3 MAPLEOVSKÁ CVIČENÍ
PRO DRUHÝ SEMESTR

RNDr. Jiří Klaška, Dr.

• Internetová adresa osobní stránky: http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/klaska
• E-mail: klaska@um.fme.vutbr.cz

Úvod

V rámci tří cvičení u počítače budete řešit vybrané skupiny úloh a problémů z diferenciálního a integrálního počtu funkcí více proměnných, který je obsahem látky z matematiky ve druhém semestru. Text obsahuje zadání příkladů do cvičení a také základy mapleovské teorie. Volně navazuje na učební text: 3 mapleovská cvičení pro základní kurz matematiky, který je určen pro první semestr. Úspěšné vyřešení příkladů předpokládá aktivní znalost základních příkazů z předchozího semestru a zkušenosti se zapisováním příkazů a odstraňováním syntaktických chyb. Při řešení některých úloh využijeme mapleovského programovacího jazyka MPJ, který umožňuje naprogramování cyklů a rozhodovacích situací. Základní informace o MPJ jsou obsaženy v textu pro první semestr. Nyní uvedeme přehled některých důležitých příkazů, které budeme i nadále používat.

Důležitá klíčová slova z předchozího semestru

$$\begin{array}{cccccc}
evalf, & simplify, & factor, & expand, & subs, & solve, \\
fsolve, & sum, & plot, & display, & with(linalg), & vector, \\
dotprod, & crossprod, & array, & matrix, & evalm, & det, \\
Limit, & limit, & Diff, & diff, & Int, & int.
\end{array}$$

Význam těchto příkazů nebude již v následujícím textu vysvětlován a předpokládá se, že čtenář je schopen uvedené příkazy v aktivní formě používat. Aby byla výuka na počítači efektivní, je nutné se na cvičení dobře připravit. Příprava zahrnuje: přečtení textu, nastudování mapleovské teorie a u složitějších cvičení napsání kostry programu. Kromě uvedeného se předpokládá teoretické i praktické zvládnutí procvičované látky.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

CVIČENÍ 1. TÉMA: GRAFY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH, LIMITA, PARCIÁLNÍ DERIVACE, GRADIENT.

První cvičení bude tematicky věnováno základům diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Důraz bude kladen především na geometrickou názornost, kterou nám umožní kreslení grafů funkcí.

Klíčová slova pro první cvičení

$plot3d$, $with(plots)$, $view$, $grid$, $numpoints$, $colour$, $contourplot$,
$style$, $display3d$, $proc$, $limit$, D, $grad$, $gradplot$.

Mapleovská teorie

Nejprve si vysvětlíme, jak v programu Maple definovat funkce více proměnných. K definici funkce $f(x,y)$ budeme používat příkazu $f := (x,y)->$ *funkční předpis*;. Toto zadávání funkce přináší řadu výhod. Například snazší dosazování konkrétních hodnot, nebo parametrů za proměnné a výpočet funkčních hodnot. Například definici funkce $f(x,y) = x^2 + y$ a výpočet její funkční hodnoty v bodě $[3, \sqrt{5}]$ provedeme takto: $> f := (x,y)-> x\hat{}2 + y;\ a := f(3, sqrt(5));\ evalf(a);$. Funkci $f(x,y)$ lze také definovat jako algebraický výraz. Stejného efektu, pak dosáhneme posloupností příkazů: $> f := x\hat{}2 + y;\ a := subs(x = 3, y = sqrt(5), f);\ evalf(a);$.

