

## 2 Euklidovský prostor

### 2. 1 Základní pojmy a vztahy v rovině

Základními geometrickými útvary jsou bod, přímka a rovina, základním geometrickým vztahem je vztah incidence, který se většinou opisuje spojením „bod leží na přímce“, „přímka prochází bodem“, „bod leží v rovině“, „přímka leží v rovině“. Bod si přitom představujeme jako „bezrozměrný objekt“, přímku jako „nekonečně tenkou rovnou čáru“, atd. Pokud bychom ovšem chtěli tyto popisy považovat za matematické definice, museli bychom předtím definovat bezrozměrný objekt, tenkou rovnou čáru atd. Je zřejmé, že tímto způsobem by nebylo možné nikdy nikde začít. Moderní geometrie vyřešila tuto potíž velmi elegantně. Neříká totiž, co je bod, co je přímka, ani co to znamená, když přímka prochází bodem. Geometrie pouze stanoví základní tvrzení o těchto pojmech a vztazích, která přijme bez důkazu (tzv. axiomy). Například:

1. Dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
2. Na každé přímce leží alespoň dva body.

atd.

Pod těmito tvrzeními si nemusíme představit vůbec nic. A pokud si představovat chceme, jsou tyto představy čistě naší subjektivní věcí, pokud stále korespondují s postupně budovanou teorií. Geometrii, která by měla jen tyto dva axiomy, si můžeme představit třeba jako fotbalový zápas. Bod je fotbalové mužstvo, přímka je hřiště. Vztah "bod  $A$  leží na přímce  $a$ " znamená, že mužstvo  $A$  hraje na hřišti  $a$ . Mužstva, která proti sobě hrají, nemohou běhat po tribuně ani hrát na dvou hřištích. Je tak splněn první axiom. Má-li jít o fotbalový zápas, nemůže po hřišti běhat jen jedno mužstvo, takže je splněn i druhý axiom.

Geometrie dnes opravdu nikoho nenuť představit si bod jako co nejmenší tečku a přímku jako tenkou rovnou čáru. Přesto si drtivá většina lidstva (včetně matematiků) přímku tak představuje. A chce-li člověk znázornit bod, který na ní leží, nesleduje fotbalový zápas, ale trefuje se ořezanou tužkou do tenké rovné čáry. Proč? Jednoduše proto, že tato představa jako jedna z mála odolá náporu dalších axiomů, které jsou potřeba k vybudování „rozumné“ geometrie. Už další axiom (existují alespoň tři body, které neleží na jedné přímce) totiž milovníka fotbalu přinutí vymýšlet nějaký fotbalový turnaj, který se hraje alespoň na dvou hřištích. A v okamžiku, kdy budeme potřebovat třeba střed úsečky, „fotbalový geometr“ asi skončí. Vždyť které ze dvou mužstev běžajících po hřišti by tím středem mělo být? Jakkoli si totiž matematická teorie sama o sobě musí vystačit s pojmy a vztahy, kterým ona sama nedává konkrétní obsah, matematik, který ji buduje, si tohoto konkrétního obsahu a smyslu naopak musí být vědom vždy, a to velmi přesně. Sebekrásnější matematická teorie by totiž byla k ničemu, kdyby podle ní nikde nic reálně nefungovalo.

Jak již bylo řečeno, geometrie stojí na několika axiomech – tvrzeních, která se nedokazují. Soustava axiomů musí splňovat poměrně přísné požadavky, které zde nebudeme rozebírat. K vybudování jedné a téže geometrie není bezpodmínečně nutná zcela identická soustava axiomů. Axiomy by však měly být v každém případě jednoduché a zřejmé. Jsou to tvrzení, která se nedokazují, proto musí být akceptovatelná pro každého, kdo někdy držel v ruce pravítko a tužku.

Základy rovinné geometrie (planimetrie), kterou jste studovali na střední škole, tvoří soustava axiomů německého matematika Davida Hilberta (1862 - 1943). Ten rozdělil axiomy do několika skupin:

**Axiomy incidence** - zavádějí vzájemnou polohu bodů a přímek

**I1:** Dvěma různými body prochází právě jedna přímka – zapisujeme  $p \equiv AB$

**I2:** Na každé přímce leží alespoň dva různé body

**I3:** Existují alespoň tři body, které neleží na téže přímce

Běžně používané různé popisy téže geometrické situace – bod leží na přímce, přímka prochází bodem, se někdy nahrazují jednotným pojmem incidence: se dvěma různými body inciduje právě jedna přímka, s každou přímkou incidují alespoň dva různé body... Odtud název první skupiny axiomů.

Nejjednodušší představa (model) geometrie, v níž platí jen axiomy incidence (tzv. incidenční geometrie), má tři body a tři přímky. Tuto geometrii si můžeme představit jako tři provázky svázané třemi uzly: Dva body (uzly) leží na téže přímce (provázku), tvoří-li jeho konce. Je zajímavé, že zde funguje i představa duální: Body si lze představit jako provázky a přímky jako uzly, kterými jsou svázány.

**Axiomy uspořádání** - zajišťují, aby přímka byla „dostatečně hustě pokryta body“. Tento požadavek je zajištěn vztahem „bod  $C$  leží mezi body  $A;B$ “, který zapisujeme  $C\mu AB$  a následujícími axiomy:

**U1:** Jestliže  $C\mu AB$ , pak  $A;B;C$  jsou tři navzájem různé body téže přímky a platí také  $C\mu BA$

Axiom U1 umožňuje definovat některé známé pojmy (polopřímka, úsečka, polorovina, trojúhelník, atd.). Tyto definice přenecháme čtenáři jako cvičení a v dalším textu budeme tyto pojmy považovat za známé

**U2:** Ke každým dvěma různým bodům  $A;B$  existuje alespoň jeden bod  $C$  tak, že  $C\mu AB$ .

**U3:** Pro každé tři různé body téže přímky platí, že právě jeden z nich leží mezi zbylými dvěma.

**U4 (Paschův):** Jsou-li  $E;F;G$  nekolineární body (tj. neleží na jedné přímce) a  $p$  je přímka, na které leží bod  $M\mu EF$ , pak existuje bod  $N$ , který leží na  $p$  a platí buď  $N = G$ , anebo  $N\mu EG$ , anebo  $N\mu FG$

(jinak řečeno: přímka, která neprotíná žádný vrchol trojúhelníka a protíná jeho stranu, protíná právě jednu další stranu)

Na axiomy U2 a U4 nemohou spoléhat grafické algoritmy, které pracují přímo na výstupním zařízení počítače (tzv. rastrové algoritmy). Jak je vidět na připojených obrázcích zvětšeného monitoru, mezi různými body  $A;B$  již žádný další bod neleží (tj. není splněn U2). Přímka  $p$  protíná stranu  $EF$  trojúhelníka  $\triangle EFG$  v bodě  $M$ , ale navzdory Paschovu axiomu je to její jediný společný bod s obvodem trojúhelníka.

Axiomy uspořádání lze volit i jinak. Pomocí jiných čtyř axiomů lze například na každé přímce postulovat uspořádání bodů podobně jako uspořádání čísel na číselné ose a poté definovat vztah „bod  $C$  leží mezi body  $A;B$ “, a to tak, že  $C\mu AB$  právě tehdy, když  $A < C < B$ . Pomocí takto zvolených axiomů lze pak tvrzení U1; U2; U3; U4 dokázat (v takové geometrii by to pak tedy nebyly axiomy, ale věty). Dostali bychom pak dvě geometrie, které by však „fungovaly stejně“ – řečeno matematicky, tyto dvě geometrie by byly ekvivalentní.

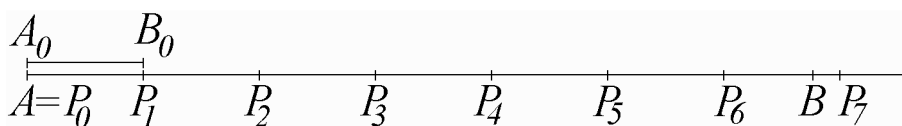


- 1) Délka každé úsečky je kladná
- 2) Délky shodných úseček jsou si rovny
- 3) Je-li  $C \mu AB$ , pak  $|AC| + |CB| = |AB|$
- 4) Existuje úsečka délky jedna.

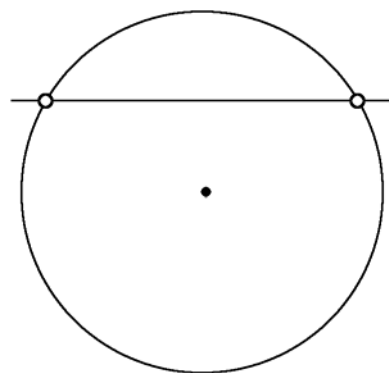
Naše dosavadní geometrie však dosud „neumí“ takovou délku určit.

**Axiomy spojitosti** - umožní zjišťovat délky úseček a „zalepí díry v přímkách“.

**A (Archimedův):** Necht'  $A_0B_0$ ;  $AB$  jsou libovolné úsečky. Na polopřímce  $AB$  sestrojme posloupnost  $P_0; P_1; \dots; P_k; \dots = \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tak, že  $P_0 = A$ ;  $P_k P_{k+1} \cong A_0B_0$ . Pak existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že  $B \mu AP_n$ .

