3 MAPLEOVSKÁ CVIČENÍ
PRO ZÁKLADNÍ KURZ MATEMATIKY

RNDr. Jiří Klaška, Dr.

• Internetová adresa osobní stránky: http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/klaska
• E-mail: klaska@um.fme.vutbr.cz

Úvod

Maple je program, který umí provádět nejrozmanitější matematicé výpočty. Při své práci ho využívají nejen matematici, ale také technici a pracovníci všech oborů, kde je zapotřebí matematika. Samotný název programu je zkratka z anglického "mathematics pleasure" = matematika potěšením. Program má usnadňit práci všem, kdo potřebují něco vypočítat. Maple je průběžně zdokonalován a vylepšován. Tomuto procesu odpovídají jednotlivé verze programu. Následující text by vám měl pomoci naučit se s tímto programem pracovat a používat ho k vlastním výpočtům. Text obsahuje pouze základní informace, ale umožní vám kvalitně se připravit na praktická cvičení. V rámci tří cvičení u počítače budete řešit rozmanité úlohy a problémy z matematiky, které odpovídají především látce prvního semestru.

§1. Základní informace.

Znak $>$ se nazývá prompt. Tímto znakem začíná příkazový řádek. Na příkazový řádek napíšeme příkaz. Každý příkaz je zakončen středníkem. Provedení příkazu se uskuteční stisknutím klávesy $<$ ENTER $>$. Pokud nechceme, aby po realizaci příkazu následoval výpis výsledku, ukončíme příkaz dvojtečkou místo středníkem. Toho lze použít například pro potlačení tisku mezivýsledků, které nás nezajímají. Napíšeme-li za prompt znak $\#$, další text na řádku se chápe jako poznámka. Pokud byla v příkazu zjištěna syntakticá chyba, vrátíme se kurzorem zpět a chybu opravíme. Maple rozlišuje mezi malými a velkými písmeny. Vše o příkazech Maple se lze dovědět z Helpu = nápovědy. Viz §3.

§2. Syntaxe

Je zřejmé, že i při jednoduchých výpočtech je zapotřebí umět formálně správně zapsat příkaz, pomocí kterého se má výpočet provést. Pravidla, jak příkaz správně zapsat se nazývají syntaxe. Chceme-li například proměnné x přiřadit hodnotu a, provedeme to příkazem $x := a;$. Hodnota a nemusí být číselná, může se jednat například o algebraický výraz. Přiřazovací příkaz := lze proto použít k definici nových objektů. Nyní popíšeme, jak v Maple zapisovat základní funkce, operátory a význačné konstanty. Syntaxe je zřejmá z následujících tabulek.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Matematika	Maple	Matematika	Maple	Matematika	Maple
$a \cdot b$	$a * b$	π	Pi	$A \cap B$	$A\ intersect\ B$
$a : b$	a/b	e	$E, exp(1)$	$A \cup B$	$A\ union\ B$
a^b	$a * *b, a\char`^b$	i	$I, sqrt(-1)$	$A - B$	$A\ minus\ B$
$\neq$	$<>$	∞	$infinity$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha\ and\ \beta$
$\geq$	$>=$	$-\infty$	$-infinity$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha\ or\ \beta$

Matematika	Maple	Matematika	Maple	Matematika	Maple
$\|x\|$	$abs(x)$	$ln(x)$	$ln(x)$	$cotg(x)$	$cot(x)$
$\sqrt{x}$	$sqrt(x)$	$log_a(x)$	$log[a](x)$	$arcsin(x)$	$arcsin(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$x\char`^(1/n)$	$sin(x)$	$sin(x)$	$arccos(x)$	$arccos(x)$
$n!$	$n!$	$cos(x)$	$cos(x)$	$arctg(x)$	$arctan(x)$
e^x	$exp(x)$	$tg(x)$	$tan(x)$	$arccotg(x)$	$arccot(x)$

