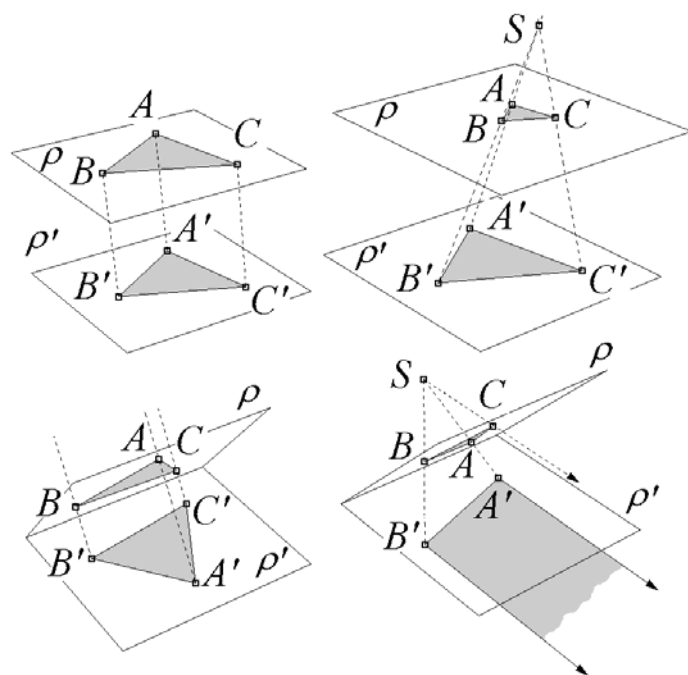


3 Projektivní prostor

3.1 Základní pojmy

Jedním z důležitých pojmů počítačové geometrie je pojem promítání. Promítáním rozumíme zobrazení euklidovského prostoru do euklidovského prostoru, které každou přímku zobrazí opět na přímku, anebo na bod. Popis takových zobrazení je v euklidovském prostoru často velmi komplikovaný.



Podívejme se na potíže syntetického popisu takového zobrazení mezi dvěma různými euklidovskými rovinami, které označíme např. $\rho; \rho'$. Celou situaci si můžeme představit tak, že rovina ρ je průhledná fólie, na které je neprůhlednou barvou sestrojen nějaký geometrický útvar (úsečka, trojúhelník, atd.). Tato fólie je osvětlena světelným zdrojem, jehož paprsky po průchodu fólií dopadají na rovinné stínítko ρ' . Světelný zdroj může být buď bodový, anebo plošný, fólie může být se stínítkem rovnoběžná, anebo různoběžná. Dostáváme tak čtyři různé situace, které jsou znázorněny na obrázku.

Budeme-li se chtít podrobněji popisovat vlastnosti tohoto zobrazení, bude třeba popisovat vždy každou situaci zvlášť. Například trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ jsou v prvním případě shodné, ve druhém už jen podobné. Ve třetím případě už trojúhelníky nemusejí být ani podobné a ve čtvrtém už obrazem trojúhelníka nemusí být trojúhelník. Přesto mají všechny čtyři případy mnohé vlastnosti společné. Proto je výhodné považovat je za případ jediný. To je ovšem možné jen rozšířením našich dosavadních geometrických představ.

Zmíněné čtyři situace se liší tím, že promítací přímky buď mají, anebo nemají společný bod a roviny buď mají, anebo nemají společnou přímku. Tyto čtyři na první pohled rozdílné situace budeme tedy moci popsat jako jediný případ, pokud zajistíme-li tedy, aby i rovnoběžné přímky měly společný bod a rovnoběžné roviny společnou přímku. To vypadá na první pohled velmi podivně – zdá se, že bychom v euklidovském prostoru museli zrušit axiom o rovnoběžkách. I když geometrie, která nezná rovnoběžky, existuje, my půjdeme jinou cestou. V euklidovském prostoru nebudeme nic rušit, naopak ho rozšíříme. Podívejme se nejdříve na rovinu.

Euklidovskou rovinu rozšíříme o projektivní axiom:

P: Každé dvě přímky, které leží v téže rovině, mají společný bod.

Tím se sice dostáváme do sporu s axiomem E (o rovnoběžkách), situaci však jednoduše napravíme tím, že začneme rozlišovat dva druhy bodů: body, které jsme až dosud uvažovali, budou tzv. body vlastní. Axiom E tedy není třeba škrtat, stačí ho pouze upřesnit:

E_p : Bodem A neležícím na přímce p prochází právě jedna přímka a , která s přímkou p nemá společný žádný **vlastní** bod.