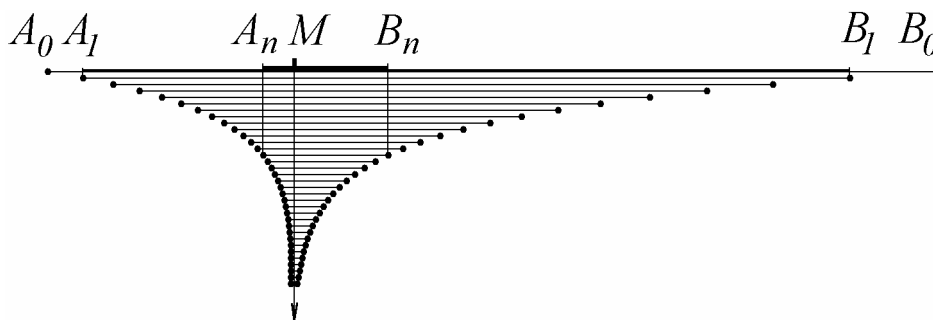


Archimédův axiom dává velmi názorný návod, jak zjišťovat délku úsečky „přikládáním metru“. Umožňuje definovat vzdálenost bodů a tím i kružnici jako množinu bodů, které mají od daného bodu (středu) stejnou vzdálenost. Tím se však znovu otvírá dřívější problém „děravých“ útvarů a jejich průsečíků. Jestliže totiž sestojíme přímku, která má od středu kružnice vzdálenost menší než poloměr, očekáváme, že bude mít s kružnicí dva společné body. To však bohužel není zaručeno – i kružnice je v naší geometrii prozatím „děravá“ (a to značně) a „sečna“ se může „trefit“ zrovna do „chybějících bodů“.



Svědčí o tom i náš předchozí „racionální analytický model“, kde je kružnicí například množina všech uspořádaných dvojic  $[x; y]$ , pro které je  $x^2 + y^2 = 16$  a a přímkou například množina  $[t; 2]$ . Dosazením zjistíme, že „průsečíky“ přímky s kružnicí jsou uspořádané dvojice  $[\pm\sqrt{2}; 2]$ . Ty však nejsou body naší geometrie, protože  $\sqrt{2}$  není racionální číslo. Přímka  $[t; 2]$  je tedy „sečna“, která nemá s naší kružnicí žádný společný bod. To je velmi nepříjemné, a proto je třeba „díry“ v naší geometrii „zalepit“. Tímto „lepidlem“ je Cantorův axiom:

**C (Cantorův):** Necht'  $\{A_n B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je posloupnost úseček přímky  $p$  taková, že pro každé  $n$  je  $A_{n+1} B_{n+1} \subseteq A_n B_n$ . Pak existuje bod  $M \in p$  takový, že pro každé  $n$  je  $M \mu A_n B_n$ .



Přímka, na které leží body  $A_n$ ;  $B_n$ , může být v našem racionálním modelu například předchozí sečna  $[t; 2]$ , body jsou tedy tvaru  $A_n = [a_n; 2]$ ;  $B_n = [b_n; 2]$ , kde může být např.

$$a_1 = 1; a_2 = 1.4; a_3 = 1.41; \dots b_1 = 2; b_2 = 1.5; b_3 = 1.42; \dots$$

Body  $A_n$  se každým desetinným číslem blíží zdola k bodu  $M = [m; 2]$ , body  $B_n$  se každým desetinným číslem blíží k témuž bodu shora. Aby mohlo být stále  $M \mu A_n B_n$ , musí být  $M = [1,414\,213\,562\dots; 2] = [\sqrt{2}; 2]$ . Tento bod ale není bodem racionálního modelu, racionální model nesplňuje Cantorův axiom, a není proto spojitou geometrií. Abychom Cantorovu axiomu vyhověli, musíme si vzít na pomoc čísla iracionální, která „díry“ v racionálním modelu „zalepí“. Dostáváme analytický model, který body modeluje uspořádanými dvojicemi reálných čísel, popř. syntetický model, který při rýsování přímky nedovolí zvednout tužku z papíru. Dostáváme „geometrii bez děr“, které k běžné představě rovinné geometrie chybí už jen jedno – nevíme, jak to vypadá s rovnoběžnými přímkami. Posledním axiomem tedy bude

### Axiom rovnoběžnosti

**E (Euklidův):** Bodem  $A$  neležícím na přímce  $p$  prochází právě jedna přímka  $a$ , která s přímkou  $p$  nemá společný žádný bod.

Tímto axiomem je dovršeno budování euklidovské geometrie v rovině.

## 2.2 Základní pojmy a vztahy v prostoru

Prostorovou geometrii (stereometrii) lze vybudovat tím, že k dosavadním pojmům a vztahům přidáme pojem roviny a axiomy popisující vzájemnou polohu bodu a roviny, přímky a roviny a vzájemnou polohu dvou rovin. K tomu je potřeba k předchozí soustavě axiomů přidat dalších šest axiomů incidence:

- I4:** Každými třemi body, které neleží na jedné přímce, prochází právě jedna rovina
- I5:** V každé rovině leží alespoň jeden bod
- I6:** Jestliže v rovině leží dva různé body téže přímky, pak v této rovině leží celá přímka
- I7:** Jestliže bod leží na přímce a tato přímka v rovině, pak bod leží v této rovině
- I8:** Existují alespoň čtyři body, které neleží v jedné rovině
- I9:** Jestliže dvě roviny mají společný bod, mají společnou přímku, která tímto bodem prochází.

Tyto axiomy spolu s axiomy uvedenými v předchozí kapitole umožňují definovat všechny důležité pojmy a vztahy v prostoru (rovnoběžnost a kolmost přímek a rovin, odchylky přímek a rovin...) a dokázat všechny známé stereometrické věty (kritéria rovnoběžnosti a kolmosti přímek a rovin atd.).

Pomocí devíti axiomů incidence, čtyř axiomů uspořádání, dvou axiomů spojitosti a axiomu rovnoběžnosti lze vybudovat celou stereometrii tak, jak ji znáte ze střední školy.

## 2.3 Syntetická a analytická geometrie

V kpt. 1.1 jsme uvedli, že představa bodu jako bezrozměrné tečky, přímky jako tenké rovné čáry a roviny jako tenké rovné plochy je jedna z mála představ, která odolává „náporu“ postupně přibývajících geometrických axiomů. Tuto představu (realizaci, model) nazýváme syntetickým modelem geometrie, krátce syntetickou geometrií. Ze střední školy ovšem známe i jiný model geometrie, o němž jsme se v kpt. 1.1 již zmínili – je to model analytický (analytická geometrie). Body v rovině jsou známým způsobem modelovány jako uspořádané

dvojice reálných čísel, v prostoru pak jako uspořádané trojice reálných čísel. Tato čísla nazýváme souřadnice bodu.

Rovinu, která splňuje axiomy I1-I3, U1-U4, S1-S6, A, C, E, nazýváme euklidovskou rovinou. Prostor, který navíc splňuje axiomy I4 – I9, nazýváme euklidovským prostorem.

Geometrie, která zavádí jakési pojmy splňující jisté axiomy bez jakýchkoli představ o tom, co tyto pojmy a axiomy znamenají, je matematickou abstrakcí. Jestliže tyto pojmy a axiomy „objevíme“ v konkrétních situacích, říkáme, že jsme našli model (nebo realizaci) této geometrie.

Až do 17. století byla geometrie ztotožňována v podstatě jen s jejím syntetickým modelem. Geometři pracovali stuhkou, pravítkem a kružítkem (popř. s jinými mechanickými rysovacími pomůckami). Algebraický aparát používali jen k výpočtům délek, povrchů a objemů, přičemž měření potřebných údajů bylo založeno v podstatě jen na Archimedově axiomu. Podstatně hlubší souvislosti mezi geometrií a algebrou objevil francouzský filozof a matematik René Descartes (1596 - 1650), který stál u zrodu analytického modelu geometrie. Objevil pravoúhlou souřadnou soustavu, kterou dnes nazýváme soustavou kartézskou (podle latinského přepisu jeho jména Cartesius). Body v rovině resp. v prostoru jsou uspořádané dvojice resp. reálných čísel. Přímku lze chápat jako lineární rovnici o dvou neznámých (v rovině) popř. soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých (v prostoru), rovinu jako lineární rovnici o třech neznámých. Tyto rovnice nazýváme obecnými rovnicemi přímky (roviny). Často se používají tzv. rovnice parametrické, které využívají skutečnosti, že přímka je určena bodem  $A = [a_1; a_2]$  v rovině resp.  $A = [a_1; a_2; a_3]$  v prostoru a směrovým vektorem  $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$  v rovině resp.  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$  v prostoru.

**1. Vektorový prostor:** Ze střední školy známe pojem vektor. Vektory si můžeme představit buď jako orientované úsečky se společným počátečním bodem, anebo jako uspořádané dvojice popř. trojice reálných čísel, které představují souřadnice vektoru. Počátek souřadné soustavy je přitom umístěn ve společném počátečním bodě uvažovaných orientovaných úseček. Vektory můžeme sečítat a násobit reálným číslem. Vektor  $\mathbf{v} = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n$ ;  $c_i \in \mathbb{R}$ ;  $i = 0; 1; \dots; n$  nazýváme **lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n$ . Vektory  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n$ ;  $i = 0; 1; \dots; n$ , z nichž ani jeden nelze zapsat jako lineární kombinaci ostatních, nazýváme **lineárně nezávislé** nebo též **bázové vektory**. Jsou-li  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n$ ;  $i = 0; 1; \dots; n$  bázové vektory, pak množinu všech vektorů tvaru  $\mathbf{v} = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n$  nazýváme vektorovým prostorem vytvořeným bázovými vektory  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n$ .

**2. Příklad:** Vektor  $\mathbf{v} = (-3; 5; 2)$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{u}_0 = (-1; 1; 0)$ ;  $\mathbf{u}_1 = (0; 1; 1)$ , neboť  $\mathbf{v} = 3 \cdot \mathbf{u}_0 + 2 \cdot \mathbf{u}_1$ . Vektory  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1$  jsou bázové, neboť neexistuje  $c_0 \in \mathbb{R}$  tak, aby  $\mathbf{u}_1 = c_0 \cdot \mathbf{u}_0$ , ani  $c_1 \in \mathbb{R}$  tak, aby  $\mathbf{u}_0 = c_1 \cdot \mathbf{u}_1$ . Množina všech lineárních kombinací vektorů tvaru  $\mathbf{v} = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1$ ;  $c_0; c_1 \in \mathbb{R}$  je vektorovým prostorem. Tento vektorový prostor si lze představit jako rovinu, která prochází počátkem a ve které „leží“ vektory  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1$ . Vektory  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1$  nazýváme zaměření roviny.