§3. Práce s helpem

Kliknutím na položku help v nabídkové liště, se objeví okno, v němž můžeme vybírat z další nabídky. Zvolme položku Using Help. Středem našeho zájmu bude dále položka Mathematics. Ta nabízí řadu dalších tématických okruhů ze kterých můžeme vybírat. Tyto tematické okruhy osahují další zjemnění. Takto se postupnými volbami propracujeme až ke konkrétním příkazům. Kliknutím na vybraný příkaz otevřeme okno s informacemi o tomto příkazu. Informace mají následující strukturu: popis co příkaz dělá (function), syntaktický tvar příkazu, tj. jak příkaz správně napsat (calling sequences), popis parametrů (parameters), přehled (synopsis), příklady (examples) a nabídku dalších příkazů tematicky souvisejících s daným příkazem (see also). Potřebujeme-li informace o konkrétním příkazu, lze použít položku helpu s označením Topic Search. Stejný efekt má při konkrétním dotazu pokud na příkazový řádek napíšeme otazník a za něj předmět dotazu. Dokumentace helpu je velmi rozsáhlá a lze ji studovat mnoho hodin. Práce s helpem je snadná a příjemná. Příklady z helpu lze přenést přes schránku na příkazový řádek a příkaz si vyzkoušet. Text helpu je v angličtině.

§4. Mapleovský programovací jazyk MPJ

Složité výpočty lze provádět pomocí příkazů, které mají strukturu programu podobnou Pascalu. Vysvětleme si, jak lze v MPJ naprogramovat cykly a jednoduché rozhodovací situace.

1. Příkaz $while$ je příkaz, který opakuje posloupnost příkazů P tak dlouho, dokud je podmínka Q splněna. Jeho syntaxe je tvaru

$$while\ Q\ do\ P\ od;.$$

2. Dalším příkazem, kterým lze naprogramovat cyklus je příkaz for. Jeho syntaxe má tvar

$$for\ i\ from\ j\ by\ k\ to\ n\ do\ P\ od;.$$

Příkaz funguje tak, že indexové proměnné i se přiřadí počáteční hodnota j. Pokud i je menší nebo rovno n provede se posloupnost příkazů P. Dále se i zvětší o krok k a proces se opakuje. Poslední opakování nastane, když hodnota i dosáhne poprvé hodnoty n. Tím cyklus končí. Speciálně, volíme-li počáteční hodnotu $j = 1$ a krok $k = 1$, lze cyklus zapsat ve tvaru $for\ i\ to\ n\ do\ P\ od$;. Příkaz $break$ uvnitř cyklů $while$ a for způsobí bezprostřední ukončení tohoto cyklu.

3. Podmíněné provedení posloupnosti příkazů $P1$, nebo posloupnosti příkazů $P2$ lze provést pomocí příkazu $if - then - else - fi$. Jeho syntaxe má tvar

$$if\ Q\ then\ P1\ else\ P2\ fi;.$$

Nejprve je vyhodnocena podmínka Q. Má-li logickou hodnotu $true$, provede se posloupnost příkazů $P1$. Je-li hodnota $false$, realizuje se posloupnost příkazů $P2$. Příkaz lze použít i v jednodušší formě $if\ Q\ then\ P\ fi$; a má ten význam, že je-li podmínka Q splněna, provede se P. Podrobné zvládnutí MPJ vyžaduje samostatné studium.

CVIČENÍ 1. ZÁKLADY MATEMATIKY

Úvodní cvičení bude věnováno úlohám, které svou rozmanitostí nejlépe vystihnou možnosti Maple. Převážná část těchto úloh odpovídá učivu střední školy. Zejména se budeme věnovat úpravám algebraických výrazů, výpočtu funkčních hodnot a řešení rovnic. Zařazeny jsou rovněž úlohy o významných číslech, jakými jsou například prvočísla, nebo známé matematické konstanty e a π. Hlavním cílem cvičení je ale naučit se základní mapleovské komunikaci s počítačem, editovat příkazy, opravovat syntaktické chyby a naučit se pracovat s nápovědou=heplem. Uvedeme proto nejprve tabulku, která shrnuje hlavní klíčová slova=příkazy, které budeme v prvním cvičení používat.