Přímku a , o které mluví axiom E_p , nazveme rovnoběžkou k přímce p . Axiom E_p pak tedy říká, že rovnoběžky nemají společný žádný vlastní bod. Protože však podle axiomu **P** nějaký společný bod mít musí, bude tímto společným bodem bod, který není vlastní – nazveme ho tedy **bodem nevlastním**.

Rovinu resp. **prostor**, kde místo axiomu **E** platí axiomy **P** a E_p nazveme **projektivní rovinou** resp. **projektivním prostorem**. Budeme značit ${}_{\infty}E^2$ resp. ${}_{\infty}E^3$.

Než se zamyslíme nad tím, jak si nevlastní bod, projektivní rovinu a projektivní prostor představit (víme, že přísně vzato si je nemusíme představovat vůbec nijak), podíváme se na nějaké vlastnosti.

1. Věta: Každé dvě roviny projektivního prostoru mají

- a) společný bod
- b) společnou přímku

Pro ilustraci předvedme důkaz této věty (další věty už dokazovat nebudeme)

Důkaz: Jsou-li roviny α, β různoběžné, mají společnou průsečnici, kterou známe již ze středoškolské geometrie. Je-li $\alpha \parallel \beta$, existují přímky a, b tak, že $a \subset \alpha$; $b \subset \beta$ a $a \parallel b$. Podle axiomu **P** mají přímky a, b společný bod – označme ho R . Bod R tedy leží na přímce a , přímka a leží v rovině α , podle axiomu **I7** tedy bod R leží v rovině α . Bod R ovšem leží i na přímce b , přímka b leží v rovině β , podle téhož axiomu **I7** tedy bod R leží i v rovině β . Bod R je tedy společným bodem rovin α, β - dokázali jsme tvrzení a). Mají-li však dvě roviny společný bod, musí mít podle axiomu **I9** společnou přímku, která tímto bodem prochází.

Zcela bez jakýchkoli představ, jen použitím dosavadních axiomů lze dále dokázat, že v každé rovině projektivního prostoru leží nekonečně mnoho nevlastních bodů, které všechny leží na jedné přímce. Jedná se o tzv. **nevlastní přímku** (na rozdíl od klasických přímek „euklidovských“ které nazýváme přímkami vlastními). Nevlastní přímkou je i společná přímka dvou rovnoběžných rovin.