Dále vysvětlíme, jak kreslit v programu Maple grafy funkcí dvou proměnných. Především je třeba si uvědomit, že je nutné přesně zadat množinu $M \subseteq R^2$, na které chceme graf funkce nakreslit. Základní příkaz má tvar $plot3d(f(x,y), x = a..b, y = c..d, P);$. V tomto případě je $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Struktura M může být i komplikovanější, například $M = \{[x,y]; a \le x \le b, u(x) \le y \le v(x)\}$. Symbol P v syntaktickém zápisu znamená možnost volby parametrů při kreslení obrázku. Parametr $view = zmin..zmax$ znamená volbu rozsahu zobrazovaných hodnot na ose z. Hodí se zejména u neohraničených funkcí. Dalším důležitým parametrem je parametr $grid = [m,n]$, který reguluje hustotu sítě bodů, v nichž se graf kreslí. Alternativní zadání počtu bodů sítě lze provést pomocí parametru $numpoints = n$. Znázornění vrstevnic se provede příkazem $contourplot(f(x,y), x = a..b, y = c..d);$. Získané obrázky lze vylepšovat volbou dalších parametrů, například specifikací parametru $style$ nebo volbou barvy parametrem $colour$.

Přímý výpočet limit funkce více proměnných není ve většině případů možný, protože neexistuje vhodný algoritmus. Výpočet lze někdy provést pomocí příkazu $limit(f(x,y), \{x = x_0, y = y_0\});$. Při vyšetřování limity funkce $f(x,y)$ v zadaném bodě $[x_0, y_0]$ mohou často pomoci limity vzhledem k podmnožinám okolí limitního bodu. Nejčastěji za takové podmnožiny volíme spojité křivky procházející tímto bodem. Například svazek přímek nebo svazek parabol. Použít můžeme i postupné limity. Velmi efektivní je rovněž transformace do polárních souřadnic.

Výpočet parciálních derivací lze provést dvěma způsoby. K symbolickému derivování používáme příkazu $diff$ pro výrazy a operátoru D pro funkce. Je-li objekt, který chceme derivovat, definován jako algebraický výraz, použijeme příkazu $diff$. Například smíšenou derivaci 5-ho řádu $f(x,y)$ podle proměnných x,x,y,y,y vypočteme příkazem $diff(f(x,y),x,x,y,y,y)$. Syntaxi zápisu lze zjednodušit na tvar $diff(f(x,y),x\$2,y\$3)$. Parciální derivaci objektu, který je definován jako funkce, lze vypočítat pomocí diferenciálního operátoru D. Syntaxe příkazu, kterým určíme parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné je tvaru $D[i](f)$. Příkaz $diff(f(x,y),x,x,y,y,y)$ má pak pomocí operátoru D vyjádření $D[1,1,2,2,2](f)$.

Gradient funkce $f(x,y)$ vypočteme pomocí příkazu $grad(f(x,y),[x,y])$;. Před jeho použitím je nutné zavolat knihovnu lineární algebry příkazem $with(linalg)$. Vektorové pole gradientů znázorníme příkazem $gradplot$. Příkaz zpřístupníme zavoláním knihovny $with(plots)$.

Zadání příkladů pro první cvičení

1. Definujte funkci $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+\sin y^3}{y^2-\ln x}}$. Zjistěte také, zda $f(2,3)>0.6$.

2. Pomocí příkazu *plot* nakreslete do jednoho obrázku následující grafy funkcí jedné proměnné: $x^2+1, 1-x, x-1, 2$. Kreslení proveďte na intervalu $\langle -2,2\rangle$. Místo příkazu *display* můžete použít příkaz $plot([x\hat{}2+1,1-x,x-1,2],t=-2..2)$;.

3. Pomocí příkazu *plot3d* nakreslete grafy následujících funkcí dvou proměnných: sedlo x^2-y^2, opičí sedlo $y(3x^2-y^2)$, střechu s prohnutým hřebenem $\frac{1}{5}y^2-3|x|$, údolí $7x^2-y^3$, horský hřbet protínající údolí $\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}$, horský hřbet, který se stává údolím $-y\sqrt{|x|}$. Grafy nakreslete na množině $\langle -3,3\rangle\times\langle -3,3\rangle$.

4. Na kruhu o poloměru 1 a se středem v počátku soustavy souřadnic nakreslete graf funkce $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. Pokud se vám obrázek nebude líbit a nedokážete ho vylepšit, zkuste příkaz $plot3d([u*\cos(v),u*\sin(v),1/u\hat{}2],u=0.1..1,v=0..2*Pi)$;.

