y}{z + 4} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \Big[(x + y) \ln |z + 4| \Big]_0^4 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \ln 2 \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} (x + y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \ln 2 \int_0^3 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{3-x} \mathrm{d}x = \ln 2 \int_0^3 x(3 - x) + \frac{1}{2}(3 - x)^2 \mathrm{d}x = 9 \ln 2.$$

95. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 1, z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení Integrační obor Ω je kužel. Viz Obrázek 25. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu (x,y,z). Platí $\Omega = \{[x,y,z]; -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$.



Obrázek 25: $\Omega : z = 1, z = \sqrt{x^2+y^2}$

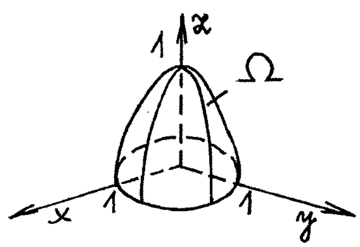
$$\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z \, \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[y(1-x^2)-\frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x = \sin t \\ -1 \to -\frac{1}{2}\pi, 1 \to \frac{1}{2}\pi \end{array}\right| = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{4}\pi.$$

96. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 1 - x^2 - y^2$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen paraboloidem a rovinou. Viz Obrázek 26. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu $(x,y,z) : \Omega = \{[x,y,z]; -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$.



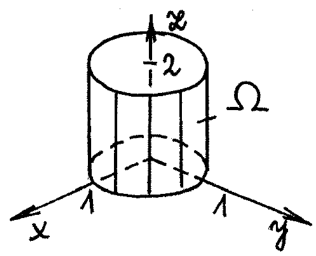
Obrázek 26: $\Omega : z = 0, z = 1 - x^2 - y^2$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{0}^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[y(1-x^2)-\frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x == \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi.$$

97. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 2, x^2 + y^2 = 1$.

Řešení Integrační obor Ω je válec. Viz Obrázek 27. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le z \le 2\}$.



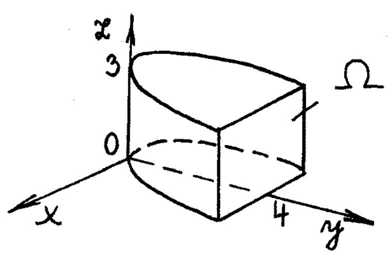
Obrázek 27: $\Omega : z = 0, z = 2, x^2 + y^2 = 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^2 x^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[x^2 z \right]_0^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \left[x^2 y \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 4 \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi.$$

98. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : y = 4, z = 0, z = 3, x^2 - y = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen parabolickou válcovou plochou a třemi rovinami. Viz Obrázek 28. Obor Ω zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; -2 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le 3\}$.



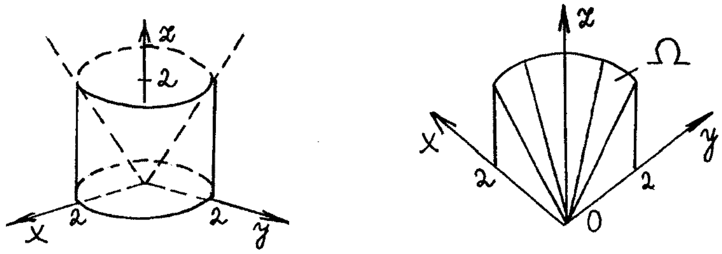
Obrázek 28: $\Omega : y = 4, z = 0, z = 3, x^2 - y = 0$

$$\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{x^2} \left(\int_0^3 z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{x^2} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^3 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{9}{2} \int_{-2}^{2} (\int_0^{x^2} \mathrm{d}y) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{9}{2} \int_{-2}^{2} [y]_0^{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{9}{2} \int_{-2}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^{2} = 24.$$

99. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen válcovou plochou, kuželovou plochou a rovinou. Viz Obrázek 29. Obor Ω zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.



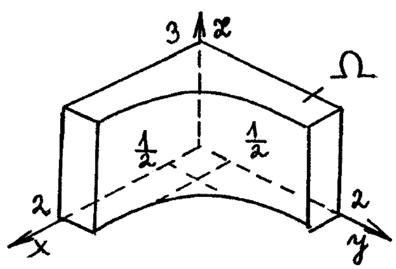
Obrázek 29: $\Omega : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\iiint\limits_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \Big(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} xy \, \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(8x - x^4 \right) \mathrm{d}x = \frac{16}{5}.$$

100. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x, y, z \geq 0, x = 2, y = 2, xy = 1, z = 3$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen válcovou plochou $xy = 1$ a šesti rovinami. Viz Obrázek 30. Obor Ω rozdělíme na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Přitom $\Omega_1 = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \Omega_2 = \{[x, y, z]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 0 \leq z \leq 3\}$.