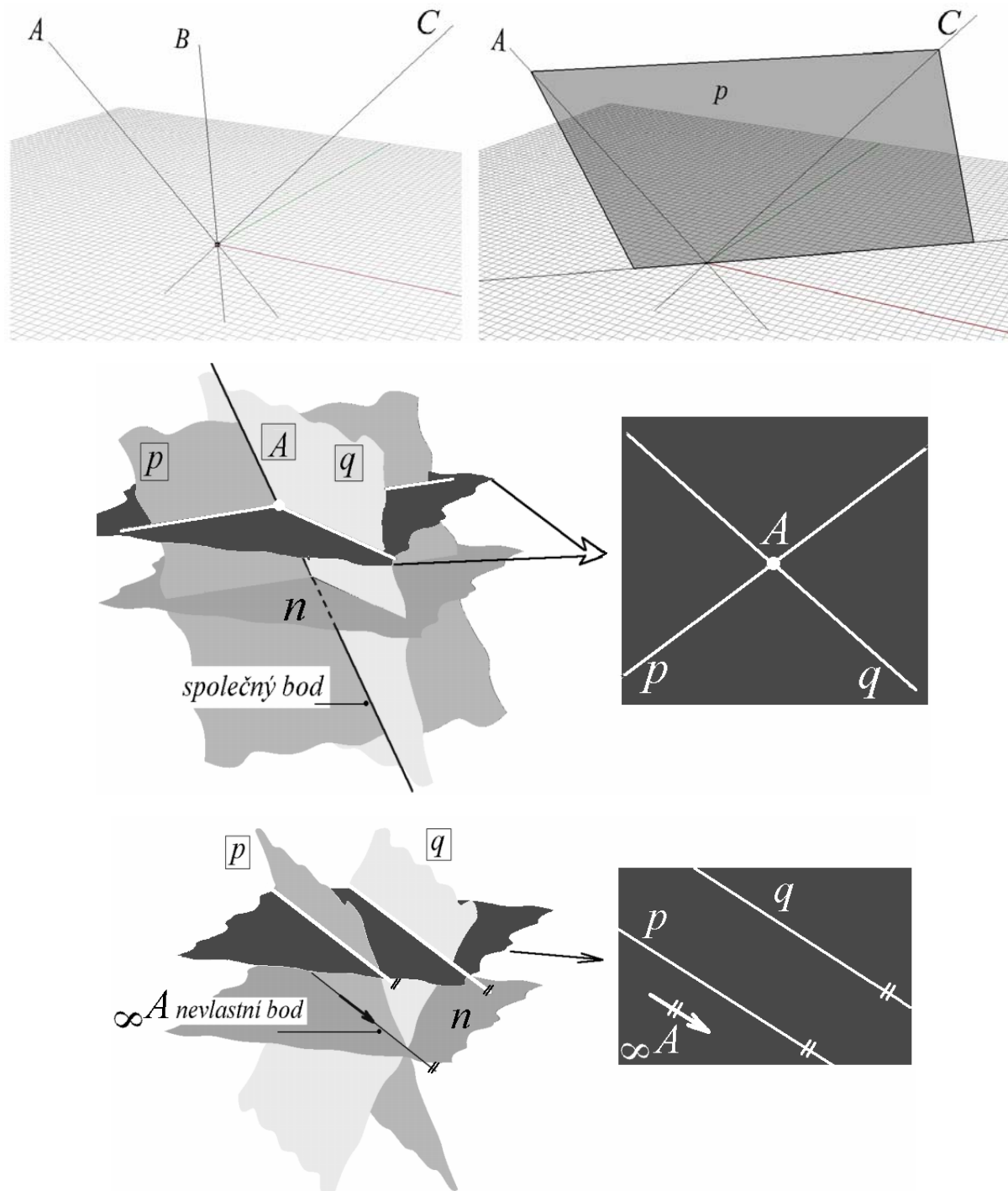
Podívejme se nyní na to, jak si dané pojmy a vlastnosti představit – na modely projektivní roviny a projektivního prostoru. Stejně jako v případě euklidovské roviny a euklidovského prostoru máme k dispozici dva základní modely. Oba modelují projektivní útvary jako útvary euklidovské, které všechny procházejí jedním euklidovským bodem a mají „jeden rozměr navíc“.

2. Syntetický model projektivní roviny: Syntetickým modelem projektivní roviny tak může být trojrozměrný euklidovský prostor. Projektivními body jsou euklidovské přímky, které společným „euklidovským“ bodem. Množina všech projektivních bodů je tak modelována jako svazek euklidovských přímek.

Na obrázku vpravo vidíme projektivní přímku p procházející projektivními body A, B . Dále je zde přímka n , která ani jedním z bodů A, B neprochází.

Na dalším obrázku máme vymodelovány dvě projektivní různoběžky p, q se společným bodem A . Navíc zde máme sestrojenou rovinu, která neprochází společným bodem útvarů

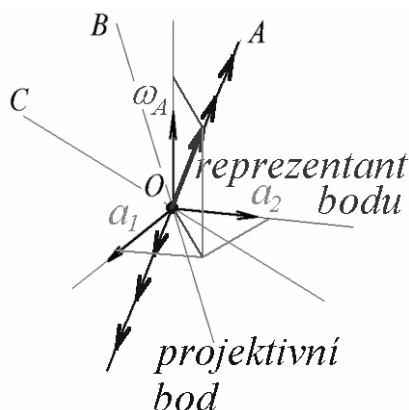
$n; p; q; A$, které modelují přímky resp. bod v rozšířené rovině. Tato rovina tedy není objektem našeho modelu, ale zřejmě modeluje euklidovskou rovinu – vidíme v ní „klasické“ modely různoběžek $p; q$ a jejich průsečíku A .



Na dalším obrázku jsou dvě rovnoběžky, které mají v projektivní rovině rovněž společný bod modelovaný euklidovskou přímkou ∞A . Ta neprotíná model euklidovské roviny a pro tento bod tedy nelze v euklidovské rovině použít „klasický“ model – „bezrozměrnou“ tečku. Tento bod je ovšem možné v euklidovské rovině vyznačit jako směrový vektor ∞A - tj. společný směrový vektor přímek $p; q$. Všimněte si, že nevlastní bod ∞A leží na přímce n , kterou rovněž není možné tradičně znázornit. Je to nevlastní přímka naší projektivní roviny.

Budeme-li měnit směr rovnoběžných přímek $p; q$, bude se měnit i jejich společný nevlastní bod. Vždy však bude ležet na nevlastní přímce n .