Klíčová slova pro základy matematiky

$ifactor$,	$isprime$,	$length$,	$time$,	$evalf$,	$simplify$,	$factor$,
$expand$,	$subs$,	$solve$,	$fsolve$,	$inequal$,	sum,	$plot$.

Je-li definován algebraický výraz V, pak jeho zjednodušení provedeme pomocí příkazu $simplify(V)$. Je-li zapotřebí V rozložit v součin, použijeme $factor(V)$. Opačný efekt má použití příkazu $expand(V)$, který výraz V roznásobí. Je-li třeba dosadit do výrazu V za proměnnou x, která se ve V vyskytuje výraz z, použijeme příkaz $subs(x = z, V)$. Hodnotu výrazu V s přesností na k míst spočteme příkazem $evalf(V, k)$. Příkazem $solve(V = 0, x)$ vyřešíme rovnici $V = 0$ vzhledem k proměnné x. Příkaz $fsolve(V = 0, x)$ nalezne přibližné řešení. Graf funkce f proměnné x na intervalu $\langle a, b\rangle$ nakreslíme příkazem $plot(f, x = a..b)$. Je-li třeba omezit rozsah osy y na interval $\langle c, d\rangle$, použijeme $plot(f, x = a..b, y = c..d)$.

1. Vyberte z předchozí tabulky klíčová slova, která nebyla vysvětlena a z helpu zjistěte jaký je jejich smysl a jak se používají. Použijte příkazu $>$? *klíčové slovo*;.
2. Zjistěte, kolik cifer má číslo 777!. Použijte příkazu $length$. Použití příkazu $length$ nastudujte z nápovědy.
3. Spočtěte Ludolfovo číslo π na 100 cifer. Totéž proveďte pro Eulerovo číslo e. Pak výpočet zpřesněte na 1000 cifer. Pro čísla π a e platí následující vztahy:

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots),$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots.$$

Na základě nich napište mapleovské programy s cyklem, které určí součet prvních sto členů uvedených řad. (V roce 2000 bylo číslo π vypočteno na více než 206 miliard desetinných míst.)
4. Rozložte v součin prvočísel číslo $m = 2^{101} - 1$. Pomocí příkazu $time$ zjistěte, jak dlouho bude výpočet trvat. Rozklad proveďte příkazem $ifactor$. Postupovat můžete následovně: $t := time()$; výpočet; $T := (time() - t) * seconds$;

5. Napište program, který nalezne 83 člen Fibonacciho posloupnosti $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, která je definována vztahem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, f_1 = 1, f_2 = 1$. Je f_{83} složené číslo?
6. Pomocí příkazu $evalf$ spočtěte na 10, 20 a 30 desetinných míst $e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}}$.
7. Ověřte, že platí rovnost $\sqrt{2\sqrt{19549}+286} = \sqrt{113} + \sqrt{173}$.
8. Roznásobte výraz $(1-2x)^5(x+y)^2(y+1)^3$. Použijte příkaz $expand$.
9. Rozložte v součin mnohočlen $x^4+2x^3+8x^2+7x-18$. Použijte příkaz $factor$.
10. Pomocí příkazu $subs$ dosaďte za x do polynomu $x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576$ hodnotu $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ a ověřte, že tato hodnota je jeho kořenem.
11. Do výrazu $\frac{a+b}{a-b}$ dosaďte za a hodnotu $\frac{x}{x-y}$ a za b hodnotu $\frac{y}{x+y}$. Do vzniklého výrazu dále dosaďte za x hodnotu $\ln 3$ a za y hodnotu $\sin 3$. Příkazem $evalf$ spočtěte hodnotu tohoto výrazu.
12. Definujte výraz V a pomocí příkazu $simplify$ ho zjednodušte.

$$V = \frac{\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y}}.$$

13. Definujte množiny $A = \{1,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ a spočtěte $B-((A\cap B)\cup(B-A))$.
14. V MPJ napište program, který vytvoří množinu všech prvočísel ležících mezi čísly 10^{10} a $10^{10}+100$. K testování prvočíselnosti použijte příkaz $isprime$. Kolik prvků tato množina má?
15. Vypočtěte součet S třetích mocnin prvních 19-ti přirozených čísel. Výpočet můžete provést naprogramováním cyklu, nebo příkazem sum.