5. Na množině $\langle -3,3\rangle\times\langle -3,3\rangle$ nakreslete grafy následujících funkcí:

$$\frac{1}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x^2}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x^2+y}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x^2y^2}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x^3-y^2}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x^3+y^2-xy}{e^{x^2+y^2}},\ \frac{x^3+y^2-x^2}{e^{x^2+y^2}},$$

Dále samostatně experimentujte a volte složitější tvary čitatelů, jako například $x^5-x^3+y^2, x^5+x^3-x+y^5-y^3$ a jim podobné.

6. Na množině $\langle -3,3\rangle\times\langle -3,3\rangle$ nakreslete grafy následujících funkcí: $\operatorname{arctg}(xy)$, $\operatorname{arctg}(|x|+|y|), \operatorname{arctg}(x^3-y), \operatorname{arctg}(x^3-y^2), \operatorname{arctg}(x^3-xy), \operatorname{arctg}(x^5-y^3+x^2)$.

7. Nakreslete kuželovou plochu, která je grafem funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ na čtverci $\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle$. Pak tutéž funkci nakreslete na kruhu $x^2+y^2\le 1$. Obor je nutné vyjádřit pomocí nerovnic $-1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$.

8. Na následujícím příkladu si názorně vysvětlíme princip, na základě kterého, se graf funkce dvou proměnných kreslí. Nakreslete nejprve paraboloid $f(x,y)=1-x^2-y^2$ nad množinou $\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle$. Pokud při volbě parametrů nezadáme položku *grid* je tento parametr nastaven automaticky na hodnotu $grid=[30,30]$. Tato hodnota znamená hustotu dělících bodů sítě, v nichž se provede výpočet funkčních hodnot. Změňte hodnotu $grid$ na $grid = [3,3]$ a $grid = [4,4]$ a pozorujte, jaký vliv má tato změna na výsledný obrázek.

9. Vypočtěte postupné limity funkce $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ v bodě $[0,0]$. Pokud již máme funkci f definovanou, lze výpočet postupných limit provést pomocí příkazů:
$> L_1 := Limit(f(x,0), x = 0) = limit(f(x,0), x = 0);$
$> L_2 := Limit(f(0,y), y = 0) = limit(f(0,y), y = 0);$.

10. Vypočtěte přímkové limity a limity po parabolách u funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x^4 + x^2}$. Pomocí příkazu $plot3d$ nakreslete graf zadané funkce a z obrázku vysvětlete výsledek předchozího výpočtu. Využijte stylu kreslení $pach\ and\ contour$.

11. Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y) = \dfrac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$, kde $[x,y] \neq [0,0]$ a $f(0,0) = 0$. Použijte blížení k limitnímu bodu po svazku parabol. Rovněž nakreslete graf funkce f na $\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$. Použijte stylu $style = patchcontour$ a $grid = [100,100]$. K nadefinování funkce $f(x,y)$ lze použít příkazu
$> f := proc(x,y)\ if\ x = 0\ and\ y = 0\ then\ 0\ else (x\^{}4 * y\^{}2)/(x\^{}8 + y\^{}4)\ fi\ end;$.
Limitu vzhledem ke svazku parabol vypočítáme příkazem
$> Limit(f(x, k * x\^{}2), x = 0) = limit(f(x, k * x\^{}2), x = 0);$.

12. Na kartézském čtverci $\langle -1,1\rangle^2$ nakreslete graf funkce $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + x^2}$. Tato funkce je klasickým příkladem nespojité funkce, která má přímkové limity v počátku rovny nule, zatímco limitní hodnoty po každé parabole procházející počátkem jsou různé. Proveďte výpočet těchto limit a také výpočet limity po transformaci do polárních souřadnic.

13. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^5}{\partial^3 x \partial^2 y}$ funkce $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$. Výpočet napište v přehledném tvaru pomocí $Diff$ a výsledek zjednodušte pomocí příkazu $simplify$. Dále prověřte větu o zaměnitelnosti smíšených parciálních derivací pro případ $[x,y,x,y]$ a $[y,x,x,y]$.