Obrázek 30: $\Omega : x, y, z \geq 0, x = 2, y = 2, xy = 1, z = 3$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^2 \Big(\int_0^3 \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \Big(\int_0^3 \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x + 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 3 + 6 \ln 2.$$

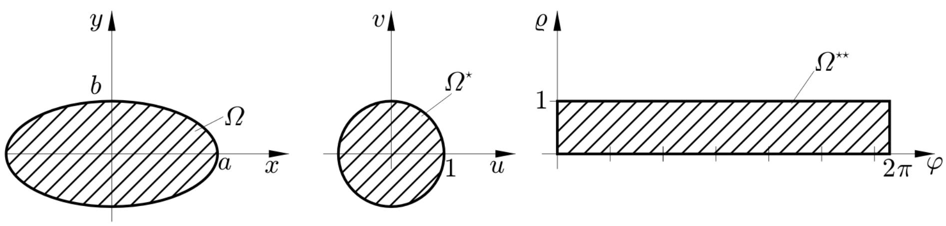
11 Dvojný integrál - Transformace integrálů

101. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahem $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \leq 1$.

Řešení Integrační obor Ω určený vztahem $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \leq 1$ je vnitřek elipsy. Viz Obrázek 31. Nejprve provedeme transformaci, která oblast Ω ztransformuje v kruh $\Omega^* = \{[u,v]; u^2 + v^2 \leq 1\}$, který má střed v počátku a poloměr 1. Stačí položit $x = au, y = bv$. Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω^* ztransformuje v obdélník, tj. dvojrozměrný interval $\Omega^{**} = \{[\varrho,\varphi]; \varrho \in \langle 0,1\rangle, \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle\}$. Pomocí Dirichletovy věty integrál již snadno dopočítáme.



Obrázek 31:

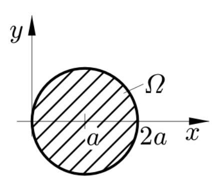
$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} ab\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Omega^{**}} ab\varrho\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = ab\int_0^1 \varrho\ \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = ab\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

102. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahem $x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0$.

Řešení Rovnici $x^2 + y^2 = 2ax$ upravíme na tvar $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. Odtud plyne, že integrační obor je kruh se středem v bodě $[a,0]$ a poloměru a . Viz Obrázek 32. Nejprve provedeme transformaci, která posune střed kruhu do počátku souřadnicového systému. Stačí položit $x = u + a, y = v$. Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ab.$$

Vznikne oblast $\Omega^* = \{[u,v]; u^2 + v^2 \leq a^2\}$. Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω^* ztransformuje v obdélník, $\Omega^{**} = \{[\varrho,\varphi]; \varrho \in \langle 0,a\rangle, \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle\}$. Integrál dopočítáme pomocí Dirichletovy věty.



Obrázek 32:

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Omega^{**}} \varrho\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = ab\int_0^a \varrho\ \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^a \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi a^2.$$

Integrál lze řešit i bez transformace, která posune střed kružnice. V tomto případě, jak dále uvidíme, nelze použít Dirichletovu větu. Rovnice $x^2 + y^2 = 2ax$ má po transformaci do polárních souřadnic tvar $\varrho = 2a\cos\varphi$. Kruh Ω se ztransformuje v $\Omega^\star = \{[\varrho, \varphi]; -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le 2a\cos\varphi\}$.

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^\star} \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{2a\cos\varphi} \varrho\, \mathrm{d}\varrho)\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{2a\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = 2a^2 \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2.$$

103. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je ohraničena $y = x + 1, y = x + 2, y = 1 - x, y = 4 - x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 33. Zřejmě Ω je obdélník, který není dvojrozměrným intervalem. Transformaci provedeme tak, aby přímky tvořící hranici obrazce byly rovnoběžné s osami. Nové souřadnice u, v zavedeme vztahy

$$u = y - x,$$
$$v = y + x.$$

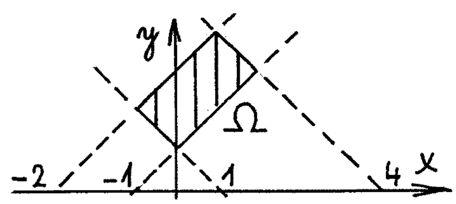
Odtud po krátké úpravě plyne

$$x = -\frac{1}{2}(u - v),$$
$$y = \frac{1}{2}(u + v).$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Oblast Ω se ztransformuje v dvojrozměrný interval $\Omega^* = \{[u, v]; u \in \langle 1, 2\rangle, v \in \langle 1, 4\rangle\}$.



