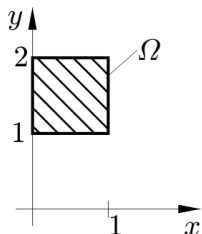


8. Dvojný integrál - Fubiniho věta

Příklad 8.1. Spočítejte $\iint_{\Omega} x^y dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení. Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Viz Obrázek 8.1. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y, x) .



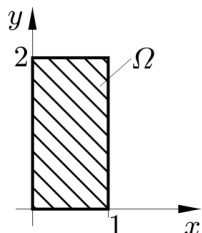
Obr. 8.1: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$

$$\iint_{\Omega} x^y dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \left[\ln |y+1| \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x, y) , narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x} dx$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

Příklad 8.2. Spočítejte $\iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

Řešení. Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x, y) .

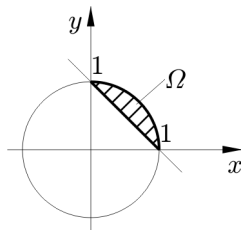


Obr. 8.2: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 y e^{xy} dx \right) dy = \left| \begin{array}{l} u = x^2 y, \quad u'_y = x^2 \\ v'_y = e^{xy}, \quad v = \frac{1}{x} e^{xy} \end{array} \right| = \int_0^2 \left(\left[x y e^{xy} \right]_0^1 - x \int_0^1 e^{xy} dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[(xy - 1) e^{xy} \right]_0^1 dx = \int_0^2 (2x - 1) e^{2x} + 1 dx = \int_0^2 2x e^{2x} dx + \int_0^2 e^{2x} dx + \int_0^2 1 dx = \left[x e^{2x} - e^{2x} - x \right]_0^2 = 2. \end{aligned}$$

Příklad 8.3. Spočítejte $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 8.3. Oblast Ω je typu (x, y) i (y, x) . Zvolme typ (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.



Obr. 8.3: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$

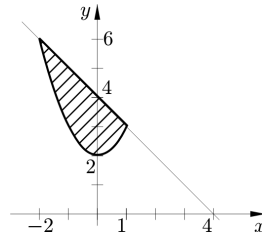
$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3} \left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3 \right) dx = \frac{1}{20}.$$

Zvolíme-li typ (y, x) , pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 (y^3 - y^4) dy = \frac{1}{20}.$$

Příklad 8.4. Spočítejte $\iint_{\Omega} y dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 8.4. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajiní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2, x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.

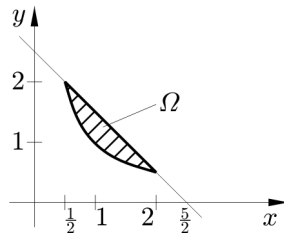


Obr. 8.4: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_{\Omega} y dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} ((4-x)^2 - (x^2+2)^2) dx = \frac{81}{5}.$$

Příklad 8.5. Spočítejte $\iint_{\Omega} xy dx dy$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 8.5. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajiní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x(\frac{5}{2} - x) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$. Platí $\Omega = \{[x, y]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\}$.

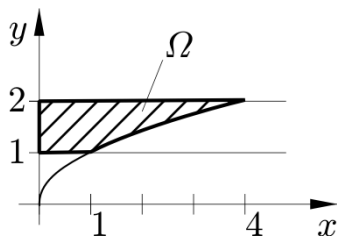


Obr. 8.5: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{165}{128} - \ln 2.$$

Příklad 8.6. Spočítejte $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

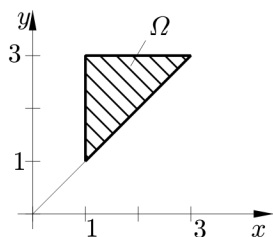
Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 8.6. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2\}$.

Obr. 8.6: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

$$\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_1^2 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} dy = \int_1^2 (y e^y - y) dy = \left[y e^y - e^y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = e^2 - \frac{3}{2}.$$

Příklad 8.7. Spočítejte $\iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq x \leq y \leq 3$.

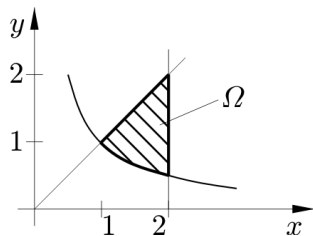
Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 8.7. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 3, 1 \leq x \leq y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.

Obr. 8.7: $\Omega : 1 \leq x \leq y \leq 3$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_x^3 \frac{x}{y^2} dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\frac{x}{y} \right]_x^3 dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{x}{3} \right) dx = \left[x - \frac{x^2}{6} \right]_1^3 = \frac{2}{3}. \\ \iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_1^y \frac{x}{y^2} dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^2}{2y^2} \right]_1^y dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \left[y + \frac{1}{y} \right]_1^3 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 8.8. Spočítejte $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

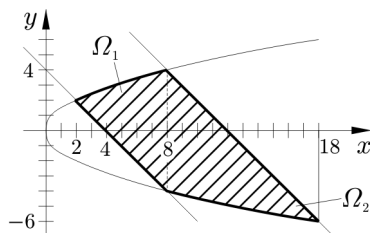
Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 8.8. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$.

Obr. 8.8: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

$$\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Příklad 8.9. Spočítejte $\iint_{\Omega} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 8.9. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y) . Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

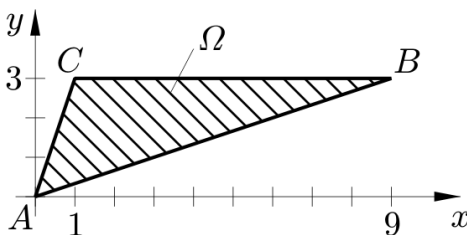


Obr. 8.9: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

$$\iint_{\Omega} dx dy = \iint_{\Omega_1} dx dy + \iint_{\Omega_2} dx dy = \int_0^8 \left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} dy \right) dx + \int_8^{18} \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dy \right) dx = \int_0^8 (\sqrt{2x} + x - 4) dx + \int_8^{18} (\sqrt{2x} - x + 12) dx = \frac{74}{3} + \frac{122}{3} = 62.$$

Příklad 8.10. Spočítejte $\iint_{\Omega} \sin y^2 dx dy$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 8.10. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 3, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integrálu $\int \sin y^2 dy$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.



Obr. 8.10: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \cos y^2 dx dy &= \int_0^3 \left(\int_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 dx \right) dy = \int_0^3 \left[x \cos y^2 \right]_{\frac{y}{3}}^{3y} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 2y \cos y^2 dy = \left| \begin{array}{l} t = y^2 \\ 0 \rightarrow 0, 3 \rightarrow 9 \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^9 \cos t dt = \frac{4}{3} \left[\sin t \right]_0^9 = \frac{4}{3} \sin 9. \end{aligned}$$