14. Výpočtem dokažte, že funkce $f(x,y) = \dfrac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2}$, kde $f(0,0) = 0$ má v bodě $[0,0]$ různé smíšené parciální derivace druhého řádu. tj. $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$. Je tato funkce v bodě $[0,0]$ spojitá? Začněte tím, že si nakreslíte graf funkce f, prohlédnete si průběh jeho vrstevnic a uděláte si vlastní úsudek. Graf kreslete na množině $\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$.

15. Pomocí příkazu $gradplot$ nakreslete vektorová pole gradientů následujících funkcí: $x + y, x^2 + y, x^2 + y^2, x^2 - y^2, x^3 + y$. Vektorová pole nakreslete na množině $\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$. Získaný obrázek vektorového pole můžete vylepšit například volbou parametru, který ovlivní barvu vektorů. Chcete-li například, aby vektory byly znázorněny červeně, provedete volbu parametru $colour = red$. Před použitím příkazu $gradplot$ je zapotřebí zavolat knihovnu $with(plots)$.

CVIČENÍ 2. TÉMA: EXTRÉMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH, DIFERENCIÁL, TAYLORŮV POLYNOM, IMPLICITNÍ FUNKCE.

Ve druhém cvičení se budeme věnovat řešení již některých složitějších otázek a problémů z diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Nejprve uvedeme seznam příkazů, které budeme v tomto cvičení používat nejčastěji.

Klíčová slova pro druhé cvičení

hessian, *nops*, *map*, *allvalues*, *minimize*, *maximize*, *location*, *extrema*, *mtaylor*, *readlib*(*mtaylor*), *implicitplot*, *implicitplot*3*d*, *implicitdiff*.

Mapleovská teorie

Vyšetření lokálních extrémů funkce $f(x, y)$ lze naprogramovat v MPJ, nebo provést pomocí příkazů *maximize* a *minimize*. Příkazem *maximize* nalezneme maximum funkce na intervalu $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Příkaz *minimize* vypočítá minimum. Příkaz má syntaxi $maximize(f(x, y),\ x = a..b,\ y = c..d,\ location)$. Parametr *location* způsobí, že jsou vypsány body, v nichž maximu, případně minimu dochází.

K výpočtu vázaných extrémů můžeme použít příkazu *extrema*. Syntaxe příkazu je tvaru $extrema(f(x, y), M, \{x, y\},' body')$. Příkaz *extrema* dává na výstupu maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y)$ na hranici množiny M a do proměnné $'body'$ ukládá souřadnice bodů, ve kterých extrém nastává.

K výpočtu Taylorova polynomu funkce více proměnných budeme používat proceduru *mtaylor*. Aby procedura fungovala, je ji zapotřebí zpřístupnit pomocí příkazu *readlib*(*mtaylor*);. Syntaxe příkazu, pomocí něhož vypočteme Taylorův polynom funkce $f(x, y)$ dvou proměnných $[x, y]$, řádu $n - 1$, v bodě $[x_0, y_0]$, je tvaru $mtaylor(f(x, y), [x = x_0, y = y_0], n)$; Pro výpočet Taylorova polynomu v bodě $[0, 0]$, lze v příkazu místo $[x = 0, y = 0]$ psát pouze $[x, y]$. U více proměnných se postupuje analogicky.

Při kreslení grafů křivek daných implicitně příkazem *implicitplot*, není možné zaručit, že obrázek bude vždy odpovídat realitě. Často pomůže parametrizace křivky například do polárních souřadnic. Derivaci funkce dané implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$, lze spočítat pomocí procedury *implicitdiff*. Plochy dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ nakreslíme pomocí příkazu *implicitplot*3*d*.

Zadání příkladů pro druhé cvičení

1. Nakreslete graf funkce $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$. Na obrázku ukažte, že zadaná funkce má dvě lokální maxima, jedno lokální minimum a dva sedlové body.