Vektor  $\mathbf{o} = (0; 0; 0)$  je rovněž lineární kombinací vektorů  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1$ , neboť pro  $c_0; c_1 = 0$  dostáváme  $(0; 0; 0) = 0 \cdot (-1; 1; 0) + 0 \cdot (0; 1; 1)$ .

Všechny koeficienty  $c_0; c_1; \dots; c_n$  lineární kombinace totiž mohou být nulové (na rozdíl od kombinace projektivní, o které se zmíníme dále).

Uvažujeme-li vektor  $\mathbf{u} = (2; 1; 0)$ , pak množina jeho lineárních kombinací (tj. násobků  $c \cdot \mathbf{u}$ ;  $c \in \mathbb{R}$ ) je rovněž vektorovým prostorem. Lze si ji představit jako přímku, která opět prochází počátkem. Vektor  $\mathbf{u}$  nazýváme směrovým vektorem přímky.

Pomocí samotných vektorů je však modelování euklidovské geometrie značně nepříjemné. K vyjádření roviny v prostoru bychom například potřebovali tři báze vektory, z nichž dva  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1$  by tvořily její zaměření a třetí (označme ho  $\mathbf{x}$ ) by zajišťoval „posunutí roviny mimo počátek“. Rovinu bychom si tak mohli představit jako množinu koncových bodů všech vektorů tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 \quad (1)$$

Vektory  $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1$  v tomto zápisu můžeme násobit libovolným skalárem, vektor  $\mathbf{w}$  však nesmíme kromě jedničky násobit ničím – bod  $\mathbf{x}$  by totiž opustil studovanou rovinu.

Podobná situace nastává u přímky, kterou bychom vyjádřili ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + t \cdot \mathbf{s} \quad (2)$$

To je jeden z důvodů, pro který zavádíme tzv. afinní prostor.

**4. Afinní prostor:** Uvažujme vektorový prostor, který doplníme množinou prvků, které budeme značit  $A; B; C; \dots$  a nazývat je body. Takto vzniklou množinu vybavíme operací sčítání bodu a vektoru, jejímž výsledkem je bod. Tedy pro každý bod  $A$  každý vektor  $\mathbf{u}$  existuje bod  $B$  tak, že  $B = A + \mathbf{u}$ . Vektor  $\mathbf{u}$ , pro který tato rovnice platí, značíme  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ . (říkáme, že úsečka  $AB$  je reprezentantem vektoru  $\mathbf{u}$ ). Dále musí pro každé tři body  $A; B; C$  platit  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ . Takto zavedenou množinu bodů nazýváme **afinním prostorem** a příslušný vektorový prostor pak **zaměřením afinního prostoru**.

Body přitom modelujeme uspořádanými dvojicemi resp. trojicemi souřadnic, které ovšem pro odlišení od vektorů umísťujeme do hranatých závorek.

Takto zavedený prostor splňuje všechny axiomy **I, U, A, C, E**. Pozorný čtenář asi v tuto chvíli postrádá axiomy shodnosti (tedy axiomy skupiny **S**), což je zvlášť nepříjemné, uvědomíme-li si že v tuto chvíli nemůžeme měřit úsečku a dokonce nemáme k dispozici ani pravý úhel. Čtenáře ovšem můžeme uklidnit, a to hned ve dvou směrech. Jednak v celé řadě geometrických situací tyto věci nepotřebujeme a za druhé je velmi jednoduché do afinního prostoru shodnost zavést. Geometrie, která se obejde bez axiomů shodnosti, takzvaná afinní geometrie, je **geometrie polohová** a řeší jen úlohy týkající se vzájemné polohy geometrických útvarů (tj. společné body a rovnoběžnost). Jedná se o **úlohy polohové** a takových úloh je celá řada.

**5. Analytický model euklidovského prostoru:** Potřebujeme-li řešit úlohy metrické, je třeba definovat shodnost úseček. Většinou postupujeme tak, že v zaměřením afinního prostoru definujeme skalární součin vektorů. Skalárním součinem vektorů  $\mathbf{u} = (u_1; u_2); \mathbf{v} = (v_1; v_2)$  v rovině resp.  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3); \mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$  v prostoru rozumíme číslo

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}; \mathbf{v}) &= u_1 v_1 + u_2 v_2 & \text{v rovině} \\
 (\mathbf{u}; \mathbf{v}) &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 & \text{v prostoru}
 \end{aligned} \tag{3}$$

V prostoru se skalárním součinem pak lze definovat velikost (neboli normu) vektoru

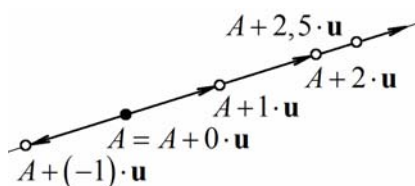
$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(\mathbf{u}; \mathbf{u})} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} & \text{v rovině} \\
 \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(\mathbf{u}; \mathbf{u})} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} & \text{v prostoru}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Pak stačí definovat, že dvě úsečky  $AB$ ;  $CD$  jsou shodné právě tehdy, když jsou reprezentanty vektorů stejných velikostí a stanovit jednotkovou úsečku (popř. jednotkový vektor).

K dispozici je pak i velikost úhlů, která se zavede pomocí vztahu

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{u}; \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \tag{5}$$

Takto doplněný afinní prostor již splňuje i axiomy shodnosti a je tedy euklidovským prostorem. Body a vektory euklidovské roviny (euklidovského prostoru) jsou tedy v analytickém modelu reprezentovány uspořádanou dvojicí (trojicí) reálných čísel. Proto budeme euklidovskou rovinu (euklidovský prostor) často označovat  $E^2$  resp.  $E^3$ . Jeho zaměření pak  $Z(E^2)$  resp.  $Z(E^3)$ .



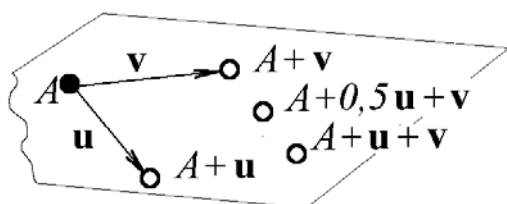
Přímkou roviny  $E^2$  (prostoru  $E^3$ ) je pak množina  $p$  všech bodů tvaru

$$X = A + t \cdot \mathbf{u}; \quad t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

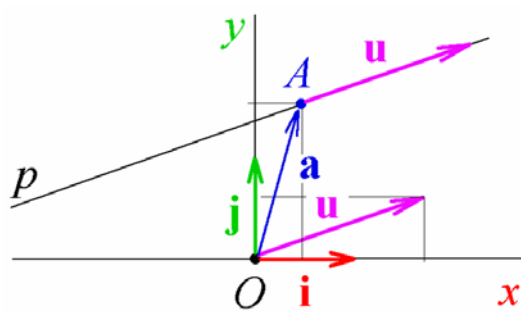
kde  $\mathbf{u}$  je nenulový vektor, rovinou v  $E^3$  pak množina  $\alpha$  všech bodů tvaru

$$X = A + r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}; \quad r, s \in \mathbb{R} \tag{7}$$

kde  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  jsou lineárně nezávislé vektory.



**Poznámka:** Přímku  $p$  často píšeme úsporně ve tvaru  $p = \langle A; \mathbf{u} \rangle$  jako přímkou generovanou („vytvořenou“) bodem  $A$  a vektorem  $\mathbf{u}$ . Rovinu  $\alpha$  pak analogicky  $\alpha = \langle A; \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .



V euklidovském prostoru, kde máme k dispozici jednotkové a navzájem kolmé vektory, můžeme prohlásit jeden bod za počátek (značíme většinou  $O$ ) a pomocí tří jednotkových navzájem kolmých vektorů  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  zapsat podle předchozí poznámky souřadné osy  $x = \langle O; \mathbf{i} \rangle$ ;  $y = \langle O; \mathbf{j} \rangle$ ;  $z = \langle O; \mathbf{k} \rangle$ ; souřadné roviny  $xy = \langle O; \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$ ;  $yz = \langle O; \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ ;  $xz = \langle O; \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle$ . Uspořádaná trojice  $\langle O; \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$  určuje



kartézskou souřadnou soustavu v euklidovské rovině  $E^2$  (viz připojený obrázek); uspořádaná čtveřice  $\langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k} \rangle$  kartézskou souřadnou soustavu v euklidovském prostoru  $E^3$ .

Rovnice (6) poskytuje představu přímky jako množiny bodů které lze zapsat jako součet bodu a vhodného násobku směrového vektoru. Podobně rovnice (7) modeluje rovinu jako množinu bodů, kterou lze zapsat jako součet bodu a lineární kombinace dvou bázových vektorů. Na první pohled však neposkytují významnou výhodu oproti rovnicím (1) resp (2). Body v rovnicích (6) a (7) zdánlivě nejsou nic jiného, než vektory v rovnicích (1) a (2). Rozdíl je zdánlivě jen v označení. Ani body v rovnicích (6), (7) nemá smysl násobit (i zde bychom tím opustili uvažovanou přímku či rovinu). S těmito rovnicemi tedy není možné zacházet tak, jak jsme u rovnic běžně zvyklí. Přesněji řečeno – ne vždy má úprava, která je u algebraických rovnic běžná, geometrický smysl.