$$S = \sum_{n=1}^{19} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 19^3.$$

16. Příkazem $solve$ řešte kvadratickou rovnici $x^2-17x+3=0$. Pak nalezněte přibližné řešení pomocí příkazu $fsolve$. Správnost výpočtu ověřte tak, že příkazem $plot$ nakreslíte graf paraboly odpovídající polynomu na levé straně rovnice a podíváte se, kde graf protíná osu x. Graf nakreslete na intervalu $\langle -3, 20\rangle$.
17. Řešte kubickou rovnici $x^3-2x^2-x+3=0$ a dále nakreslete geometrické řešení úlohy příkazem $plot(f, x=-3..3, y=-5..5)$.
18. Pomocí příkazu $solve$ vyřešte soustavu lineárních rovnic $x-y=2, x+y=1$. Do jednoho obrázku pak nakreslete grafy obou přímek a ověřte, že nalezené řešení odpovídá průsečíku. Použití příkazu $solve$ pro soustavy rovnic nastudujte z helpu.
19. Zjistěte, jaká část roviny je určena nerovnostmi $x<2$, $y>-2$, $y>x-2$, $y<2x+1$. Použijte příkazu $inequal$.
20. Nakreslete všech pět platonovských těles, která existují. Tato tělesa jsou pravidelný čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. Klíčová slova pro tato tělesa jsou *tetrahedron*, *hexahedron*, *octahedron*, *dodecahedron* a *icosahedron*. Nejprve je třeba pomocí příkazu *with*(*plots*) zavolat knihovnu, v níž leží speciální příkazy pro kreslení obrázků. Nakreslit jednotlivá tělesa pak lze příkazem *polyhedraplot*([0, 0, 0], *polytype* = *název tělesa*).

CVIČENÍ 2. LINEÁRNÍ ALGEBRA

Ve druhém cvičení se budeme věnovat lineární algebře a analytické geometrii. Nejprve uvedeme seznam příkazů, které budeme v tomto cvičení používat nejčastěji.

Klíčová slova pro lineární algebru

with(*linalg*),	*vector*,	*dotprod*,	*crossprod*,	*array*,	*matrix*,
evalm,	*det*,	*transpose*,	*inverse*,	*rank*,	*adjoint*
gausselim,	*linsolve*,	*charpoly*,	*eigenvals*,	*eigenvects*.	

Některé z příkazů lze použít přímo, některé fungují až po zavolání knihovny lineární algebry. To provedeme příkazem $with(linalg)$. Vektor $v = (v_1, \dots, v_n)$ definujeme příkazem $v := vector([v_1, \dots, v_n])$. Skalární součin vektorů u, v pak spočteme pomocí příkazu $dotprod(u, v)$ a jejich vektorový součin (pro $n = 3$) příkazem $crossprod(u, v)$. Matici $A = (a_{ij})$ typu m/n můžeme v definovat příkazem $A := matrix([[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, \dots, a_{mn}]])$, nebo též analogicky příkazem $A := array([[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, \dots, a_{mn}]])$. Jsou-li A, B matice, pak jejich součet, rozdíl a součin spočteme pomocí příkazů $evalm(A + B)$, $evalm(A - B)$ a $evalm(A\& * B)$. Součin čísla c a matice A vypočteme $evalm(c * A)$. Je-li A čtvercová, lze vypočítat její determinant $det(A)$, nalézt adjungovanou matici $adjoint(A)$ a je-li A regulární, spočítat inverzní matici $inverse(A)$. Místo příkazu $inverse$ lze použít příkaz $evalm(A\hat{}(-1))$. Hodnost matice A vypočteme příkazem $rank(A)$. Příkaz $gausselim$ převede matici na schodovitý tvar a pomocí příkazu $linsolve(A, b)$ vyřešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$. Příkazem $charpoly$ vypočteme charakteristický polynom matice, příkazem $eigenvals$ její vlastní hodnoty a příkazem $eigenvects$ vlastní vektory. Použití klíčových slov nastudujte podrobně z helpu. Než začnete řešit jednotlivé úlohy, zavolejte příkazem $with(linalg)$ knihovnu lineární algebry a podívejte se, jaké další příkazy obsahuje.