2. K ilustraci problematiky lokálních extrémů funkce dvou proměnných využijeme definice funkce $f(x, y)$ s parametry a, b, c. Pomocí posloupnosti příkazů

$> f := (a, b, c)- > c * exp(-(x - a)\hat{\ }2 - (y - b)\hat{\ }2);$
$> F := f(2, 3, 1) + f(2, -3, 2) + f(0, -2, 2) + f(-2, 1, 3);$
$> plot3d(F, x = -5..5, y = -5..5, grid = [50, 50]);$

nakreslete obrázek grafu funkce $F(x, y)$. Podle obrázku popište, kolik má funkce $F(x, y)$ lokálních extrémů. Nakreslete vrstevnice grafu.

3. Postup pro nalezení lokálních extrémů funkce více proměnných lze snadno naprogramovat v programovacím jazyku MPJ. Program budeme demonstrovat na funkci dvou proměnných $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. Podrobně si nejprve rozmyslete význam jednotlivých příkazů. Modifikace programu pro větší počet proměnných je snadná.

$> f := (x, y) -> 2 * x\hat{}3 + x * y\hat{}2 + 5 * x\hat{}2 + y\hat{}2;$
$> fx := D[1](f);\ fy := D[2](f);$
$> SB := solve(\{fx(x, y) = 0, fy(x, y) = 0\}, \{x, y\});$
$> with(linalg) :\ H := hessian(f(x, y), [x, y]);$
$> fxx := D[1, 1](f);\ det(H);$
$> for\ i\ from\ 1\ to\ nops(SB)\ do$
$> SB[i], simplify(subs(SB[i],\ [D1 = fxx(x, y),\ D2 = det(H)]));\ od;$

Dále aplikujte program na funkci $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$. V některých složitějších případech je zapotřebí se vyrovnat s existencí komplexních kořenů, které mohou vzniknout při řešení soustavy. Vyzkoušejte program například pro funkci $f(x, y) = x^4 - 3x^2y + 3y - y^3$.

4. Pomocí příkazu extrema vyšetřete vázaný extrém funkce $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3$ s vazbou $V :\ x^2 + y^2 = 1$. Postupovat můžete takto:
$> f := (x, y) -> x\hat{}2 - y\hat{}2 + 3;$
$> M := x\hat{}2 + y\hat{}2 = 1;$
$> extrema(f(x, y), M, \{x, y\}, 'body');$
$> body;$

5. Výpočtem dokažte, že funkce $f(x, y) = \cos y - |x|$, není diferencovatelná v bodech $[0, y]$. Návod: Vypočtěte, že v bodech $[0, y]$ neexistují parciální derivace podle x.

6. V programovacím jazyku MPJ napište program, který spočítá hodnotu diferenciálu $d_h f(x_0, y_0)$. Program pak aplikujte na funkci $f(x, y) = x^3 + \ln(xy)$, bod $A = [1, 3]$ a přírůstek $h = (0.2, -0.01)$. Výsledek $0.79\overline{6}$.

7. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$ v bodě $[3, 2]$. Pak do jednoho obrázku nakreslete nalezenou tečnou rovinu spolu s grafem zadané funkce. Výpočet můžete provést například pomocí posloupnosti příkazů
$> f := (x, y) -> 4 - (x\hat{}2 + y\hat{}2);$
$> fx(3, 2) := subs(x = 3, y = 2, diff(f(x, y), x));$
$> fy(3, 2) := subs(x = 3, y = 2, diff(f(x, y), y));$
$> tecnarovina := (x, y) -> f(3, 2) + fx(3, 2) * (x - 3) + fy(3, 2) * (y - 2);$
$> tecnarovina(x, y);$
$> G1 := plot3d(f(x, y), x = -4..4, y = -4..4) :$
$> G2 := plot3d(tecnarovina(x, y), x = -2..2, y = -2..3) :$
$> with(plots) :$
$> display3d(\{G1, G2\});$
Uvedený postup lze snadno modifikovat pro jiné zadání funkce a bodu.

