Trojný integrál

© ÚM FSI VUT v Brně

7. listopadu 2007

PŘÍKLAD. Spočítejte trojný integrála přes množinu M

$$\iiint\limits_M dx\,dy\,dz,$$

kde $M = \{[x, y, z] \,|x^2 + y^2 \leq 2y,\, 0 \leq z \leq 2\}$

$$M = \{[x, y, z] \, | x^2 + y^2 \leq 2y, \, 0 \leq z \leq 2\}$$

Nejprve musíme popsat (vymezit) množinu M. Protože se jedná o válec provedeme transformaci do cylindrických souřadnic.

$$M = \{[x, y, z] \, | x^2 + y^2 \leq 2y, \, 0 \leq z \leq 2\}$$

Nejprve musíme popsat (vymezit) množinu M. Protože se jedná o válec provedeme transformaci do cylindrických souřadnic.

Položme

$$x = \cos v \quad y = \sin u \quad z = w$$

Jakobián této transformace je roven $|J| = u$.

$$M = \{[x, y, z] \, | x^2 + y^2 \leq 2y, \, 0 \leq z \leq 2\}$$

Nejprve musíme popsat (vymezit) množinu M. Protože se jedná o válec provedeme transformaci do cylindrických souřadnic.

Položme

$$x = \cos v \quad y = \sin u \quad z = w$$

Jakobián této transformace je roven $|J| = u$. Máme tedy

$$\int\int\int_M dx\, dy\, dz \; = \int\int\int_{M^*} u \, du\, dv\, dw.$$

$$M = \{[x, y, z] \, | x^2 + y^2 \leq 2y, \, 0 \leq z \leq 2\}$$

Nejprve musíme popsat (vymezit) množinu M. Protože se jedná o válec provedeme transformaci do cylindrických souřadnic.

Položme

$$x = \cos v \quad y = \sin u \quad z = w$$

Jakobián této transformace je roven $|J| = u$. Máme tedy

$$\int\int\int dx\, dy\, dz \; = \int\int\int u \, du \, dv \, dw.$$

M M^*

Přičemž množina M^* je omezena tak to

$$0 \leq u \leq 2 \sin v, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq w \leq 2$$

$$\int\int\int_{M^*} u\,du\,dvdw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dw \right) dv$$

Nejprve spočítáme vnitřní integrál.

$$\int\int\int_{M^*} u\,du\,dvdw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dw \right) dv$$

Nejprve spočítáme vnitřní integrál.

$$\int\int\int_{M} dx\,dy\,dz = \int\int\int_{M^*} u\,du\,dvdw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dw \right) dv$$

$$\int\int\int_{M^*} u\,du\,dvdw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dw \right) dv$$

Nejprve spočítáme vnitřní integrál.

$$\int\int\int_{M} dx\,dy\,dz = \int\int\int_{M^*} u\,du\,dvdw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dw \right) dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{2\sin v} dw \right) dv =$$

$$\int\limits_{M^*}\int\int u\,du\,dvdw = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{2\sin v} u\,du\right)dw\right)dv$$

Nejprve spočítáme vnitřní integrál.

$$\int\limits_M\int\int dx\,dy\,dz = \int\limits_{M^*}\int\int u\,du\,dvdw = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{2\sin v} u\,du\right)dw\right)dv$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{2\sin v} u\,du\right)dw\right)dv = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{2\sin v}dw\right)dv =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2\left(2\sin^2 v - 0\right)dw\right)dv = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2 2\sin^2 v\,dw\right)dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u \, du \right) dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv$$

Opět budem počítat vnitřní integrál

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u \, du \right) dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv$$

Opět budem počítat vnitřní integrál

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2w\sin^2 v \right]_0^2 dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u \, du \right) dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv$$

Opět budem počítat vnitřní integrál

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2w\sin^2 v \right]_0^2 dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2\sin^2 v \, dw \right) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2w\sin^2 v \right]_0^2 dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 v \, dv$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u \, du \right) dv \right) dw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 v \, dv$$

K dalšímu výpočtu použijeme vzorec $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$. Odsud máme $2\sin^2 v = 1 - \cos 2v$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dv \right) dw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 v\,dv$$

K dalšímu výpočtu použijeme vzorec $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$. Odsud máme $2\sin^2 v = 1 - \cos 2v$. Po dosazení do integrálu dostáváme

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 v\,dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos 2v)\,dv.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2\sin v} u\,du \right) dv \right) dw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 v\,dv$$

K dalšímu výpočtu použijeme vzorec $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$. Odsud máme $2\sin^2 v = 1 - \cos 2v$. Po dosazení do integrálu dostáváme

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 v\,dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos 2v)\,dv.$$

Integrací máme

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos 2v)\,dv = \left[2v - \frac{2\sin 2v}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi}{2} - (-2\frac{\pi}{2}) = 2\pi$$

Závěr.

$$\int\int\int_M dx\,dy\,dz = 2\pi,$$

kde $M = \{[x, y, z]\,|x^2 + y^2 \leq 2y,\, 0 \leq z \leq 2\}$.

Protože množina M je válec a integrovali jsme přes jedničku, vypočítaná hodnota je vlastně objem válce o výšce dva a o poloměru podstavy jedna.