1. Pomocí příkazu *matrix* definujte matice A, B, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Vypočtěte hodnost matice A, její determinant a inverzní matici A^{-1}. Použijte příkazů *rank*, *det* a *inverse*.

3. Spočtěte pátou mocninu inverzní matice k matici A.

4. Na maticích A, B ověřte, že platí vztah $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Čemu je $\det(AB)$ roven?

5. Zjistěte, zda pro matice A, B platí obecně známý vztah $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Pokud rovnost neplatí, pokuste se vysvětlit proč.

6. Příkazem *adjoint* vypočtěte adjungovanou matici k matici $A^T + 2AB - B^T$.

7. Řešte maticovou rovnici $AX + B = AB$, kde $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

8. Definujte vektory $u = (1, 1, 1)$ a $v = (2, 2, 2)$. Spočtěte pomocí *dotprod* jejich skalární součin a pomocí *crossprod* jejich vektorový součin.

9. Pomocí smíšeného součinu vektorů spočtěte objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $u = (1,1,3), v = (3,1,3), w = (2,1,4)$. Platí $V = |(u \times v)w|$.
10. Rozhodněte, zda jsou vektory $u = (2,1,-1,3)$, $v = (1,2,3,4)$, $w = (3,3,2,7)$ lineárně závislé. Můžete postupovat tak, že ze zadaných vektorů sestavíte matici a naleznete její hodnost.
11. Je dána soustava lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5 \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4 \end{aligned}.$$

Definujte matici soustavy A a rozšířenou matici soustavy B. Pomocí příkazu *gausselim* převeďte matice A, B na schodovitý tvar a získané tvary porovnejte. Spočtěte jejich hodnosti a vysvětlete, zda je soustava řešitelná a kolik řešení má. Pak soustavu vyřešte příkazem *linsolve*.
12. Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spočtěte charakteristický polynom matice A, její vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory. Použijte příkazů *charpoly*, *eigenvals* a *eigenvects*. Výsledek příkazu *eigenvects* je tvaru $[x_i, n_i, \{v_{1i}, \ldots, v_{n_i i}\}]$, kde x_i je vlastní číslo, n_i je algebraická násobnost čísla x_i a $\{v_{1i}, \ldots, v_{n_i i}\}$ množina bázových vektorů odpovídající x_i. Dále do nalezeného charakteristického polynomu dosaďte matici A a ověřte, že vyjde nulová matice. (Cayley-Hamiltonova věta.)
13. Do jednoho obrázku nakreslete kuželosečky $x^2+y^2 = 1$, $x-y^2 = 0$. Postupujte tak, že nejprve zavoláte knihovnu pro kreslení obrázků $with(plots)$. Pak lze použít příkazu *implicitplot*, kterým lze kreslit grafy křivek, které nejsou funkcemi. Úlohu pak vyřešíte posloupností příkazů

$> f := implicitplot(x\hat{}2 + y\hat{}2 = 1, x = -3..3, y = -3..3):$
$> g := implicitplot(x - y\hat{}2 = 0, x = -3..3, y = -3..3):$
$> display(f, g);$

Z obrázku zjistěte, v kolika bodech se kuželosečky protínají. Podobně vyšetřete vzájemnou polohu kuželoseček $x^2 - y^2 = 1$ a $y^2 = x + 2$.
14. Příkazem *factor* ověřte, že kvadratická křivka $2x^2 - xy - 3y^2 - 9x + 16y - 5 = 0$ je dvojicí přímek. Přímky nakreslete.
15. Kvadriky jsou plochy v trojrozměrném prostoru zadané kvadratickou rovnicí

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz+2A_{14}x+2A_{24}y+2A_{34}z+A_{44}=0.$$

Kvadriky jsou analogií kuželoseček. Jejich studium je významnou částí analytické geometrie. Cílem cvičení je nakreslit nejdůležitější z těchto ploch. K jejich zobrazení použijeme příkazu *implicitplot3d*.