8. Příkazem *mtaylor* spočtěte Taylorův polynom $T_5(x,y)$ pátého řádu funkce $f(x,y) = \sqrt{e^x + \sin 2y}$ v bodě $[0,0]$. Dejte pozor na zadání řádu! Aby příkaz fungoval je ho zapotřebí nejprve zavolat z knihovny příkazem $readlib(mtaylor)$.

9. Nejprve nakreslete graf funkce $f(x,y) = \sin x \cos x$ v okolí bodu $[0,0]$. Volte $\langle -0.5, 0.5\rangle \times \langle -0.5, 0.5\rangle$ a $\langle -\pi, \pi\rangle \times \langle -\pi, \pi\rangle$. Pak pomocí příkazu *mtaylor* vypočtěte Taylorův polynom 5-ho řádu funkce f v bodě $[0,0]$. Nakreslete graf nalezeného polynomu a srovnejte ho s grafem funkce f.

10. Vypočtěte Taylorův polynom $T_5(x,y)$ funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^3 + y^2)$ v bodě $[-1,1]$ a nakreslete tento polynom na intervalu $\langle -3, 3\rangle$. Postupovat můžete takto:

$> f := (x,y) -> arctan(x\hat{}3 + y\hat{}2);$

$> T5 := mtaylor(f(x,y), [x=-1, y=1], 6);$

$> plot3d(T5, x=-3..3, y=-3..3, view=5..5, colour=blue);$

11. Pomocí příkazu *implicitplot* prozkoumejte křivky v rovině, které jsou dány implicitně následujícími rovnicemi:

a) $e^{x-y^2} - xy = 1$, $[x,y] \in \langle -2, 2\rangle^2$.

b) $e^{x^2+y} - x^2 - y^4 = 0$, $[x,y] \in \langle -3, 3\rangle \times \langle -3, 10\rangle$.

a) $e^{xy} - x^2 + y^3 = c$, $c \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$, $[x,y] \in \langle -2, 2\rangle^2$.

12. Nalezněte počet reálných řešení následující soustavy nelineárních rovnic: $x^3 + y^3 - 7xy + 1 = 0$, $x^3 - y^2 - 2xy + 1 = 0$. Vyšetřování soustavy omezte na množinu $M = \langle -4, 4\rangle^2$. Postupujte tak, že do jednoho obrázku nakreslíte křivky dané implicitně zadanými rovnicemi. Použijte příkazu *display*. Pro lepší orientaci v obrázku použijte parametru *colour*, který způsobí barevné rozlišení křivek. Počet řešení soustavy je roven počtu průsečíků.

13. Na množině $\langle -3, 3\rangle^2$ nejprve nakreslete křivku zadanou implicitně rovnicí $xy + y^2 - xe^x = 0$. Pomocí příkazu $implicitdiff$ pak vypočtěte derivaci y' funkce $y = y(x)$ dané implicitně. Zjistěte, zda je tato funkce v okolí bodu $[1, ?]$ rostoucí, případně klesající. Je hodnota symbolu ? určena jednoznačně? Vysvětlete.

14. Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ vyjadřuje kružnici. Zjistěte, jak vypadá křivka daná rovnicí $x^3 + y^3 = 1$. Je uzavřená stejně jako kružnice? Příkazem *implicitderive* vypočítejte třetí derivaci funkce $y = y(x)$ dané implicitně touto rovnicí. Zjistěte, jakému geometrickému objektu třetí derivace odpovídá. Volte $grid = [100, 100]$.

15. Pomocí příkazu *implicitplot3d* prozkoumejte plochy v trojrozměrném prostoru, které jsou dány implicitně následujícími rovnicemi:

a) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$,

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$,

c) $x^4 + y^4 + z^4 + 5xyz = c$, $c \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$,

d) $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 1$.

