

Analytická geometrie

- 1. Příklad** Vypočtete vnitřní úhly trojúhelníka ABC , kde $A = [2, -1, 3]$, $B = [1, 1, 1]$, $C = [0, 0, 5]$.

Výsledek: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 45^\circ$.

- 2. Příklad** Necht $A = [-1, 2, 3]$, $B = [1, 1, 1]$, $C = [0, 0, a]$. Určete a tak, aby $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

Výsledek: $a = 5$.

- 3. Příklad** Určete vzdálenost bodu $M = [2, -1, 3]$ od přímky AB , kde $A = [-1, -2, 1]$, $B = [2, 2, 6]$.

Výsledek: $\frac{3}{10}\sqrt{38}$.

- 4. Příklad** Bodem $P = [2, 3, 2]$ veďte kolmici k přímce $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$.

Výsledek: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

- 5. Příklad** Určete rovnici roviny procházející rovnoběžkami $\frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-5}{1}$.

Výsledek: $x - 2y - 2z - 2 = 0$.

- 6. Příklad** Určete kolmý průmět bodu $P = [2, 3, 2]$ na přímku $x = -3 + 2t$, $y = -6 + t$, $z = -1 + 3t$.

Výsledek: $[1, -4, 5]$.


- 7. Příklad** Určete obecnou rovnici roviny procházející body $A = [1, -1, 2]$, $B = [2, 1, 2]$, $C = [1, 1, 4]$.

Výsledek: $2x - y + z - 5 = 0$.

- 8. Příklad** Určete obecnou rovnici roviny α , která je dána body $A[5, -1, 0]$, $B = [1, 2, 5]$, $C = [-3, -2, 8]$.

Výsledek: $\alpha : 29x - 8y + 28z - 153 = 0$

- 9. Příklad** Jsou dány body $A = [5, 1, -2]$ a $B = [3, -3, 3]$. Bodem A veďte rovinu ϱ , která bude kolmá k vektoru \vec{AB} .

Výsledek: $\varrho : 2x + 4y - 5z + 24 = 0$ 

- 10. Příklad** Bodem $A = [2, 1, -1]$ veďte rovinu kolmou k vektoru $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

Výsledek: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

- 11. Příklad** Bodem $P[1, 2, 0]$ veďte rovinu β kolmou k přímce p dané parametricky $x = 3 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = -5 + 6t$, $t \in \mathbb{R}$.

Výsledek: $\beta : x - 2y + 6z + 3 = 0$

- 12. Příklad** Převedte rovnici roviny na parametrický tvar:

a) $3x - 2y + 6z - 14 = 0$;

b) $z + 1 = 0$.

Výsledek: a) $x = \frac{14}{3} + \frac{2}{3}u - 2v$, $y = u$, $z = v$, b) $x = u$, $y = v$, $z = -1$.

- 13. Příklad** Najděte úhel dvou rovin $x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0$, $x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$.

Výsledek: 60° .

- 14. Příklad** Dokažte, že následující roviny α a β jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost.

$\alpha : 30x - 32y + 24z - 75 = 0$, $\beta : 15x - 16y + 12z - 25 = 0$.

Výsledek: $\frac{1}{2}$.

15. Příklad Napište parametrickou rovnici i obecnou rovnici osy z .

Výsledek: Par. rovnice: $x = 0, y = 0, z = t$, obecná rovnice: $x = 0, y = 0$.

16. Příklad Převeďte obecné rovnice $x + 4y + 4z - 7 = 0$, $4x + 4y + 5z - 11 = 0$ přímky na parametrické rovnice.

Výsledek: $x = 4t, y = -\frac{9}{4} + 11t, z = 4 - 12t$.

17. Příklad Napište parametrické rovnice přímky procházející bodem $M = [4, -5, 7]$ rovnoběžně s přímkou $x = 3 - t, y = 2 + 2t, z = 3$.

Výsledek: $x = 4 - t, y = -5 + 2t, z = 7$.

18. Příklad Zjistěte vzájemnou polohu přímek $x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = 5 + 3t$ a $x = 4, y = 2 - 5t, z = 11t$.

Výsledek: Jde o různoběžky, průsečík je $[4, -3, 11]$.

19. Příklad Určete úhel přímek $x = -3 + t, y = -3 + 2t, z = 4 - 2t$ a $9x + 2y + 2z - 11 = 0$, $6x - y + 6z + 8 = 0$.

Výsledek: $\cos \varphi = \frac{4}{21}$.

20. Příklad Jsou dány přímky p, q . Určete úhel, který svírají. p je dána parametrickými rovnicemi $x = 3 - t, y = 4 + 2t, z = t, t \in \mathbb{R}$ a přímka q je dána jako průsečnice dvou rovin $2x - 3y + z - 1 = 0$, $5x + 2y - z - 10 = 0$.

Výsledek: $\cos \varphi = \frac{32}{\sqrt{6}\sqrt{411}} \doteq 0,6443$, tedy $\varphi \doteq 49^\circ 52'$

21. Příklad Určete průsečík přímky $x = -1 + 2t, y = 2 + t, z = 1 - t$ s rovinou $3x - 2y + z - 3 = 0$.

Výsledek: $[5, 5, -2]$.

22. Příklad Určete rovinu procházející přímkou $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{2}$ rovnoběžně s přímkou $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{1}$.