Položíme-li např.  $t = 1$ , obdržíme rovnici (5) ve tvaru

$$X = A + \mathbf{u} \quad (8)$$

„Převědme“ nyní bod  $A$  na druhou stranu rovnice. Dostaneme

$$\mathbf{u} = X - A \quad (9)$$

Co to však znamená? Můžeme snad vektor chápat jako „rozdíl bodů“? V jistém smyslu ano – představíme-li si totiž vektor  $\mathbf{u}$  jako orientovanu úsečku  $\overrightarrow{AX}$ , dostaneme souřadnice tohoto vektoru jako rozdíl souřadnic bodů  $X; A$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \overrightarrow{AX} = X - A &= (x_1 - a_1; x_2 - a_2) = (u_1; u_2) && \text{v rovině} \\ \mathbf{u} = \overrightarrow{AX} = X - A &= (x_1 - a_1; x_2 - a_2; x_3 - a_3) = (u_1; u_2; u_3) && \text{v prostoru} \end{aligned} \quad (10)$$

Je-li bodem  $A$  speciálně počátek souřadné soustavy, nazýváme vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \overrightarrow{OX} &= X - O = (x_1 - 0; x_2 - 0) = (x_1; x_2) \\ \text{resp. } \mathbf{x} = \overrightarrow{OX} &= X - O = (x_1 - 0; x_2 - 0; x_3 - 0) = (x_1; x_2; x_3) \end{aligned}$$

**polohovým vektorem bodu  $X$ .**

Vektor jako „rozdíl bodů“ dle (10) nám navíc spolu se vztahy (4) poskytuje známé vzorečky pro délku úsečky  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}\| &= \|\overrightarrow{AB}\| \stackrel{(10)}{=} \|B - A\| \stackrel{(10)}{=} \|(b_1 - a_1; b_2 - a_2)\| \stackrel{(4)}{=} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} && \text{v rovině} \\ \|\mathbf{c}\| &= \|\overrightarrow{AB}\| \stackrel{(10)}{=} \|B - A\| \stackrel{(10)}{=} \|(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)\| \stackrel{(4)}{=} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} && \text{v prostoru} \end{aligned}$$

Otázkami souvisejícími s rozdílem bodů se budeme podrobněji zabývat ve třetí kapitole.

Geometrie jako abstraktní matematická struktura se začala rodit v 19. století v pracích Lobačevského (1792- 1856), Riemanna (1826 - 1866) a především německého matematika Davida Hilberta (1862 - 1943).

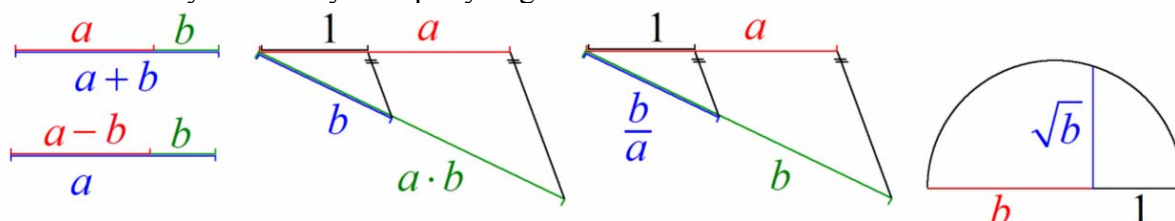
Díky tomuto modernímu přístupu ke geometrii se podařilo vyřešit mnoho geometrických problémů, které odolávaly úsilí matematiků po tisíce let, např.:

- a) Kvadratura kruhu:** Sestrojit čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh.  
**b) Rektifikace kružnice:** Sestrojit úsečku, která má stejnou délku jako daná kružnice.  
**c) Zdvojení krychle:** Sestrojit krychli, která má dvakrát větší objem než krychle daná a další.

„Algebraické“ řešení těchto úloh je velmi jednoduché: Kruh má obsah  $\pi r^2$ . Čtverec stejného obsahu má tedy stranu  $a = \sqrt{S} = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$  a první problém je vyřešen. Kružnice má délku  $2\pi r$ . Sestrojíme-li tedy úsečku této délky, máme vyřešen problém číslo dvě. Třetí problém vyřešíme sestrojením úsečky o velikosti  $\sqrt[3]{2 \cdot V}$ .

Příčina tisíciletých potíží geometrů spočívala v tom, že tyto úlohy byly formulovány jako euklidovské konstrukce, tj. řešení se má nalézt pouze pravítkem a kružítkem (tzv. PK konstrukce). Avšak v analytickém modelu lze relativně snadno dokázat, že řešení PK konstrukcemi není možné. Naznačme aspoň hlavní myšlenku. Ve všech těchto úlohách máme zadány dva body – (střed kružnice a bod na kružnici, popř. dva vrcholy krychle). Pro jednoduchost předpokládejme, že délka takto zadané úsečky  $AB$  je jedna, a umístíme ji do souřadné soustavy tak, že  $A = [0; 0]$ ;  $B = [1; 0]$ . Máme-li ke konstrukci dalších bodů použít jen pravítko a kružítko, pak dalšími body mohou být jen průsečíky přímek a kružnic. Přímky, to jsou v analytickém modelu lineární rovnice, kružnice jsou (speciální) rovnice kvadratické. Nalézat body pravítkem a kružítkem znamená v analytickém modelu řešit soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kdy obě rovnice jsou lineární (dvě přímky) nebo kvadratické (dvě kružnice), nebo jedna je lineární a druhá kvadratická (přímka a kružnice).

Všechny tyto případy lze řešit tak, že soustavy rovnic o dvou neznámých převedeme na jednu rovnici o jedné neznámé, která je buď lineární (dvě přímky), anebo kvadratická (v ostatních případech). Tyto rovnice vyřešíme použitím čtyř základních aritmetických operací (v „lineárním“ případě) a druhé odmocniny (v „kvadratickém“ případě). Ne náhodou nám PK konstrukce právě tyto operace poskytují (viz obrázek): součet a rozdíl úseček realizujeme jejich přenášením, součin a podíl máme k dispozici díky podobnosti trojúhelníků a druhou odmocninu díky Euklidovým resp. Pythagorově větě.



Protože tyto konstrukce lze opakovat a různě kombinovat, lze pravítkem a kružítkem sestrojiti libovolné číslo, který je výsledkem konečného počtu sečítání, odčítání, násobení, dělení a druhých odmocnin (taková čísla nazýváme PK čísla). Při troše trpělivosti a preciznosti si tak pravítkem a kružítkem můžeme sestrojiti úsečku délky

$$d = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{53 - \sqrt{8}}} \cdot (3 + \sqrt{5}) + 14^2}{\sqrt{253} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}} + \left( \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}} + \frac{\sqrt{5}}{(1 + \sqrt{3})} \right)^2$$

Vypadá to, že možnosti pravítka a kružítko jsou v tomto směru prakticky neomezené, ale není tomu tak. Moderní algebra a analýza totiž ukázala, že žádné „sebedivočejší“ PK číslo nemůže být rovno ani číslu  $\pi$ , ani číslu  $\sqrt[3]{2}$ . A tak je například možno pravítkem a kružítkem sestrojiti

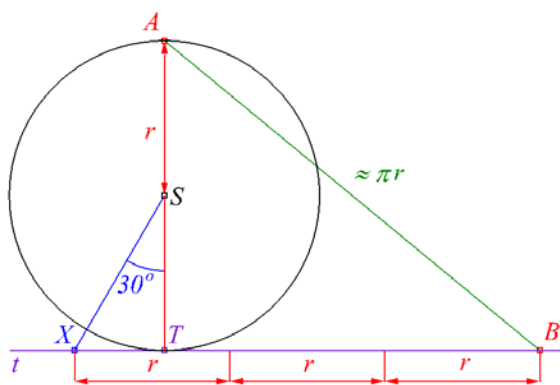
pravidelný pětiúhelník: je-li jeho střed  $S = [0; 0]$  a vrchol v jednom z bodů  $P_1 = [\pm 1; 0]$ , jsou zbylé čtyři vrcholy určeny PK-souřadnicemi  $P_{2,3,4,5} = \left[ \pm \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}; -\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5}) \right]$ . Není už ale možno sestavit např. pravidelný sedmiúhelník. Šedesátistupňový úhel lze pravítkem a kružítkem velmi jednoduše rozdělit na poloviny, čtvrtiny, osminy atd., ale nelze ho rozdělit na třetiny apod.

Analytická geometrie je tedy podstatně „mocnější“ nástroj než klasická syntetická geometrie, která pracuje jen s euklidovskými konstrukcemi - PK geometrie. Ta totiž není modelem euklidovské geometrie jako geometrie splňující axiomy I1-I3, U1-U4, S1-S6, A, C, E (které axiomy nesplňuje?).

Přesto má PK geometrie v inženýrské praxi nezastupitelné místo. Řadu konstrukcí je totiž podstatně jednodušší provést pravítkem a kružítkem, než ji řešit analytickými metodami. Analytické řešení mnoha úloh je možné jen díky moderní výpočetní technice a speciálním algoritmům, které byly vyvinuty pro CAD systémy (principy některých z nich ukážeme i v tomto textu). Řešení „tužkou“ poskytuje nenahraditelnou vizuální představu řešení, kterou inženýr při práci s grafickým systémem musí vždy mít. Navíc neřešitelnost některých úloh pravítkem a kružítkem není podstatná. Pro tyto úlohy totiž geometrie vyvinula celou řadu „přibližných“ konstrukcí, jejichž přesnost ovšem mnohokrát převyšuje možnosti sebepřesnějšího rýsování.

**6. Příklad** – rektifikace kruhového oblouku: Sestrojme úsečku, která má přibližně stejnou délku jako

- daná půlkružnice
- daný kruhový oblouk příslušný středovému úhlu  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{6}$



Vypočteme chybu, které se dopustíme v přibližné konstrukci dle připojeného obrázku – autorem této konstrukce je **Adam Kochaňski** (1631-1700).

**Řešení:**

a) Vypočteme délku takto získané úsečky AB, která rektifikuje půlkružnici:

$$|XT| = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$$

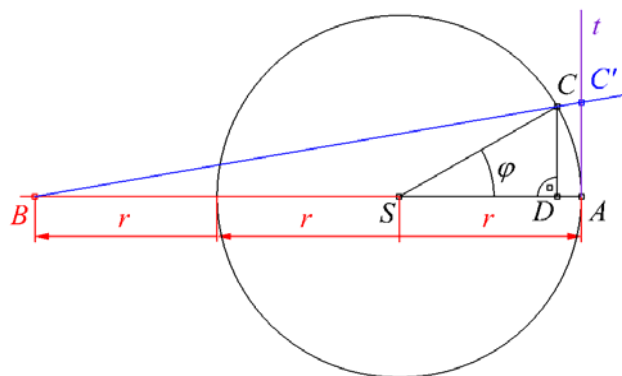
$$|BT| = 3r - \frac{\sqrt{3}}{3} r = \left( 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot r$$

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |BT|^2} = \sqrt{4r^2 + \left( 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot r^2} = r \cdot \sqrt{13 - 2\sqrt{3} + 3^{-1}}$$

Délka půlkružnice je  $\pi \cdot r$ , chyba, které se dopustíme při rektifikaci oblouku s poloměrem jednoho metru, je tedy

$$E = \left| \pi - \sqrt{13 - 2\sqrt{3} + 3^{-1}} \right| \approx 0,000\,06\,m = 0,06\,mm$$

což je chyba, která je hluboko pod úrovní nepřesností, kterých se dopustíme při sebepečlivějším rýsování.