Hodnotu parametru *grid* volte tak, že $grid = [25, 25, 25]$, případně $grid = [30, 30, 30]$. Obrázky kreslete postupně na intervalech $\langle -2, 2\rangle^3$, $\langle -3, 3\rangle^3$ a $\langle -5, 5\rangle^3$. V případě rovnice b) je lepší místo koeficientu 2 zvolit 2.01. Obrázek pak lépe odpovídá realitě.

CVIČENÍ 3. TÉMA: INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH, KŘIVKY A PLOCHY DANÉ PARAMETRICKY.

Třetí a závěrečné cvičení druhého semestru je věnováno úlohám z integrálního počtu více proměnných a také křivkám a plochám daným parametricky. Nejprve uveďme přehled nových příkazů s krátkým komentářem o jejich významu a syntaxi.

Klíčová slova pro třetí cvičení

$with(student)$, $Doubleint$, $Tripleint$, $value$, $spacecurve$,

Mapleovská teorie

Dvojný integrál z funkce $f(x,y)$ přes elementární oblast M typu (x,y), tj. $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, a \le x \le b, u(x) \le y \le v(x)\}$, vypočteme pomocí příkazu $Doubleint$ takto: $A := Doubleint(f(x,y), y = u(x)..v(x), x = a..b); value(A);$. Analogicky pomocí $Tripleint$ vypočítáme trojný integrál z $f(x,y,z)$ přes oblast $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, a \le x \le b, u(x) \le y \le v(x), U(x,y) \le z \le V(x,y)\}$. Příkaz má tvar $A := Tripleint(f(x,y,z), z = U(x,y)..V(x,y), y = u(x)..v(x), x = a..b); value(A);$. Příkazy $Doubleint$ a $Tripleint$ je nutné nejprve zpřístupnit zavoláním knihovny ve které leží. To provedeme příkazem $with(student)$.

Křivku C zadanou parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle a,b\rangle$, lze nakreslit příkazem $plot([\varphi(t), \psi(t), t = a..b]);$. Prostorové křivky nakreslíme pomocí příkazu $spacecurve$. Aby příkaz fungoval, je třeba zavolat knihovnu $with(plots)$. Plochu zadanou parametricky nakreslíme již známým příkazem $plot3d$. Syntaxe příkazu je analogická jako u křivek.

Zadání příkladů pro třetí cvičení

1. Pomocí příkazu $Doubleint$ vypočtěte dvojný integrál z funce $f(x,y) = y$ přes oblast M typu (x,y), kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^3, -2 \le x \le 1,\ x^2 + 2 \le y \le 4 - x\}$. Úlohu vyřešíte posloupností příkazů:
$> with(student):\ A := Doubleint(y, y = x\hat{}2 + 2..4 - x, x = -2..1);\ value(A);$

2. Rozhodněte, který z dvojných integrálů $\int_0^3(\int_0^2(x+y)dx)dy$, $\int_2^4(\int_1^3(x+y)dx)dy$ je větší. Porovnejte plochy integračních oborů podle velikosti a geometricky vysvětlete proč je integrál přes větší obor menší.

3. Pomocí příkazu $Tripleint$ vypočtěte trojný integrál z funkce $f(x,y,z) = xy + z$ přes oblast $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 2 - x - 2y\}$ typu (x,y,z). Odpovídající příkazy mají tvar:
$> B := Tripleint(xy + z, z = 0..2 - x - 2 * y, y = 0..1 - x, x = 0..1);\ value(B);$

4. Těžiště T trojrozměrného tělesa M, s konstantní hustotou, můžeme vypočítat pomocí trojrozměrných integrálů takto:

$$T = \left[\frac{\iiint\limits_M x\ dxdydz}{\iiint\limits_M dxdydz}, \frac{\iiint\limits_M y\ dxdydz}{\iiint\limits_M dxdydz}, \frac{\iiint\limits_M z\ dxdydz}{\iiint\limits_M dxdydz}\right].$$

Předpokládejme, že těleso M lze popsat jako elementární oblast typu (x,y,z), tedy $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x), F(x,y) \le z \le G(x,y)\}$. Napište posloupnost mapleovských příkazů, pomocí níž vypočítáte těžiště T tělesa M. Výpočet proveďte pro $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, -2 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 4,\ 0 \leq z \leq y\}$. Těleso nakreslete. Poznamenejme ještě, že těžiště tělesa, které pomocí uvedených vztahů vypočítáme, je nalezeno pro případ homogenního gravitačního pole. V tomto případě je těžiště a hmotný střed tělesa tentýž bod.