Výsledek: $3x - y - z - 2 = 0$.

23. Příklad Určete úhel přímky $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+5}{-1}$ s rovinou $4x - y + z + 24 = 0$.

Výsledek: 45° .

24. Příklad Určete rovnici kolmice z bodu $A = [4, 1, 2]$ na přímkou $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Výsledek: $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

25. Příklad Určete rovnici přímky procházející bodem $[-6, 3, 4]$ rovnoběžně s přímkou $x - 2y - 3z + 7 = 0$, $4x + 5y - z - 9 = 0$.

Výsledek: $\frac{x+6}{17} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z-4}{13}$.

26. Příklad Určete úhel přímek p a q , které jsou zadány obecnými rovnicemi takto: $p: x - y - 2z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$, $q: 2x - y - z - 1 = 0$, $2x + y + z - 1 = 0$.

Výsledek: 60° .

27. Příklad Určete kolmý průmět bodu $[8, 2, 1]$ do roviny $3x - 4y + z + 9 = 0$.

Výsledek: $[5, 6, 0]$.

28. Příklad Určete kolmý průmět přímky $a : 2x + 2y - 3z = 0, x - 3y - 2z + 5 = 0$ do roviny $\beta : 3x + y + 2z + 3 = 0$.

Výsledek: Kolmým průmětem je přímka $m : \frac{x+1}{5} = \frac{y}{-17} = \frac{z}{1}$.

Pozn.: Hledanou přímku m je také možno vyjádřit jako průsečnici zadané roviny β a roviny α , která obsahuje přímku a a je k rovině β kolmá. Potom $m : 3x + y + 2z + 3 = 0, 5x + y - 8z + 5 = 0$.

29. Příklad Určete obsah trojúhelníka ABC , kde $A = [3, 3, 4]$, $B = [3, 5, 4]$, $C = [4, 5, 3]$.

Výsledek: $\sqrt{2}$.

30. Příklad Určete rovnici roviny procházející bodem $[0, 3, 2]$ a přímkou $x + y - z + 1 = 0, x - 2y - z + 5 = 0$.

Výsledek: $5x - y - 5z + 13 = 0$.

31. Příklad Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $p : x = 2t - 2, y = t + 2, z = t + 1$ a $q : x = 2t - 2, y = t + 3, z = t + 2$.

Výsledek: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

32. Příklad Určete vzdálenost bodu $[2, 3, 5]$ od přímky $\frac{x-2}{9} = \frac{y+5}{5} = \frac{z-3}{1}$.

Výsledek: $\sqrt{\frac{5514}{107}}$.

33. Příklad Nalezněte rovnici roviny, která kolmo promítá zadanou přímku $p : 7x - 2y + 5z - 10 = 0, 3x + y + 2z - 6 = 0$ do souřadné roviny xy .

Výsledek: $x + 9y - 10 = 0$.

34. Příklad Napište parametrické rovnice i obecnou rovnici roviny xy .

Výsledek: Par. rovnice: $x = u, y = v, z = 0$, obec. rovnice: $z = 0$.

35. Příklad Počátkem souřadnic veďte rovinu rovnoběžně s různoběžkami $a : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$ a $b : \frac{x}{4} = \frac{y}{-8} = \frac{z-1}{12}$.

Výsledek: $-x + y + z = 0$.

36. Příklad Určete vzdálenost bodu $[2, -1, 3]$ od přímky AB , kde $A = [-1, -2, 1]$, $B = [2, 2, 6]$.

Výsledek: $\frac{3}{10}\sqrt{38}$.

37. Příklad Určete rovnici přímky k , která prochází bodem $A = [1, 2, 3]$ a je kolmá k přímce p dané parametricky $x = 2 + 4t, y = -1 + t, z = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$. Přímky k a p jsou různoběžné.

Výsledek: Rovina α , která prochází bodem A kolmo k přímce p má rovnici $\alpha : 4x + y + 2z - 12 = 0$. Průsečík $P = p \cap \alpha$ vychází pro parametr $t = \frac{1}{7}$ a $P = [\frac{18}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{9}{7}]$. Přímka k je dána bodem A a směrovým vektorem $\overrightarrow{AP} = (\frac{11}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{12}{7})$. Přímka k má potom parametrické vyjádření $x = 1 + \frac{11}{7}t, y = 2 - \frac{20}{7}t, z = 3 - \frac{12}{7}t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Pozn.: Směrový vektor přímky k je možno vynásobit například číslem 7 a pro parametrické vyjádření pak použít vektor s celočíselnými souřadnicemi.

38. Příklad Je dán čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [1, 2, 1]$, $B = [0, 5, 7]$, $C = [3, -1, -1]$, $D = [0, 6, 5]$. Určete průsečík výšky jehlanu, která prochází bodem D s podstavou ABC .

Výsledek: Výška v (pro $D \in v$) vychází $x = 12t, y = 6 + 10t, z = 5 - 3t, t \in \mathbb{R}$. Rovina podstavy ABC má rovnici $\alpha : 12x + 10y - 3z - 29 = 0$. Pro hledaný průsečík P vychází parametr $t = -\frac{16}{253}$. $P = [-\frac{192}{253}, \frac{1358}{253}, \frac{1313}{253}]$.