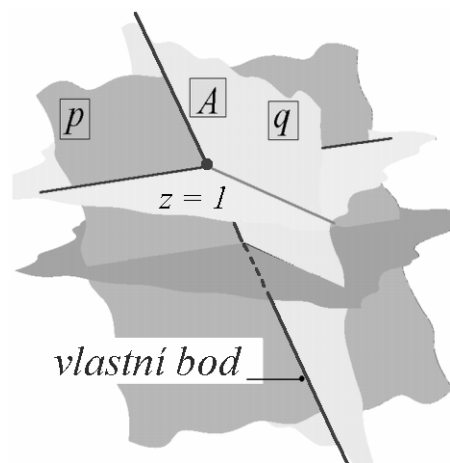
3. Analytický model projektivní roviny. Předchozí syntetický model opatříme kartézskou souřadnou soustavou $\langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k} \rangle$, kde osy označíme $x = \langle O; \mathbf{i} \rangle$; $y = \langle O; \mathbf{j} \rangle$; $\omega = \langle O; \mathbf{k} \rangle$.



Počátek zvolme ve společném bodě euklidovských přímek, které modelují projektivní body. Tyto přímky lze jako nenulové násobky směrového vektoru $\mathbf{p} = (a_1; a_2; \omega_p)$, bod v tomto projektivním prostoru je tedy množina vektorů tvaru

$$P = k \cdot \mathbf{p} = k \cdot (p_1; p_2; \omega_p) = (kp_1; kp_2; k\omega_p) \neq \mathbf{0}.$$

Jednotlivé vektory z této množiny, tj. např. $(p_1; p_2; \omega_p)$; $(2p_1; 2p_2; 2\omega_p)$; $(-3p_1; -3p_2; -3\omega_p)$ nazveme reprezentanty projektivního bodu P . Rovinu n , ve které v syntetickém modelu ležely nevlastní body, bude v analytickém modelu reprezentovat rovina $\omega = 0$, euklidovskou rovinou pak bude rovina $\omega = 1$.



Má-li být bod $A = k \cdot (a_1^*; a_2^*; \omega_A) = (ka_1^*; ka_2^*; k\omega_A)$ být **vlastní**, musí přímka určená počátkem a některým reprezentantem bodu A protnout rovinu $z = 1$. To ovšem znamená, že $\omega_A \neq 0$. V tom případě ovšem můžeme položit $k = \omega_A^{-1}$ a vlastní bod reprezentovat vektorem

$$A = \left(\frac{a_1^*}{\omega_A}, \frac{a_2^*}{\omega_A}, \frac{\omega_A}{\omega_A} \right) = \left(\frac{a_1^*}{\omega_A}, \frac{a_2^*}{\omega_A}, 1 \right) = (a_1; a_2; 1) \quad (1)$$

„Koncový bod“ A každého takového vektoru leží v rovině $z = 1$ a má kartézské souřadnice $A = [a_1; a_2]$. Tento vektor budeme nazývat **euklidovským reprezentantem** bodu A .

4. Nevlastní bod v syntetickém modelu představovala přímka ležící v rovině $z = 0$. Je-li tedy ${}_{\infty}S = k(s_1; s_2; \omega_s) = (ks_1; ks_2; k\omega_s)$ nevlastní bod, musí být $\omega_s = 0$, takže nevlastní bod je tvaru

$${}_{\infty}S = (ks_1; ks_2; k\omega_s) = (ks_1; ks_2; k \cdot 0) = (ks_1; ks_2; 0)$$

a je možno ho reprezentovat vektorem

$${}_{\infty}S = (s_1; s_2; 0) \quad (2)$$

Přímku s tímto směrovým vektorem nelze v euklidovské rovině zobrazit jako bod. Nevlastní body tedy interpretujeme jako směry, jejich jednotlivé reprezentanty jako vektory daného směru. V analytických konstrukcích budeme tyto body místo ${}_{\infty}S$ často značit malým tučným \mathbf{s} .

Množina všech vlastních bodů projektivní roviny splňuje všechny axiomy euklidovské geometrie, projektivní geometrie tak „umí“ všechno, co tradiční geometrie euklidovská. Díky nevlastním bodům však „umí“ něco navíc. Projektivní rovinu můžeme tedy chápat jako euklidovskou rovinu rozšířenou o nevlastní body – budeme ji tedy značit ${}_{\infty}E^2$.