**b)** K této rektifikaci je vhodná konstrukce českého geometra **Jana Sobotky** (1862 - 1931), která je zřejmá z následujícího obrázku

Porovnejme opět délku takto získané úsečky s délkou oblouku pro poloměr jednoho metru a úhel  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ : Délka kruhového oblouku je zřejmě  $\frac{\pi}{6}$ , ke stanovení délky úsečky  $|AC'|$  určíme nejdříve velikosti úseček  $|CD|$  a  $|BD|$ . Je

zřejmě  $|CD| = \frac{1}{2}$  a dále:

$$|SD| = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |BD| = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} Z \text{ podobnosti trojúhelníků } \triangle BDC; \triangle BAC'$$

máme

$$\frac{|AC'|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|} \Rightarrow |AC'| = \frac{|CD|}{|BD|} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4+\sqrt{3}} \cdot 3 = \frac{3}{4+\sqrt{3}}$$

Chyba je tedy

$$E = \left| \frac{\pi}{6} - \frac{3}{4 + \sqrt{3}} \right| \approx 0,000 \text{ } 2 \text{ } m \approx 0,2 \text{ } mm$$

což je opět daleko za hranicemi možností sebepečlivějšího rýsování. Ve většině praktických situací lze tuto konstrukci použít až do velikosti středového úhlu cca  $60^\circ$ .

**7. Poznámka:** V geometrii stojíme někdy před problémem opačným – na dané kružnici vymežit oblouk, který má stejnou délku jako daná úsečka. V tom případě použijeme opět Sobotkovu konstrukci s tím, že tentokrát nesestrojujeme neznámý bod  $C'$  pomocí známého bodu  $C$ , ale naopak neznámý bod  $C$  pomocí známého bodu  $C'$ . Tento postup nazýváme **navinutí úsečky na kružnici**.

Jak analytický tak syntetický přístup ke geometrii má v inženýrské praxi svá pro i proti. Některé problémy se efektivněji řeší analyticky, jiné synteticky. V dalším textu budeme proto analytický a syntetický přístup často střídát a v mnoha případech kombinovat.

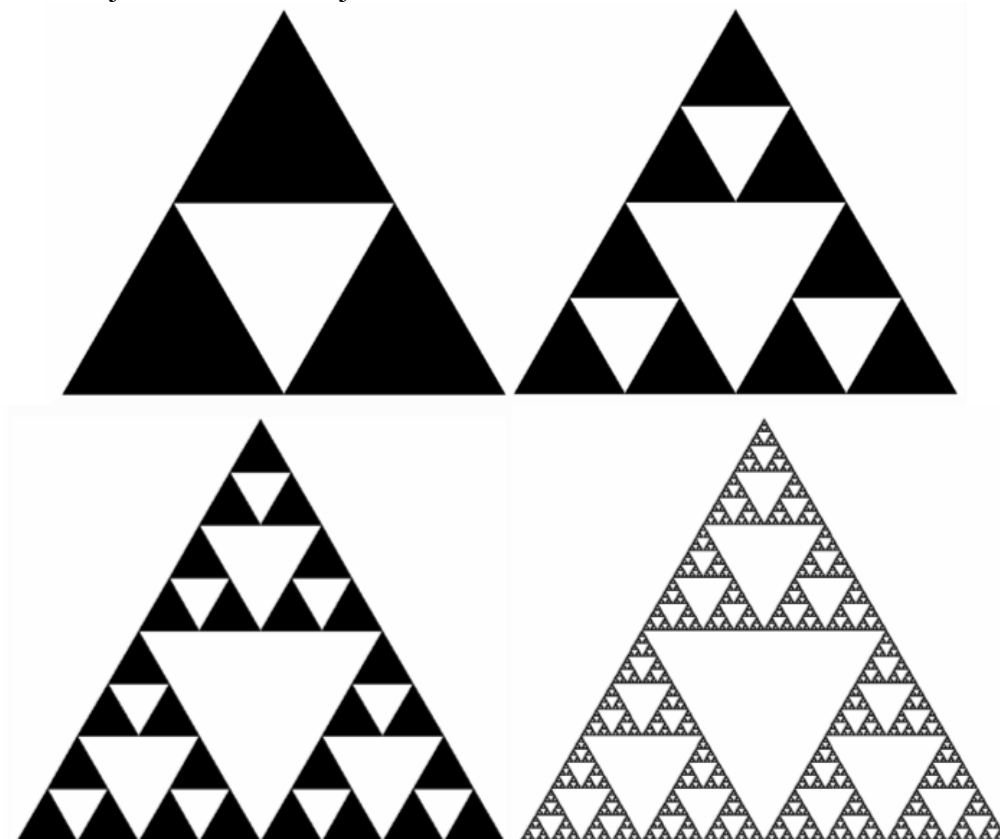
Euklidovskou rovinu budeme značit  $E^2$ , euklidovský prostor pak  $E^3$ .

## 2.4 Dimenze, pojem křivky, plochy a tělesa

Křivky, plochy a tělesa patří mezi geometrické útvary (geometrickým útvarem rozumíme libovolnou podmnožinu  $E^2$  resp.  $E^3$ ). Přitom křivku si běžně představujeme jako jednorozměrný útvar, tj. útvar, u něhož měříme délku, plochu jako útvar dvojrozměrný, kterému měříme obsah, těleso jako útvar trojrozměrný, zde měříme objem. Nemá smysl např.

dvojrozměrnému útvaru měřit délku (ta je vždy nekonečná), ani objem (ten je vždy nulový). Uvažujeme-li tedy pouze omezené útvary (tj. útvary, které jsou podmnožinou vhodného kruhu popř. koule), je vymezení pojmů křivka, plocha a těleso zdánlivě velmi jednoduché: Křivka je útvar, který má konečnou (a nenulovou) délku a nulový obsah i objem. Plocha je útvar, který má nekonečnou délku, konečný (a nenulový) obsah a nulový objem. Těleso je útvar, který má nekonečnou délku i obsah a konečný (a nenulový) objem. Tak jednoduché to ale není.

**1. Příklad – Sierpiňského trojúhelník:** Sestrojme rovnostranný trojúhelník a vyjměme z něj vnitřek trojúhelníka určeného středními příčkami. Ve zbývajících třech trojúhelnících provedme totéž a tímto způsobem pokračujme do nekonečna. Obdržíme tak útvar zvaný Sierpiňského trojúhelník. Určeme jeho obsah.



**Řešení:** Označme obsah původního trojúhelníka  $S_0$  a určíme nejdříve obsah  $S'$  odebraných trojúhelníků.

Obsah trojúhelníka odebraného v prvním kroku:  $S_1 = \frac{1}{4} S_0$ .

Obsah trojúhelníků odebraných ve druhém kroku:  $S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = \frac{3}{4^2} S_0$

Obsah trojúhelníků odebraných ve třetím kroku:  $S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_2 = \frac{3^2}{4^3} S_0$

Obsah trojúhelníků odebraných v  $n$ -tém kroku:  $S_n = 3 \cdot \frac{1}{4} S_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{4^n} S_0$

Obsahy odebírané v jednotlivých krocích tedy tvoří geometrickou řadu a celkový obsah odebraných trojúhelníků je

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} S_0 = \frac{S_0}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{S_0}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = S_0$$

Obsah Sierpiňského trojúhelníka je tedy  $S = S_0 - S' = 0$ . Podle naší předchozí úvahy se tedy zřejmě nejedná o útvar dvojrozměrný, ale jednorozměrný. Pokusme se tedy určit délku Sierpiňského „křivky“. Vyjdeme tedy z obvodu původního trojúhelníka, ke kterému budeme postupně přičítat obvody odebíraných trojúhelníků. Označme  $l_0$  obvod výchozího trojúhelníka.

Obvod prvního odebraného trojúhelníka je

$$l_1 = \frac{1}{2} l_0$$

Obvody trojúhelníků odebraných ve druhém kroku jsou

$$l_2 = \frac{3}{2} l_1 = \frac{3}{2^2} l_0$$

Obvody trojúhelníků odebraných ve třetím kroku jsou

$$l_3 = \frac{3}{2} l_2 = \frac{3^2}{2^3} l_0$$

Obvody trojúhelníků odebraných v  $n$ -tém kroku jsou

$$l_n = \frac{3}{2} l_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2^n} l_0$$

Celkový obvod je tedy součtem

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n} l_0 = \frac{l_0}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$$

neboť poslední geometrická řada diverguje.

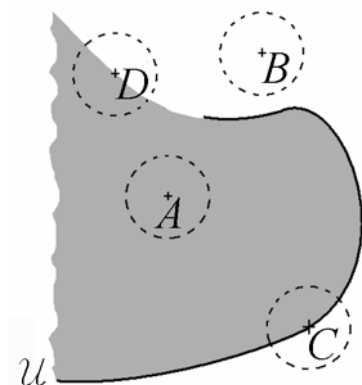
Jednoduchou intuitivní úvahou, kterou jsme provedli v úvodu této kapitoly, tedy nelze rozhodnout, zda tato množina je křivkou, anebo plochou. Naše vymezení pojmů dimenze („počtu rozměrů“), křivka, plocha a těleso je třeba geometricky precizovat. Základem tohoto zpřesnění budou topologické pojmy otevřené množiny, uzávěru, souvislé množiny a pokrytí.