Obrázek 33:

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{d}u \cdot \int_1^4 \mathrm{d}v == \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

104. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je ohraničena $y = 2x, y = 2x - 7, x = 4y - 7, x = 4y - 14$.

Řešení Integrační obor je rovnoběžník. Viz Obrázek 34. Transformaci provedeme tak, aby úsečky tvořící hranici obrazce byly rovnoběžné se souřadnicovými osami. Nové souřadnice u, v zavedeme vztahy

$$u = y - 2x,$$
$$v = 4y - x.$$

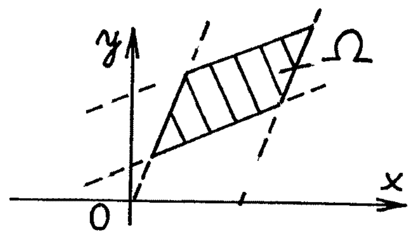
Odtud po krátké úpravě plyne

$$x = \frac{1}{7}(-4u + v),$$
$$y = \frac{1}{7}(-u + 2v).$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{4}{7}, & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7}, & \frac{2}{7} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}.$$

Oblast Ω se ztransformuje v $\Omega^* = \{[u, v]; u \in \langle 7, 0\rangle, v \in \langle 7, 14\rangle\}$.



Obrázek 34:

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{7}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{7}\int_{=7}^{0} \mathrm{d}u \cdot \int_{7}^{14} \mathrm{d}v == \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 7 = 7.$$

105. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je ohraničena $y = x^2, y = 2x^2, x = y^2, x = 2y^2$.

Řešení Integrační obor je ohraničen parabolami. Viz Obrázek 35. Transformaci provedeme tak, aby parabolické oblouky tvořící hranici obrazce byly obrazy úseček. Nové souřadnice u, v zavedeme vztahy

$$y^2 = ux,$$
$$x^2 = vy.$$

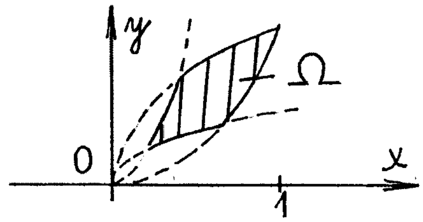
Odtud po krátké úpravě plyne

$$x = \sqrt[3]{uv^2},$$
$$y = \sqrt[3]{u^2v}.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}, & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{\ -\frac{1}{3}}v^{\ \frac{1}{3}}, & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Oblast Ω se ztransformuje v $\Omega^* = \{[u, v]; u \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle, v \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle\}$. Zřejmě $|\Omega^*| = \frac{1}{4}$.

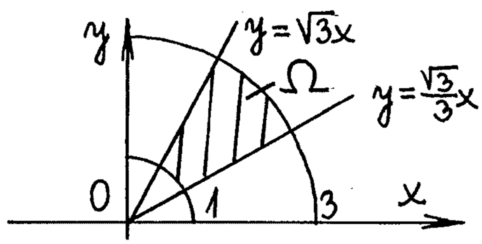


Obrázek 35:

$$\iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} \frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}u \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}v == \frac{1}{3}|\Omega^*| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

106. Příklad Spočtěte $\iint_{\Omega} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω: $x > 0$, $\frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x$, $1 \le x^2 + y^2 \le 9$.

Řešení Integrační obor Ω je část mezikruží se středem v počátku a poloměry kružnic 1 a 3 . Viz Obrázek 36. Provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω ztransformuje v obdélník $\Omega^* = \{[\varrho,\varphi]; \varrho \in \langle 1, 3\rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\rangle\}$.