Budování trojrozměrného projektivního prostoru ${}_{\infty}E^3$ probíhá prakticky stejně jako budování (dvojrozměrné) projektivní roviny ${}_{\infty}E^2$. Pokud bychom při konstrukci syntetického modelu trojrozměrného projektivního prostoru měli projít celou předchozí cestu, potřebovali bychom znázornit čtyřrozměrný euklidovský prostor. Uveďme tedy raději jen výsledky, které jsou analogické výsledkům předchozím.

Nevlastní bod společný rovnoběžným přímkám znázorňujeme jako jejich společný směr (tj. libovolný směrový vektor), nevlastní přímku společnou dvěma rovnoběžným rovinám znázorňujeme jakou dvojsměr (tj. libovolnou dvojici vektorů, které tvoří jejich zaměření). V trojrozměrném projektivním prostoru existuje nekonečně mnoho nevlastních přímek (roviny, které jsou navzájem rovnoběžné, procházejí vždy jednou z nich) a množina všech bodů všech nevlastních přímek tvoří nevlastní rovinu.

Také analytický popis trojrozměrného projektivního prostoru je zcela analogický dvojrozměrnému případu. Projektivní body $P \in {}_{\infty}E^3$ jsou uspořádané čtveřice tvaru $P = (kp_1; kp_2; kp_3; k\omega_p)$, volbou konkrétní hodnoty $k = 0$ dostáváme jednotlivé reprezentanty.

6. Vlastní bod je tvaru

$$A = k \cdot (a_1^*; a_2^*; a_3^*; \omega_A) = (ka_1^*; ka_2^*; ka_3^*; k\omega_A) \quad \omega_A \neq 0.$$

a můžeme ho reprezentovat euklidovským reprezentantem, tj. vektorem

$$A = \left(\frac{a_1^*}{\omega_A}; \frac{a_2^*}{\omega_A}; \frac{a_3^*}{\omega_A}; \frac{\omega_A}{\omega_A} \right) = \left(\frac{a_1^*}{\omega_A}; \frac{a_2^*}{\omega_A}; \frac{a_3^*}{\omega_A}; 1 \right) = (a_1; a_2; a_3; 1) \quad (1a)$$

Nevlastní bod je tvaru

$${}_{\infty}S = (ks_1; ks_2; k\omega_S) = (ks_1; ks_2; k \cdot 0) = (ks_1; ks_2; 0)$$

a je možno ho reprezentovat vektorem

$${}_{\infty}S = s = (s_1; s_2; 0)$$

Množina všech vlastních bodů projektivní roviny (projektivního prostoru) splňuje všechny axiomy euklidovské geometrie, projektivní geometrie tak „umí“ všechno, co tradiční geometrie euklidovská. Díky nevlastním bodům však „umí“ něco navíc. Projektivní rovinu (prostor) můžeme tedy chápat jako euklidovskou rovinu (prostor) rozšířenou (rozšířený) o nevlastní body – budeme ji tedy značit ${}_{\infty}E^2$ resp. ${}_{\infty}E^3$.

Vlastní body projektivního prostoru lze chápat jako euklidovské (jsou to koncové body vektorů tvaru 1a), nevlastní body chápeme jako směry, jejich reprezentanty jako vektory daného směru. V syntetických konstrukcích máme k dispozici pouze euklidovskou rovinu resp. prostor. Vlastní body tedy chápeme tradičně euklidovsky, body nevlastní pak chápeme jako směry.

3. 2 Dělicí poměr a dvojpoměr bodů

V závěru kapitoly 2.5 jsme konstatovali, že v euklidovském prostoru se velmi obtížně popisuje skládání. Tento problém se značně zjednoduší v prostoru projektivním. Než však k němu přistoupíme, je třeba se seznámit s ústředním pojmem projektivní geometrie a tím je dvojpoměr bodů.

1. Orientovaná úsečka, orientovaná velikost: V geometrii potřebujeme často pracovat nejen s rovnoběžností úseček, ale i s jejich orientací. Úsečky AB ; CD jsou rovnoběžné právě tehdy, když existuje $k \neq 0$ tak, že $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$. Je-li $k > 0$, říkáme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ jsou **orientovány souhlasně**, píšeme $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. V opačném případě jsou **orientovány nesouhlasně**, píšeme $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$. Orientovaná úsečka \overrightarrow{OJ} definuje na přímce $p = OJ$ uspořádání (pokuste se o tuto definici). Orientovanou velikostí úsečky $\overrightarrow{AB} \subset p$ pak rozumíme reálné číslo, pro které platí

$$(A; B) = \begin{cases} k \cdot |\overrightarrow{OJ}| \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OJ} \\ -k \cdot |\overrightarrow{OJ}| \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OJ} \end{cases}; k > 0$$