**2.  $\varepsilon$ -okolí :**  $\varepsilon$ -okolím bodu  $X$  v rovině  $E^2$  rozumíme množinu

$$O_{\varepsilon}^2(X) = \{P \in E^2 \mid |PX| < \varepsilon\}$$

$\varepsilon$ -okolím bodu  $X$  v prostoru  $E^3$  rozumíme množinu

$$O_{\varepsilon}^3(X) = \{P \in E^3 \mid |PX| < \varepsilon\}$$



Okolím  $O_{\varepsilon}^2(X)$  je tedy kruh se středem v bodě  $X$  bez hraniční kružnice (otevřený kruh), okolím  $O_{\varepsilon}^3(X)$  je koule se středem v bodě  $X$  bez hraniční kulové plochy (otevřená koule). V případě, kdy nebude hrozit nedorozumění, budeme horní index (značící „počet rozměrů“) vynechávat.

**3. Vnitřní bod:** Bod  $A$  se nazývá vnitřním bodem útvaru  $\mathcal{U}$  právě tehdy, když existuje  $O_{\varepsilon}(A)$  tak, že  $O_{\varepsilon}(A) \cap \mathcal{U} = O_{\varepsilon}(A)$ .

**4. Vnější bod:** Bod  $B$  se nazývá vnějším bodem útvaru  $\mathcal{U}$  právě tehdy, když existuje  $O_{\varepsilon}(B)$  tak, že  $O_{\varepsilon}(B) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ .

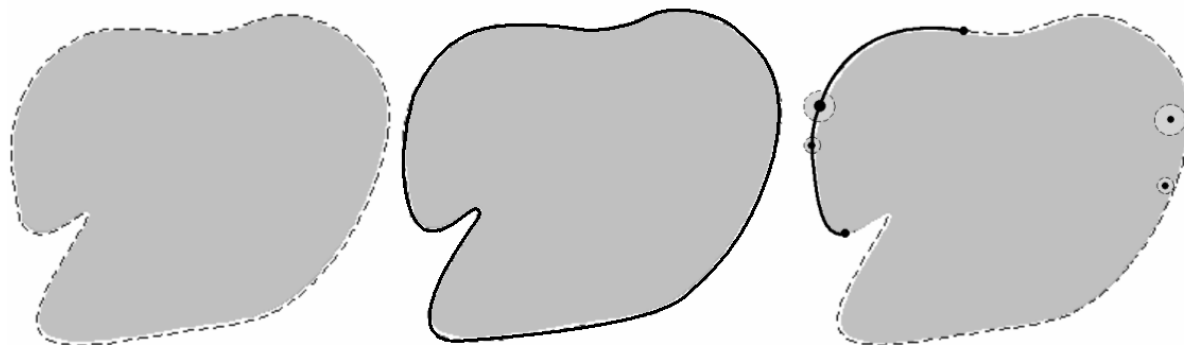
**5. Hraniční bod:** Bod  $C$  se nazývá hraničním bodem útvaru  $\mathcal{U}$  právě tehdy, když není ani vnitřním, ani vnějším bodem, tj. pro každé  $O_\varepsilon(C)$  je  $O_\varepsilon(C) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

a současně  $O_\varepsilon(C) \cap \mathcal{U} \neq O_\varepsilon(C)$ .

**6. Hranice útvaru:** Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí útvaru.

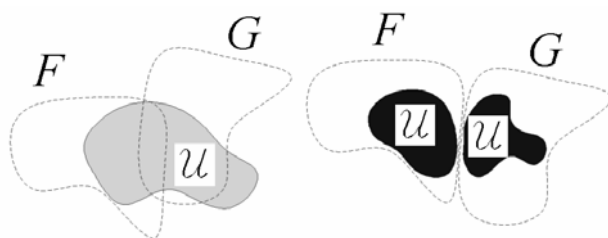
Hraniční body útvaru mohou do útvaru patřit (viz např. bod  $C$  útvaru  $\mathcal{U}$ ), anebo nemusejí (viz bod  $D$  útvaru  $\mathcal{U}$ ).

**7. Otevřená množina:** je množina, jejíž všechny body jsou vnitřní



Otevřená množina je tedy množina, do níž nepatří ani jeden její hraniční bod (viz připojený obrázek vlevo). Kromě otevřených množin hovoříme i o množinách uzavřených. Uzavřená množina je množina, která obsahuje všechny své hraniční body (viz obrázek uprostřed). Není to tedy tak, že uzavřená množina je ta, která není otevřená. Existují množiny, které nejsou ani otevřené ani uzavřené, neboť obsahují jen část své hranice (viz obrázek vpravo).

Důležitou vlastností geometrického útvaru je jeho souvislost. Intuitivně chápeme souvislost tak, že souvislý útvar se skládá z „jednoho kusu“, kdežto útvar nesouvislý je „roztržený“ na dva či více „kusů“. Matematický nástroj k rozpoznání „roztržení“ útvaru je znázorněn na dalším obrázku.



Útvar vlevo bychom rádi považovali za souvislý, kdežto útvar vpravo nikoli – je „roztržený na dva kusy“. Jak toto „roztržení“ rozpoznat dosud známými matematickými nástroji? Sestrojme dvě neprázdné otevřené množiny  $F; G$ , kterými „pokryjeme“ studovaný útvar, tj.  $\mathcal{U} \subseteq F \cup G$ , a to tak,

aby ani jedna z množin  $F; G$  nebyla v tomto pokrytí „zbytečná“ – tj.;  $\mathcal{U} \cap F \neq \emptyset$ .  $\mathcal{U} \cap G \neq \emptyset$  Pokud se i při „sebešikovnější“ konstrukci množiny  $F; G$  překrývají, tj.  $F \cap G \neq \emptyset$ , je útvar  $\mathcal{U}$  souvislý. V opačném případě ho prohlásíme za nesouvislý.

**8. Souvislý útvar:** Geometrický útvar  $\mathcal{U} \subseteq E^2$  popř.  $\mathcal{U} \subseteq E^3$  nazveme souvislý právě tehdy, když pro každé dvě neprázdné otevřené množiny  $F; G$  takové, že  $\mathcal{U} \subseteq F \cup G$ ;  $\mathcal{U} \cap F \neq \emptyset$ ;  $\mathcal{U} \cap G \neq \emptyset$ , platí  $F \cap G \neq \emptyset$ . V opačném případě nazýváme útvar  $\mathcal{U}$  nesouvislý.

Nyní budeme směřovat k pojmu dimenze.

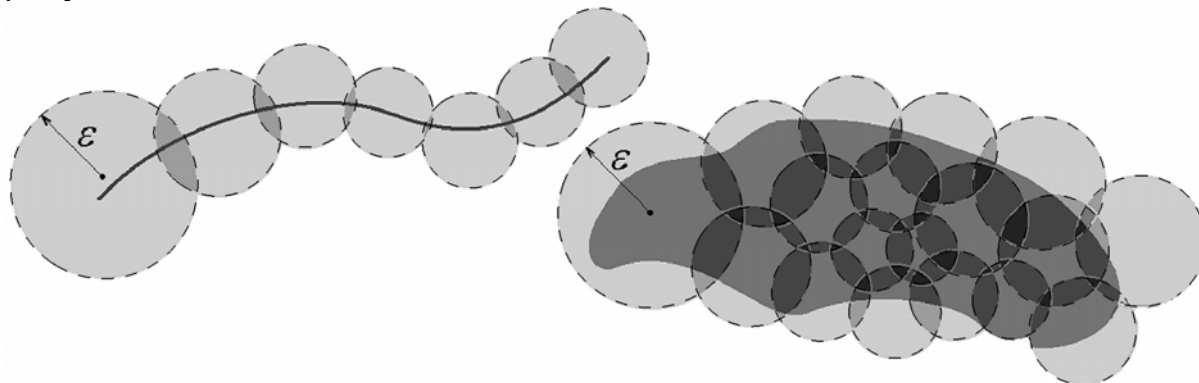
**9. Pokrytí:** Uvažujme souvislý útvar  $\mathcal{U}$  a sestrojme okolí  $O_{\varepsilon_i}(X_i)$  některých jeho bodů  $X_1; X_2; \dots; X_n$  tak, že platí

$$\mathcal{U} \subseteq O_{\varepsilon_1}(X_1) \cup O_{\varepsilon_2}(X_2) \cup \dots \cup O_{\varepsilon_n}(X_n) = \bigcup_{i=1}^n O_{\varepsilon_i}(X_i)$$

Říkáme, že jsme sestrojili pokrytí útvaru  $\mathcal{U}$ . Použitých okolí může být i nekonečně mnoho, v tom případě píšeme

$$\mathcal{U} \subseteq O_{\varepsilon_1}(X_1) \cup O_{\varepsilon_2}(X_2) \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\varepsilon_i}(X_i)$$

Jestliže poloměr žádného použitého okolí není větší než  $\varepsilon$ , označujeme toto pokrytí jako  $\varepsilon$ -pokrytí.



Na obrázku máme znázorněna  $\varepsilon$ -pokrytí útvaru, který bychom měli prohlásit za jednorozměrný, resp. dvojrozměrný. Všimněme si, že v pokrytí jednorozměrného útvaru se překrývají maximálně dvě okolí. „Dotyk“ okolí nestačí – okolí jsou totiž otevřené množiny (viz odst. 2) a „bod dotyku“ je bodem hranic, které do žádného okolí nepatří. Tento bod by tedy nebyl pokryt. V pokrytí dvojrozměrného útvaru je nutný překryv tří okolí. Pokud bychom chtěli pokrýt trojrozměrný útvar (zde bychom samozřejmě museli pokrývat koulemi), museli bychom překrýt čtyři okolí (samozřejmě při dostatečně malém  $\varepsilon$ ). To nás vede k následující definici:

**10. Topologická dimenze:** Geometrický útvar  $\mathcal{U}$  má (topologickou) dimenzi  $n$  právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje jeho  $\varepsilon$ -pokrytí tak, že každý bod útvaru  $\mathcal{U}$  je pokryt maximálně  $n+1$  okolími.