Obrázek 36:

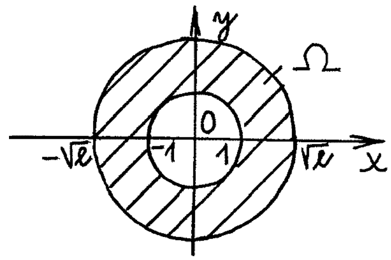
$$\iint_{\Omega} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} \operatorname{arctg}\frac{\varrho\sin\varphi}{\varrho\cos\varphi}\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint_{\Omega^*} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint_{\Omega^*} \varphi\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_1^3 \varrho\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_1^3 \cdot \left[\varphi^2\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{6}.$$

107. Příklad Spočtěte $\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahem $1 \le x^2 + y^2 \le \mathrm{e}$.

Řešení Integrační obor Ω je mezikruží se středem v počátku s poloměry kružnic 1 a $\sqrt{\mathrm{e}}$. Viz Obrázek 37. Provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω ztransformuje v obdélník, $\Omega^* = \{[\varrho,\varphi]; \varrho \in \langle 1, \sqrt{\mathrm{e}}\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Integrál dopočítáme pomocí Dirichletovy věty.

$$\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} \frac{\ln(\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi)}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}\varrho\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint_{\Omega^*} \frac{\ln\varrho^2}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

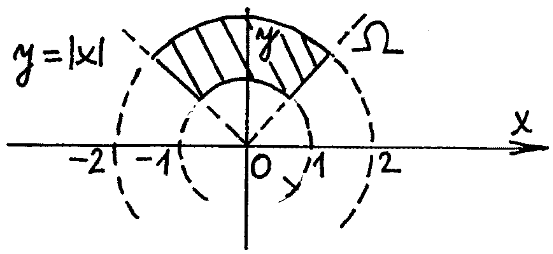


Obrázek 37:

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln \varrho^2}{\varrho} \,\mathrm{d}\varrho == \left| \begin{array}{c} t = \ln \varrho^2 \\ \mathrm{d}t = \frac{2 d\varrho}{\varrho} \\ 1 \to 0, \sqrt{e} \to 1 \end{array} \right| = 2\pi \int_0^1 \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

108. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $|x| \le y$.

Řešení Integrační obor Ω je část mezikruží se středem v počátku a poloměry kružnic 1 a 2 . Viz Obrázek 38. Provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω ztransformuje v obdélník $\Omega^* = \{[\varrho, \varphi]; \varrho \in \langle 1, 2\rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\rangle\}$.



Obrázek 38:

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)\varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_1^2 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15\pi}{8}.$$

109. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $0 \le 2y \le x$, $x^2 + 4y^2 \le 4$.

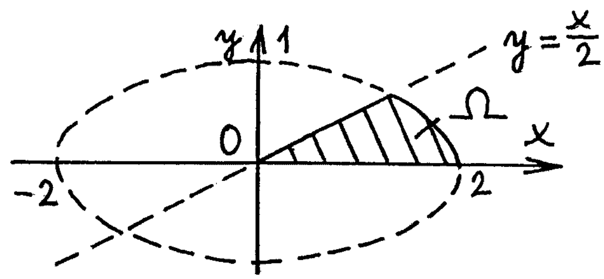
Řešení Integrační obor Ω je ohraničen elipsou $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ a dvěma přímkami. Viz Obrázek 39. Nejprve provedeme transformaci, která elipsu ztransformuje v kruh. Stačí položit

$$x = 2u,$$
$$y = v.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω^* ztransformuje v obdélník $\Omega^{**} =$ $= \{[\varrho, \varphi]; \varrho \in \langle 0, 1\rangle, \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\}$.



Obrázek 39:

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} 4u^2 \cdot 2\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8 \iint\limits_{\Omega^{**}} \varrho^2 \cos^2\varphi \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = 8\int_0^1 \varrho^3\, \mathrm{d}\varrho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 8\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{4}.$$

110. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $y = 2x, y = 0, 2x = 1$.

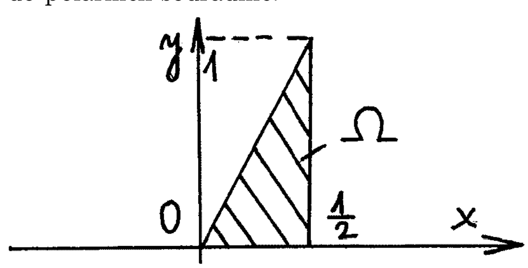
Řešení Integrační obor Ω je trojúhelník. Viz Obrázek 40. Ke zjednodušení integrandu použijeme transformaci

$$x = \frac{u}{2},$$
$$y = v.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic.



Obrázek 40:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega^{**}} \varrho^2 \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \varrho^2 \mathrm{d}\varrho)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12}(\sqrt{2} + \ln\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}).$$

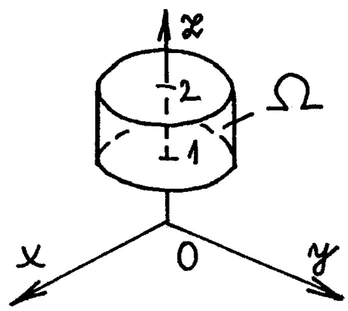
12 Trojný integrál - Transformace integrálů

111. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$.