(a) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ elipsoid
(b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ jednodílný hyperboloid
(c) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ dvoudílný hyperboloid
(d) $x^2 + y^2 - z = 0$ eliptický paraboloid
(e) $x^2 - y^2 - z = 0$ hyperbolický paraboloid

CVIČENÍ 3. MATEMATICKÁ ANALÝZA

Třetí a závěrečné cvičení prvního semestru je věnováno úlohám z matematické analýzy v $\mathbb{R}$. Řadu příkazů, které budeme potřebovat již známe z předchozích cvičení. Jsou to například příkaz *plot* pro kreslení grafů funkcí, příkaz *subs* pro dosazení a příkaz *evalf* pro výpočet funkčních hodnot. Nyní uveďme přehled nových příkazů s krátkým komentářem o jejich významu a syntaxi.

Klíčová slova pro matematicou analýzu

quo,	*rem*,	*convert*,	*parfrac*,	*limit*,	*left*
right,	*diff*,	*taylor*,	*readlib(mtaylor)*,	*int*	

Příkaz $quo(f, g)$ určí podíl polynomů f, g a příkaz $rem(f, g)$ nalezne zbytek po dělení. Rozložit racionálně lomenou funkci f na parciální zlomky lze příkazem $convert(f, parfrac, x)$. Limitu funkce $f(x)$ v bodě $x = a$ vypočteme příkazem $limit(f(x), x = a)$. Výpočet limity zprava resp. zleva se provede specifikací parametru *right* resp. *left*. Detaily nastudujte z helpu. Derivaci funkce $f(x)$ podle proměnné x vypočteme příkazem $diff(f(x), x)$ a derivaci n-tého řádu příkazem $diff(f(x), x\$n)$. Taylorův polynom k-tého řádu funkce $f(x)$ v bodě x_0 vypočítáme příkazem $taylor(f(x), x = x_0, k)$. Z helpu nastudujte, jak se tento příkaz liší od příkazu *mtaylor*. Neurčitý integrál funkce $f(x)$ vypočteme příkazem $int(f(x), x)$ a určitý integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ příkazem $int(f(x), x = a..b)$. Je-li $a = -\infty$, nebo $b = \infty$, pak posledním příkazem určíme nevlastní integrál. Pokud v příkazech $limit, diff$ a int zaměníme počáteční malé písmeno za velké, pak se příslušný výpočet neprovede. Maple vytvoří pouze formální zápis úlohy, kterou chceme řešit. Tato varianta příkazů slouží ke kontrole zadání a přehledné formě zápisu výsledku.

1. Jaký je zbytek po dělení polynomu $f(x) = 2x^6 - x^5 + 3x^3 + x - 5$ polynomem $g(x) = x^3 + 4x^2 - x + 2$? Čemu je roven podíl? Příklad propočítejte samostatně doma a pomocí Maple si zkontrolujte výsledky. Zopakujte si algoritmus dělení polynomu polynomem.
2. Proveďte rozklad polynomu $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$ nad množinou $\mathbb{R}$ a nad množinou $\mathbb{C}$. Příkazem *plot* nakreslete graf tohoto polynomu.
3. Pomocí příkazu *convert* rozložte na parciální zlomky racionálně lomenou funkci $\frac{x^7+7x-1}{x^9+2x^6+x^3}$. Než výpočet provedete, určete, kolik zlomků bude rozklad obsahovat.
4. Pomocí operátoru @ vytvořte složení funkcí $F(x) = (f\circ g)(x)$ a $G(x) = (g\circ f)(x)$, kde $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$. Funkce f, g nakreslete do jednoho obrázku a sledujte symetrii grafů podle přímky $y = x$, která je grafem identické funkce. Pak nakreslete grafy funkcí $F(x)$ a $G(x)$. Použití operátoru @ nastudujte z nápovědy.
5. Zjistěte, která z funkcí $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x), g(x) = \log_{\frac{3}{2}}(x)$ roste a která klesá. Nakreslete grafy zadaných funkcí do jednoho obrázku. Graf $f(x)$ nakreslete zeleně a graf $g(x)$ hnědě. Použijte příkazu *colour*.
6. Nakreslete grafy funkcí $f(x) = x + \sin \pi x$, $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$, $f(x) = |1 + 2\sin 2x|$, $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$. Z obrázku zjistěte, které z funkcí jsou periodické a jakou základní periodu mají.