Prívlastek topologická v tuto chvíli není třeba zdůrazňovat. Bude nutný až v kpt. 10, kde pojem dimenze ještě poněkud zobecníme. Definice křivky, plochy resp. tělesa je nyní už velmi jednoduchá:

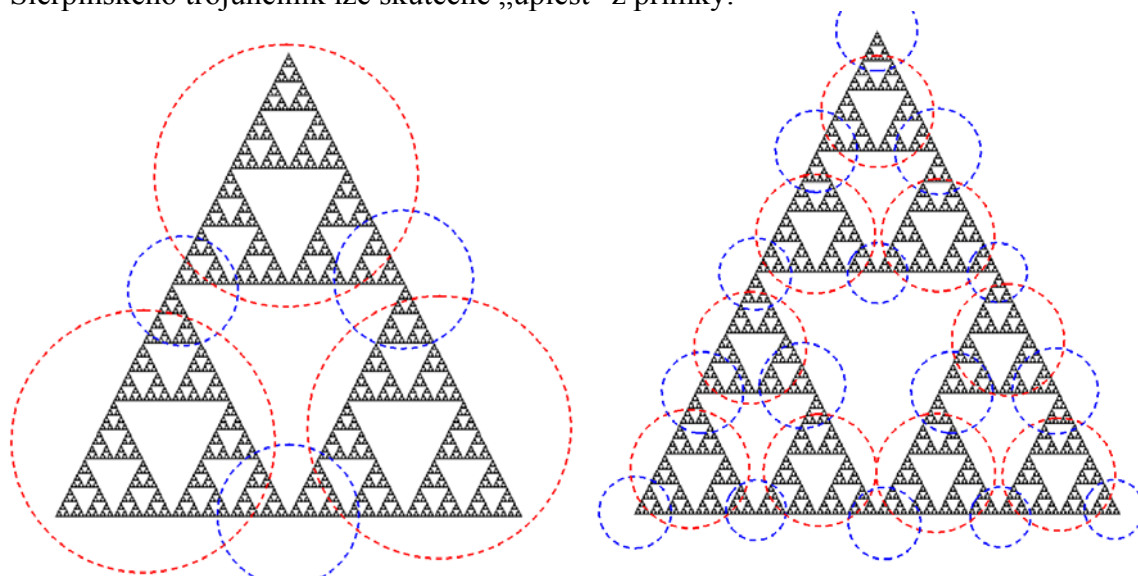
**11. Křivka, plocha, těleso:** Křivkou (plochou, tělesem) euklidovského prostoru  $E^3$  rozumíme (topologicky) jednorozměrný (dvojrozměrný, trojrozměrný) souvislý útvar.

Takto definovanou křivkou je např. libovolná přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruhový oblouk. Modelem takové křivky může být i „nekonečně tenká“ a „libovolně zmuchlaná“ nit. Podobně plochou může být rovina, čtverec, kruh, kulová plocha, povrch jehlanu či kužele. Modelem takové plochy může být i „nekonečně tenká“ a „libovolně zmuchlaná“ fólie.

Vraťme se nyní k příkladu 1, kde jsme prozatím nebyli schopni rozhodnout, zda Sierpiňského trojúhelník je křivka, anebo plocha. Na následujícím obrázku je sestrojeno  $\varepsilon$ -pokrytí tohoto trojúhelníka, kde k pokrytí každého bodu stačí maximálně dvě okolí. Je zřejmé, že pokud jsme takto sestrojili  $\varepsilon$ -pokrytí pro nějaké  $\varepsilon$ , můžeme zcela analogicky sestrojit i pokrytí pro



$\frac{\varepsilon}{2}$ ; (viz obrázek vpravo)  $\frac{\varepsilon}{4}$  atd., tedy pro každé  $\varepsilon > 0$ . Znamená to, že Sierpiňského trojúhelník je (topologicky) jednorozměrný - je to tedy křivka. Křivka je to, pravda, velmi „zašmodrchaná“ (v každém svém bodě má „uzel“), ale v př. 2 kpt. 13. 4 ukážeme, že Sierpiňského trojúhelník lze skutečně „uplést“ z přímky.



Konkrétními křivkami, plochami a tělesy používanými v technické praxi, se budeme zabývat postupně v dalším textu. Na tomto místě uveďme alepoň ty, k jejichž definici nejsou potřeba další speciální pojmy a vlastnosti, a jsou tedy v tomto smyslu elementární. Prosíme čtenáře, aby si pomocí předchozího textu a svých středoškolských znalostí zopakoval příslušné definice, jejichž znalost budeme v dalším textu předpokládat.

**12. Elementární křivky:** Mezi elementární křivky řadíme **přímku** a její části - především **polopřímku** a **úsečku**. Další elementární křivkou je **kružnice**.

**13. Elementární plochy:** Mezi elementární plochy řadíme **rovinu** a její části – především **polorovinu**, dále základní rovinné geometrické útvary známé ze středoškolské geometrie a rovněž některé prostorové plochy – **hranolovou**, **jehlanovou**, **kruhovou válcovou**, **kruhovou kuželovou** a dále **plochu kulovou**.

**14. Elementární tělesa:** Mezi elementární tělesa řadíme opět útvary známé ze střední školy – **hranol** a jeho speciální případy, především **kvádr** a **krychli**, dále **jehlan** - **kosý**, **kolmý**, **pravidelný  $n$ -boký**, **kruhový válec** a **kužel** – **kosý** a **kolmý (rotační)** a konečně **kouli**. V dalším textu budeme rovněž předpokládat znalost související terminologie – **vrchol**, **strana**, **hrana**, **plášť** atd.

## 2. 5 Geometrická zobrazení v euklidovské rovině

Zobrazení množiny  $A$  do množiny  $B$  je, jak známo, podmnožina kartézského součinu  $A \times B$ , která obsahuje pouze uspořádané dvojice  $[x; x']$ , ve kterých každý vzor  $x$  má nejvýše jeden obraz  $x'$ . Speciálně v euklidovské rovině  $E^2$  resp. v euklidovském prostoru  $E^3$  je každému bodu  $X$  přiřazen nejvýše jeden bod  $X'$ . Na střední škole jste se zabývali zobrazeními v  $E^2$  - osovou a středovou souměrností, posunutím, otočením a stejnolehlostí, a to výhradně synteticky – geometrické úlohy na toto téma jste řešili pravítkem a kružítkem. Grafické systémy počítačů tyto úlohy „umějí“ řešit rovněž. Nejen  $E^2$ , ale i v  $E^3$ , a protože nemají

pravítko a kružítko, řeší je všechny analyticky. Analytickému popisu zobrazení v  $E^2$  resp. v  $E^3$  (tedy popisu pomocí souřadnic) je věnována tato kapitola.

Uvažujme tedy bod  $X[x_1; x_2] \in E^2$ , který zobrazíme na bod  $X'[x_1'; x_2'] \in E^2$ . Dále mějme zobrazení  $\mathcal{Z}: E^2 \rightarrow E^2$ . Protože toto zobrazení modelujeme analyticky, je popsáno soustavou rovnic, která na základě souřadnic  $[x_1; x_2]$  bodu  $X$  stanoví souřadnice  $[x_1'; x_2']$  bodu  $X'$ . Tuto soustavu lze zapsat obecně ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1; x_2) \\ x_2' &= f_2(x_1; x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

**1 Příklad:** Jsou dány body  $A=[0;0]$ ;  $B=[2\pi;0]$ ;  $S=[\pi;0]$  a zobrazení  $\mathcal{Z}: E^2 \rightarrow E^2$ , které je dáno rovnicemi

$$\mathcal{Z}: \begin{aligned} x_1' &= 3 \sin 3x_1 + 4 \\ x_2' &= 2 \cos 5x_1 + 6 \end{aligned}$$

Určete obrazy  $\mathcal{Z}(A)=A'$ ;  $\mathcal{Z}(S)=S'$ ;  $\mathcal{Z}(B)=B'$  bodů  $A; S; B$ .

**Řešení:**

$$\begin{aligned} A': \begin{aligned} a_1' &= 3 \sin 3a_1 + 4 \\ a_2' &= 2 \cos 5a_1 + 6 \end{aligned} &\Rightarrow \begin{aligned} a_1' &= 3 \sin(3 \cdot 0) + 4 \\ a_2' &= 2 \cos(5 \cdot 0) + 6 \end{aligned} \Rightarrow A' = [a_1'; a_2'] = [4; 8] \\ S': \begin{aligned} s_1' &= 3 \sin 3s_1 + 4 \\ s_2' &= 2 \cos 5s_1 + 6 \end{aligned} &\Rightarrow \begin{aligned} s_1' &= 3 \sin(3\pi) + 4 \\ s_2' &= 2 \cos(5\pi) + 6 \end{aligned} \Rightarrow S' = [s_1'; s_2'] = [4; 4] \\ B': \begin{aligned} b_1' &= 3 \sin 3b_1 + 4 \\ b_2' &= 2 \cos 5b_1 + 6 \end{aligned} &\Rightarrow \begin{aligned} b_1' &= 3 \sin(3 \cdot 2\pi) + 4 \\ b_2' &= 2 \cos(5 \cdot 2\pi) + 6 \end{aligned} \Rightarrow B' = [b_1'; b_2'] = [4; 8] \end{aligned}$$

Jestliže touto soustavou transformujeme všechny body útvaru  $\mathcal{U}$ , obdržíme jeho obraz  $\mathcal{U}'$  v daném zobrazení. Pokud funkce  $f$ ,  $g$  jsou spojité (nebo alespoň po částech spojité), je obrazem křivky opět křivka (nebo několik křivek). Obrazem úsečky však nemusí být úsečka. Pokud bychom chtěli příklad řešit ručně, museli bychom určit obrazy „dostatečného“ počtu bodů  $X_1; X_2; \dots; X_n$  úsečky  $AB$ , tyto body vynést do souřadné soustavy a poté spojit pomocí křivítka. Tuto práci tedy raději svěříme počítači vybavenému vhodným grafickým software.