Řešení Integrační obor Ω určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle 1, 2 \rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.

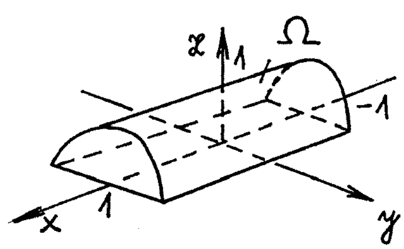


Obrázek 41: $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \varrho^3 \, \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

112. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$.

Řešení Vztahy $-1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x. Viz Obrázek 42.



Obrázek 42: $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho \cos \varphi,$$
$$z = \varrho \sin \varphi.$$

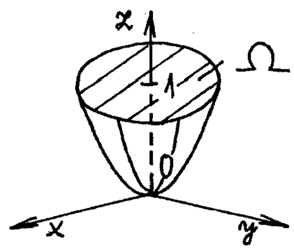
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\ \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\ \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

113. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2+y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



Obrázek 43: $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\ \mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\ [z]_{\varrho^2}^1\ \mathrm{d}\varphi)d\varrho =$$

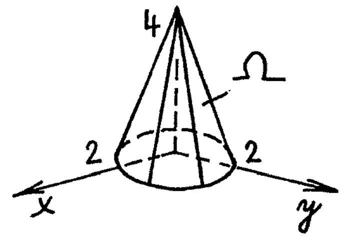
$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\ \mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\,[\varphi]_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

114. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4-2\varrho\rangle.$$



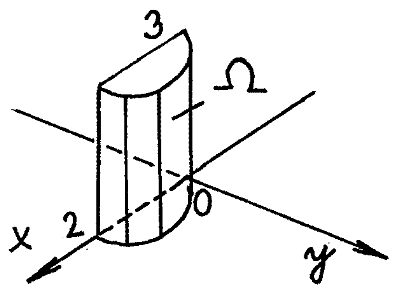
Obrázek 44: $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho \; d\varrho \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{4-2\varrho} z\varrho \;\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big)d\varrho = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-2\varrho} \varrho \;\mathrm{d}\varphi\Big)d\varrho =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (4-2\varrho)^2 \varrho \;\mathrm{d}\varphi\Big)d\varrho = \pi \int_0^2 (4-2\varrho)^2 \varrho \;\mathrm{d}\varrho = \frac{16}{3}\pi.$$

115. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}; \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2+y^2-2x = 0$.

Řešení Vztah $x^2+y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2+y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \le 0$ plyne, že Ω je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 2\cos\varphi\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 3\rangle.$$



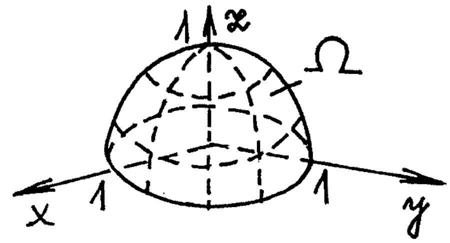
Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2+y^2-2x = 0$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho^2 \;\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \Big(\int_0^3 z\varrho^2 \; dz\Big)d\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 \varrho^2 \; d\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \;\mathrm{d}\varphi = 8.$$

116. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Řešení Integrační obor Ω je horní polovina koule. Viz Obrázek 46. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, a \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$



Obrázek 46: $\Omega : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho \cos\varphi \sin\vartheta)^2 (\varrho \cos\vartheta)(\varrho^2 \sin\vartheta) \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^5 \cos^2\varphi \sin^3\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_0^a \varrho^5 \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin\vartheta \\ \mathrm{d}t = \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \\ 0 \to 0, \frac{\pi}{2} \to 1 \end{array} \right| = \frac{1}{6} a^6 \cdot \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{6} a^6 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \pi a^6.$$

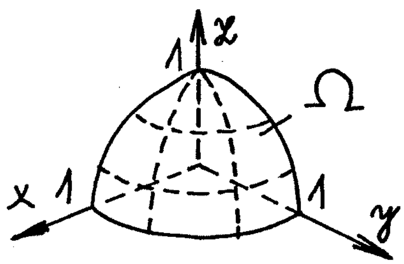
117. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Řešení Integrační obor Ω je osmina koule ležící v prvním oktantu. Viz Obrázek 47. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \varrho^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta + \varrho^2 \cos^2\vartheta} \cdot \varrho^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta) \mathrm{d}\varphi) \mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{8}.$$