7. Příkazem *limit* vypočtěte zadané limity. Příklady odpovídají třem základním typům výsledků, které mohou nastat. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}$.

8. Výsledky, které získáme příkazem *limit*, nás nemusí vždy uspokojit. Vrátí-li Maple zpět zadání příkladu, neví si s úlohou rady. Zkuste vyřešit $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x^2}$.

9. Definujte funkci $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$. Nakreslete graf f na intervalu $\langle -3, 3\rangle$. Postupně interval zužujte například na $\langle -1, 1\rangle$, $\langle -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\rangle$. Lze z obrázků vysledovat, zda má funkce limitu v bodě 0? Stejnou úlohu řešte pro funkci $x\sin\frac{1}{x}$.

10. Spočtěte 7 derivaci funkce $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. Derivaci upravte pomocí příkazu *simplify*. Nakreslete graf zadané funkce na intervalu $\langle -3, 3\rangle$.

11. Zjistěte, kolikátá derivace funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je v bodě $x_0 = 3$ větší než 10.

12. Příkazem *mtaylor* spočtěte Taylorův polynom 7 řádu funkce $\ln(x+1)$ v bodě $x_0 = 0$. Dejte pozor na zadání řádu. Příkaz $ln(x+1) = mtaylor(ln(x+1), x = 0, 7)$ vypočte polynom řádu 6. Aby příkaz *mtaylor* fungoval je ho zapotřebí nejprve zavolat z knihovny příkazem $readlib(mtaylor)$.

13. Na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ nakreslete graf funkce $f(x) = \cos x$. Postupně spočtěte Taylorovy polynomy řádů 1,2,3,4,... v bodě $x_0 = 0$ a nakreslete je do jednoho obrázku s grafem funkce f. Sledujte, jak v okolí bodu 0 polynomy aproximují zadanou funkci.

14. Spočtěte Taylorův polynom 9 řádu funkce $\sqrt[13]{e^x + 2x}$ v bodě $x_0 = 0$. Stejnou úlohu řešte pro funkci $\operatorname{arctg}(e^x - \cos x)$.

15. Vyšetřit limity některých funkcí může být velmi obtížné. Prozkoumejte nyní jeden takový případ. Je dána funkce

$$f(x) = \frac{\sin\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}\sin(x)}{\arcsin\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}\arcsin(x)}.$$

Nejprve nakreslete graf f na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a pokuste se odhadnout přirozené pokračování funkce v bodě 0. Pak zkuste interval zmenšovat a zjistíte, že původní pěkný obrázek se dost změní. Snadno zjistíte, že limita je typu $\frac{0}{0}$. Lze tedy k výpočtu použít L'Hospitalovo pravidlo. Zjistěte, kolikrát musíte pravidlo aplikovat než získáte konečný výsledek. Limitu lze rovněž spočítat příkazem $limit(f, x = 0)$. Dále nalezněte Taylorův polynom této funkce v bodě 0. Jak lze Taylorova rozvoje použít k výpočtu limity?

16. Následující integrály patří mezi integrály, které jste schopni sami vypočítat. Výpočet proveďte samostatně doma a výsledek si zkontrolujte pomocí příkazu *int*.

$$\int \frac{x-3}{x^2-2x+7}\,dx, \quad \int \frac{dx}{13-5\sin x}, \quad \int \frac{x\cdot \operatorname{arccotg} x}{x^2+1}\,dx.$$

17. Nakreslete graf funkce sinus integrál $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Funkce $Si(x)$ je příkladem funkce, která není elementární.

18. Vypočtěte určitý integrál z funkce $\frac{1}{x^6+1}$ na intervalu $\langle 2, 7\rangle$.

19. Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. Je nevlastní integrál funkce $f(x)$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ konvergentní? V případě že ano, čemu se rovná?

20. Vypočtěte nevlastní integrál z neohraničené funkce $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s přesností na 157 cifer.