V našem příkladu je  $AB$  úsečka, bod  $S$  je její střed. Obraz této úsečky v zobrazení  $\mathcal{Z}$  si můžeme prohlédnout na obrázku vlevo. Dále jsou zde obrazy téže úsečky  $AB$  v zobrazeních  $\mathcal{Z}^{(1)}$  a  $\mathcal{Z}^{(2)}$ , která jsou dána rovnicemi

$$\mathcal{Z}^{(1)}: \begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1 + 1.5 \\ x_2^{(1)} &= \sin x_1 + 1.5 \end{aligned} \quad \mathcal{Z}^{(2)}: \begin{aligned} x_1^{(2)} &= \cos x_1 \\ x_2^{(2)} &= x_1 + 2.5 \end{aligned}$$

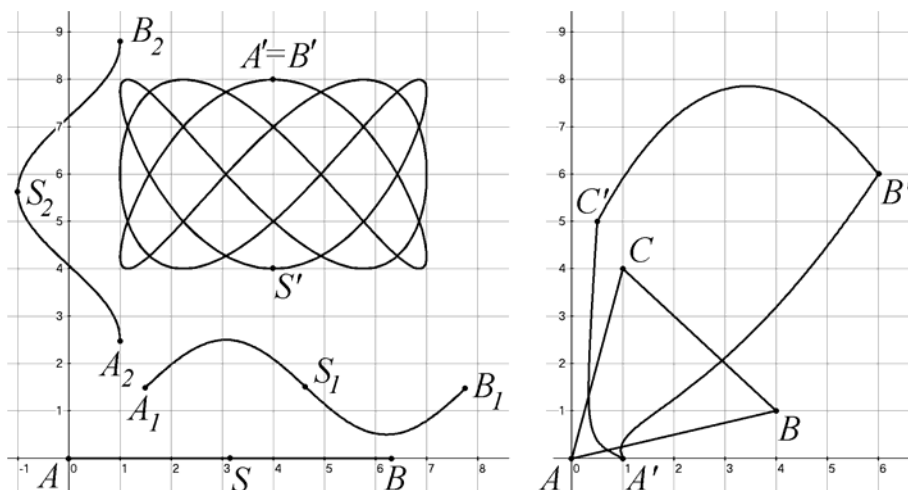
**2 Příklad:** Jsou dány body  $A=[0;0]$ ;  $B=[4;1]$ ;  $C=[1;4]$  a zobrazení  $\mathcal{Z}: F^2 \rightarrow E^2$  je dáno rovnicemi

$$\mathcal{Z}: \begin{aligned} x_1' &= 1.5x_1 - \sqrt{x_2} + 1 \\ x_2' &= \sqrt{x_1} + x_1x_2 \end{aligned}$$

(množina  $F^2$  je tedy podmnožinou  $E^2$  - je to zřejmě množina bodů, jejichž obě souřadnice jsou nezáporné). Určeme obraz trojúhelníka  $\triangle ABC$ .

**Řešení:** Souřadnice  $A'; B'; C'$  vrcholů  $\triangle ABC$  určíme stejně jako v předchozím příkladě, např:

$$B': \begin{aligned} b_1' &= 1.5 \cdot b_1 - \sqrt{b_2} + 1 \Rightarrow b_1' = 1.5 \cdot 4 - \sqrt{1} + 1 \Rightarrow B' = [b_1'; b_2'] = [6; 6] \\ b_2' &= \sqrt{b_1} + b_1 b_2 \Rightarrow b_2' = \sqrt{4} + 4 \cdot 1 \end{aligned}$$



Pro body  $A; C$  analogicky. Toto zobrazení si můžeme prohlédnout na obrázku vpravo. V matematice se budete postupně zabývat spojitými funkcemi jedné i několika proměnných. Poznamenejme, že jsou-li funkce  $f_1(x_1; x_2); f_2(x_1; x_2)$  ve vztahu (1) spojitě, je obrazem úsečky křivka.

V geometrii na střední škole jste se setkávali nejčastěji se zobrazeními, v nichž obrazem přímky byla opět přímka. Tato zobrazení se nazývají **kolineární** (z latinského linea - přímka). Rovnice, které tato zobrazení určují analyticky, jsou lineární. Lze je tedy psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_2 \end{aligned}$$

anebo (použitím základů maticového počtu, se kterým se seznamujete v matematice)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{X'^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X^T} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^T} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

Body (zde  $X; X'$ ) i vektory (zde  $\mathbf{v}$ ) „fungují“ v těchto zápisech jako matice typu  $1 \times 2$ , tedy jako vektory. V těchto zápisech je tedy třeba body reprezentovat jejich polohovými vektory. Polohové vektory bodů budeme tedy značit tučnou velkou kurzívou - pro odlišení od vektorů značících např. posunutí (zde vektor  $\mathbf{v}$ ). Matice  $\mathbf{A}$  typu  $2 \times 2$  v tomto zápisu pak utějuje další parametry zobrazení (např. otáčení, zvětšování atd.).

Stanovení některých zobrazení je velmi jednoduché. Chceme-li např. použít osovou souměrnost s osou v ose  $x$ , zřejmě stačí změnit znaménko druhé souřadnice zobrazovaného bodu, tedy

$$\mathcal{O}_x: \begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}_x \cdot \mathbf{X}^T$$

kde

$$\mathbf{O}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

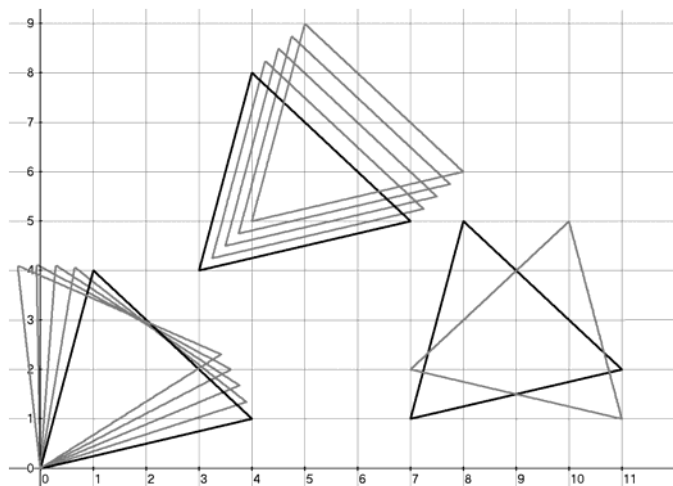
je matice osové souměrnosti podle osy  $x$ . Pro osovou souměrnost s osou  $y$  analogicky

$$\mathcal{O}_y: \begin{matrix} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{X}^T$$

Posunutí (translace) o vektor  $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ :

$$\mathcal{T}_v: \begin{matrix} x_1' = x_1 + v_1 \\ x_2' = x_2 + v_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

Otočení (rotace) o úhel  $\alpha$  kolem počátku:



$$\mathcal{R}_\alpha: \begin{matrix} x_1' = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_2' = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X}^T$$

Na obrázku vidíme takto provedenou rotaci trojúhelníka o  $5^\circ$  kolem počátku a posunutí o vektor  $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  (obojí několikrát po sobě).

V počítačové grafice však nepotřebujeme jen taková „jednoduchá“ zobrazení. Otáčíme nejen kolem počátku, ale i kolem obecného bodu  $S = [s_1; s_2]$ . Útvar potřebujeme zobrazit souměrně nejen podle souřadných os, ale i podle jiných přímek atd. Tato zobrazení získáváme skládáním zobrazení výše uvedených. Avšak tato skládání jsou v afinním prostoru dosti komplikovaná. Na obrázku vidíme sestrojenou souměrnost podle přímky  $p \equiv x = 9$ . Tato přímka vznikne posunutím osy  $y$  (tj. přímky  $x = 0$ ) o vektor  $\mathbf{v} = (9; 0)$ . Výše uvedená analytická reprezentace zobrazení  $\mathcal{O}_y$ ;  $\mathcal{T}_v$  může tedy svádět k závěru, že „posunutá“ osová souměrnost je tvaru

$$\mathcal{O}_p: \begin{matrix} x_1' = -x_1 + 9 \\ x_2' = x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

Jestliže však podle tohoto vyjádření spočítáme souřadnice vrcholů obrazu zobrazovaného trojúhelníka, zjistíme, že výsledek neodpovídá syntetické konstrukci. Situace je totiž poněkud složitější. Abychom mohli použít matici  $\mathbf{O}_y$ , musí osa souměrnosti splývat s osou  $y$ . Proto musíme osu  $x = 9$  i trojúhelník nejdříve posunout o vektor  $-\mathbf{v} = (-9; 0)$ , tj. použít zobrazení

$$\mathbf{X}_1^T = \mathbf{E}\mathbf{X}^T - \mathbf{v}^T$$

Takto získaný bod  $X_1$  můžeme nyní zobrazit v osově souměrnosti s osou  $y$ , tj.

$$\mathbf{X}_2^T = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{X}_1^T = \mathbf{O}_y \cdot (\mathbf{E}\mathbf{X}^T - \mathbf{v}^T)$$

a konečně bod  $X_2$  „posunout zpět“ o vektor  $\mathbf{v}$ , tj.

$$\mathbf{X}^T = \mathbf{E}\mathbf{X}_2^T + \mathbf{v}^T = \mathbf{E} \cdot [\mathbf{O}_y \cdot (\mathbf{E}\mathbf{X}^T - \mathbf{v}^T)] + \mathbf{v}^T$$

Pro osovou souměrnost podle osy  $x = v_1$  tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - v_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z předchozího příkladu vidíme, že v euklidovské rovině je složení tří zobrazení už poměrně komplikované. Osovou souměrnost podle obecné přímky ale obdržíme složením ne tří, ale pěti zobrazení. Navíc budeme skládat zobrazení i v prostoru  $E^3$ , kde bude princip stejný, počet skládaných zobrazení může být ještě vyšší a technické provedení ještě komplikovanější. V euklidovském prostoru je jak analytický, tak syntetický popis takového zobrazení již prakticky neúnosný. V následujících kapitolách proto prostudujeme tato zobrazení v projektivní rovině, která tyto úlohy značně zjednoduší.