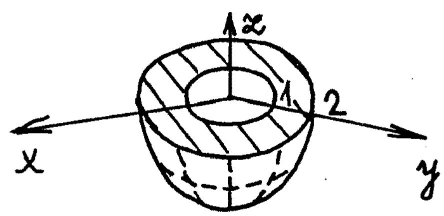


Obrázek 47: $\Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

118. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, kde $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena poloprostorem $z \leq 0$ a dvěma sférami. Viz Obrázek 48. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$\vartheta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle.$$



Obrázek 48: $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\varrho^2 \sin\vartheta \cdot \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta}{(\varrho^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{\varrho^4} \sin\vartheta \; \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \frac{d\varrho}{\varrho^4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{-1}{3\varrho^3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{24} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{7}{12}\pi.$$

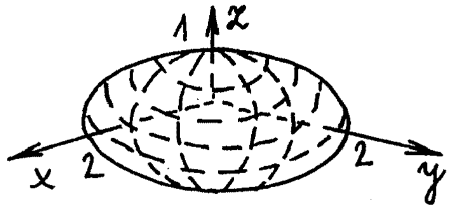
119. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$.

Řešení Vztah $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$ upravíme na tvar $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$. Odtud plyne, že Ω je elipsoid. Elipsoid ztransformuje v kouli. Stačí položit

$$x = 2u,$$
$$y = v,$$
$$z = 2w.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$



Obrázek 49: $\Omega : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic, která kouli ztransformuje v kvádr, tj. trojrozměrný interval. Viz Obrázek 49.

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} 4\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 4 \iiint\limits_{\Omega^{**}} \varrho^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = 4\int_0^1 \varrho^2\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 4\left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{16}{3}\pi.$$

120. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

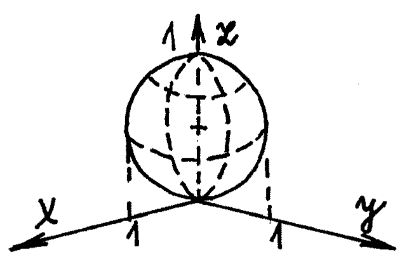
Řešení Vztah $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ upravíme na tvar $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$. Odtud plyne, že Ω je koule se středem v bodě $[0, 0, \frac{1}{2}]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Provedeme transformaci, která posune střed koule do počátku. Stačí položit

$$x = u,$$
$$y = v,$$
$$z = w + \frac{1}{2}.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dále provedeme transformaci do sférických souřadnic, která ztransformujeme kouli v kvádr. Viz Obrázek 50.



Obrázek 50: $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$

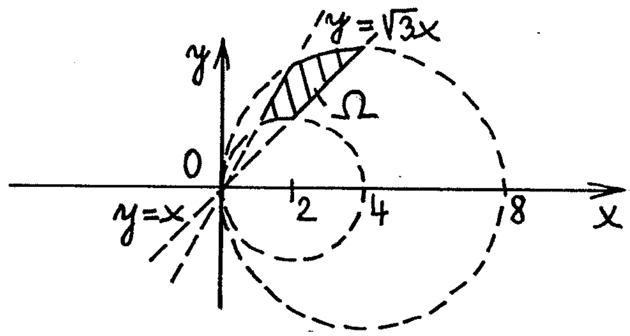
$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{u^2 + v^2}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \iiint\limits_{\Omega^{**}} \varrho\sin\vartheta \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\ d\varrho\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \varrho^3\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{1}{64} \cdot 2\pi \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{1}{64}\pi^2.$$

13 Aplikace vícerozměrných integrálů

121. Příklad Spočtěte obsah rovinného obrazce M ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

Řešení Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.



Obrázek 51: M: $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce M určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \le \varrho \le 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho \; \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho \; \mathrm{d}\varrho)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\varrho^2\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \; \mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \; \mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

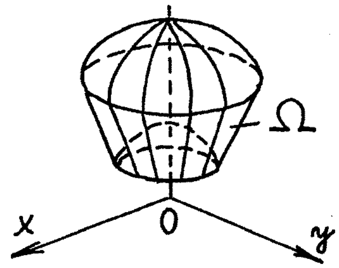
122. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2 \sin\vartheta \; \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2 \; \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta \; \mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2 - \sqrt{2}).$$



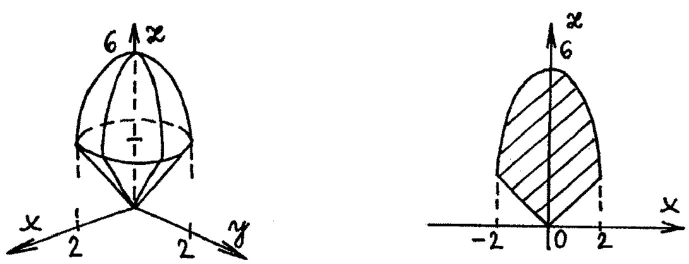
Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

123. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - (x^2 + y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z - 2)(z + 3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle. \end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.



Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3) \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4 \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

124. Příklad Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x, y) \geq 0$.

Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí

$$\iint\limits_M \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M*} \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho = \left| \begin{array}{c} t = 1+4\varrho^2 \\ \varrho\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{8}\mathrm{d}t \\ 0 \to 1, 1 \to 5 \end{array} \right| = \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

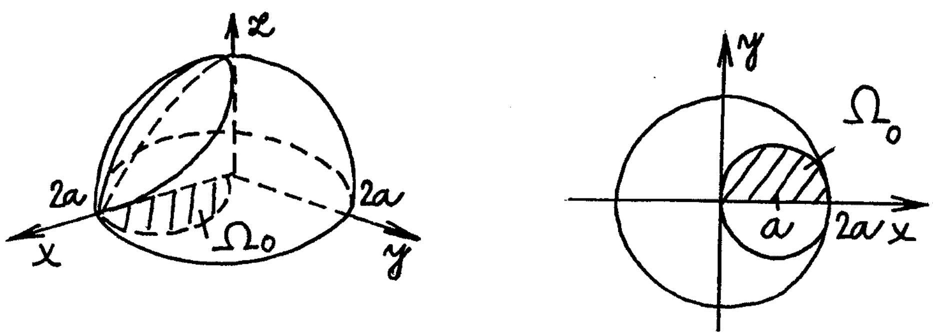
125. Příklad Spočtěte velikost povrchu tak zvaného Vivianova oka, které vznikne jako průnik polokoule $x^2+y^2+z^2=4a^2, z \geq 0$ s válcovou plochou $x^2+y^2=2ax$, kde $a>0$.

Řešení Velikost povrchu S určíme opět ze vztahu $S = \iint\limits_M \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je kruh $x^2+y^2 \leq 2ax$, tj. $(x-a)^2+y^2=a^2$. Spočteme parciální derivace. Platí

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}},$$
$$f'_y = \frac{-y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}.$$

Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic. Pro usnadnění výpočtu budeme integrovat pouze přes polovinu oblasti M, kterou označíme M_0. Korektnost tohoto zjednodušení plyne ze symetrie Vivianova oka. Viz Obrázek 54. Po transformaci M_0 do polárních souřadnic platí, že

$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$
$$\varrho \in \langle 0, 2a\cos\varphi \rangle.$$



Obrázek 54: M: $x^2+y^2+z^2=4a^2, z \geq 0$ a $x^2+y^2=2ax$

$$\iint\limits_M \sqrt{1+\frac{x^2}{4a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M \sqrt{\frac{4a^2}{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{M_0} \frac{2a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 4a\iint\limits_{\Omega*} \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{4a^2-\varrho^2}} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{\varrho}{\sqrt{4a^2-\varrho^2}}\,\mathrm{d}\varrho)\mathrm{d}\varphi == 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{4a^2-\varrho^2}\right]_0^{2a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 8a^2\left[\varphi+\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2(\pi-2).$$

126. Příklad Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

Řešení Střed krychle Ω umístíme do počátku systému souřadnic. Tedy $\Omega = \langle -a, a\rangle^3$. Dále nalezneme funkci hustoty $\varrho(x,y,z)$. Vzdálenost bodu $a=[x,y,z]$ od počátku je dán vztahem $d(a,o) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Odtud plyne $\varrho(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého vrcholu. Platí $\varrho(a,a,a) = k(a^2+a^2+a^2)$. Tedy $k = \frac{1}{3a^2}$. Celkem $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)$. Vzhledem k symetrii tělesa i funkce lze integrovat pouze přes první oktant Ω_1. Konečně hmotnost tělesa Ω určíme ze vztahu $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3a^2}\iiint\limits_{\Omega_1} x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{8}{3a^2}\int_0^a \left(\int_0^a (\int_0^a x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3a^2}\int_0^a \left(\int_0^a \left[x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3\right]_0^a \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{8}{3a}\int_0^a \left(\int_0^a (x^2+y^2+\frac{1}{3}a^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\int_0^a (x^2+\frac{2}{3}a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}a^3.$$