5. Prozkoumejte, jak vypadají následující rovinné křivky zadané parametrickými rovnicemi. K jejich nakreslení použijte příkazu *plot*.
a) $x = t^3 - 2t, y = t^3 - 2t^2, t \in \langle -2, 2.5\rangle$.
b) $x = t^3 - 2t, y = 3t^2 - t^4, t \in \langle -2, 2\rangle$.
c) $x = \dfrac{t + t^3}{1 + t^4}, y = \dfrac{t - t^3}{1 + t^4}, t \in \langle -2, 2\rangle$.
d) $x = 1 + \cos t, y = t(1 - \cos t), t \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$, resp. $t \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$.
Další příklady zajímavých obrázků křivek můžete získat modifikací koeficientů, nebo mocnin v zadaných úlohách.

6. Následující křivka je příkladem uzavřené křivky v prostoru. Pomocí příkazu *spacecurve* nakreslete, jak tato křivka vypadá. Parametrické rovnice křivky jsou $x = -10\cos t - 2\cos 5t + 15\sin 2t, y = -15\cos 2t + 10\sin t - 2\sin 5t, z = 10\cos 3t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

7. Vyšetřování vázaných extrémů funkce $f(x, y)$ vzhledem k vazbě $g(x, y) = 0$ lze geometricky interpretovat jako hledání extrémů na prostorové křivce. Uvažujme funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$ a vazbu $x^2 - y = 1$. Nejprve pomocí příkazu *extrema* nalezneme vázané extrémy zadané funkce.
$> with(student):\ M := x\hat{}2 - y = 1;$
$> extrema(x\hat{}2 - y\hat{}2, M, x, y, 'body');$
$> allvalues(body);$
Posloupností dalších příkazů nakreslíme do jednoho obrázku graf funkce $f(x, y)$, křivku odpovídající vazebné podmínce a prostorovou křivku, na které extremální hodnoty hledáme. Z obrázku, je dobře patrná geometrická podstata problému.
$> with(plots):$
$> A := plot3d(x\hat{}2 - y\hat{}2 + 3, x = -2..2, y = -2..2):$
$> B := spacecurve([t, t\hat{}2 - 1, 0], t = -2..2, color = blue):$
$> C := spacecurve([t, t\hat{}2 - 1, t\hat{}2 - (t\hat{}2 - 1)\hat{}2 + 3], t = -2..2, color = red):$
$> display3d(\{A, B, C\});$

8. Příkazem *plot3d* nakreslete válec s výškou 5 a poloměrem 1. Při kreslení obrázku použijte transformace do válcových souřadnic. Válcovou plochu pak nakreslíte pomocí příkazu $plot3d([\cos(u), \sin(u), v], u = 0..2 * Pi, v = 0..5);$.

9. Nakreslete válcovou plochu, jejíž řídící křivka je kubický polynom $y = x^3 - 3x + 1$. Výška válcové plochy je 4. Příkaz: $plot3d([x, x^3 - 3 * x - 1, z], x = -2..2, z = 0..4);$.

10. Nakreslete plochu, tak zvaný anuloid, která je dána parametrickými rovnicemi $x = (a + b\cos v)\cos u,\ y = (a + b\cos v)\sin u,\ z = b\sin v$, kde $u, v \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Koeficienty a, b volte například $a = 2, b = 1$. Pak a, b změňte a podle obrázků, které získáte, zkuste určit jejich význam. Anuloid nakreslíte příkazem
$plot3d([(2 + \cos(v)) * cos(u), (2 + \cos(v)) * \sin(u), \sin(v)], u = 0..2 * Pi, v = 0..2 * Pi);$.