127. Příklad Určete hmotnost koule o poloměru a. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

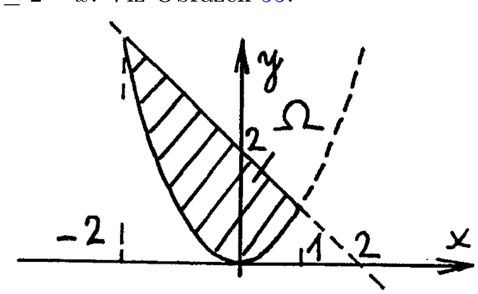
Řešení Střed koule Ω umístíme do počátku systému souřadnic. Nalezneme funkci hustoty $\varrho(x,y,z)$. Platí $\varrho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého bodu na povrchu koule. Například bodu $[a,0,0]$. Platí $\varrho(a,0,0) = ka$. Odtud $k = \frac{1}{a}$. Celkem $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hmotnost tělesa Ω určíme opět ze vztahu $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Je výhodné provést transformaci do sférických souřadnic. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega_*} \varrho^3\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \varrho^3\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{4}\varrho\right]_0^a \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi\cdot 2 = \pi a^3.$$

128. Příklad Určete těžiště rovinného obrazce M, který je ohraničen křivkami $y=x^2, x+y=2$. Hustota obrazce je konstantní a je rovna 1.

Řešení Těžiště T rovinného obrazce M určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_x(M)}{m(M)}, \frac{S_y(M)}{m(M)}\right]$. Obrazec zapíšeme jako oblast typu (x,y).Řešením rovnice $x^2 = 2-x$ dostáváme $(x-1)(x+2)=0$ a odtud $x=-2, x=1$. Platí tedy $-2 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 2-x$. Viz Obrázek 55.



Obrázek 55:

$$m(M) = \iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

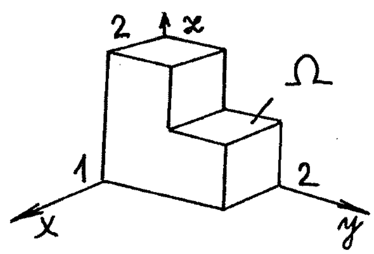
$$S_x(M) = \iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(2-x)^2 - x^4\mathrm{d}x = \left[2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5\right]_{-2}^{1} = \frac{36}{5}.$$

$$S_y(M) = \iint_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} x(2-x-x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{1} = -\frac{9}{4}.$$

Odtud plyne, že $T = \left[-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right]$.

129. Příklad Určete těžiště tělesa $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ s konstantní hustotou, kde $\Omega_1 = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$ a $\Omega_2 = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Řešení Těžiště T tělesa Ω určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}\right]$. Viz Obrázek 56. Je-li hustota $\varrho(x,y,z) = c$, pak zřejmě $m(\Omega) = 3c$.



Obrázek 56:

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint_{\Omega_1} cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2} cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^2 z\,\mathrm{d}z + c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^1 z\,\mathrm{d}z = \frac{5}{2}c.$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega_1} cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2} cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 y\mathrm{d}y \int_0^2 \mathrm{d}z + c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 y\mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z = \frac{5}{2}c.$$

$$S_{yz}(\Omega) = \iiint_{\Omega_1} cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2} cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^2 \mathrm{d}z + c\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z = \frac{3}{2}c.$$

Odtud plyne, že $T = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

130. Příklad Určete moment setrvačnosti elipsoidu $\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ vzhledem k ose y.

Řešení Moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k ose y určíme ze vztahu

$$I_y(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} x^2 + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Provedeme transformaci do zobecněných sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= b\varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= c\varrho\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Jakobián transformace je $J = -abc\varrho^2\sin\vartheta$. Přitom $\varrho \in \langle 0, 1\rangle, \varphi \in \langle 0, \pi\rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$.

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = a^3bc \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^4\cos^2\varphi\sin^3\vartheta\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta +$$

$$+abc^3 \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^4\cos^2\vartheta\sin\vartheta\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = a^3bc\int_0^1 \varrho^4\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\mathrm{d}\vartheta +$$

$$+abc^3\int_0^1 \varrho^4 d\varrho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta = \frac{4}{15}\pi a^3bc + \frac{4}{15}\pi abc^3 = \frac{4}{15}\pi abc(a^2+c^2).$$