2. Dělicí poměr bodů: Necht' $A \neq B$ jsou dva vlastní body přímky p . Pak dělicím poměrem bodu C přímky p vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí) nazýváme:

- a) číslo $\lambda = (A; B; C) = 1$ v případě, že bod C je nevlastní
- b) číslo $\lambda = (A; B; C) = 0$ v případě, že bod B je nevlastní
- c) číslo $\lambda = (A; B; C) = \frac{(A; C)}{(B; C)}$ v případě, že bod C je vlastní a $C \neq B$.
- d) číslo $\lambda = \infty$ v případě, že $C = B$.

Lze ukázat, že dělicí poměr nezávisí na orientaci přímky (pokuste se o to).

3. Příklad: Je-li S střed úsečky AB , pak

$$\text{a) } (A; B; S) = (B; A; S) = -1 \quad \text{b) } (A; S; B) = (B; S; A) = 2 \quad \text{c) } (S; A; B) = (S; B; A) = \frac{1}{2}$$

4. Dvojpoměr: Necht' $A; B; C; D$ jsou kolineární body (tj. body ležící na téže přímce), $A; B; C$ navzájem různé, $A; B$ vlastní. Dvojpoměrem $(A; B; C; D)$ bodů $A; B; C; D$ rozumíme

- a) číslo $(A; B; C; D) = \frac{(A; B; C)}{(A; B; D)}$ v případě, že $D \neq B$ a $D \neq A$
- b) číslo $(A; B; C; D) = 0$ v případě, že $D = B$
- c) $(A; B; C; D) = \infty$ v případě, že $D = A$

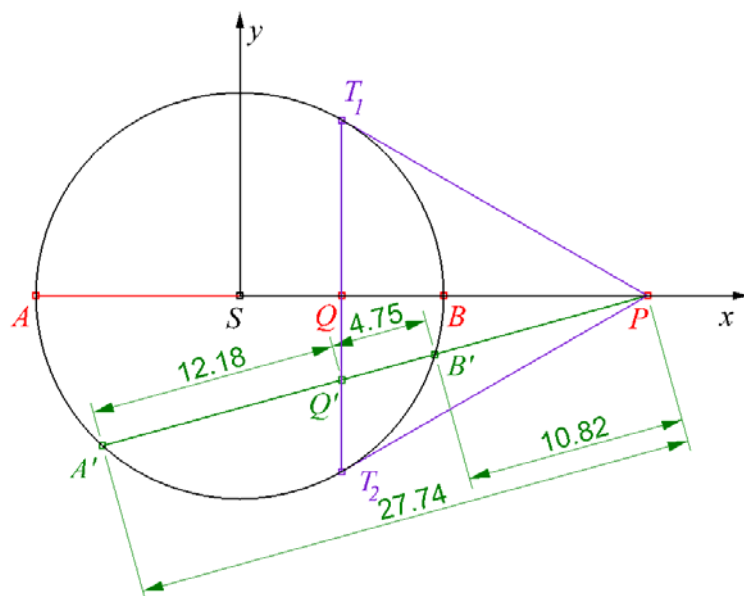
5. Příklad: Necht' $A; B; C; D$ jsou po řadě obrazy čísel 0;1;2;3 na číselné ose. Pak

$$\text{a) } (A; B; C; D) = \frac{(A; B; C)}{(A; B; D)} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \quad \text{b) } (A; C; B; D) = \frac{(A; C; B)}{(A; C; D)} = \frac{\frac{1}{-1}}{\frac{3}{1}} = -\frac{1}{3}$$

6. Příklad: Necht' $A; B; P; Q$ jsou po řadě obrazy čísel $-1; 1; \frac{1}{2}; 2$ na číselné ose. Pak

$$\text{a) } (A; B; P; Q) = \frac{(A; B; P)}{(A; B; Q)} = \frac{\frac{3}{2} : (-\frac{1}{2})}{3 : 1} = -1 \quad \text{b) } (A; B; Q; P) = \frac{(A; B; Q)}{(A; B; P)} = \frac{3 : 1}{\frac{3}{2} : (-\frac{1}{2})} = -1$$

Body $A; B; P; Q$ jsou sestrojeny na připojeném obrázku. Nad průměrem AB je dále sestrojena kružnice a z bodu P k ní sestrojeny tečny. Bod Q pak leží v průsečíku přímek $AB; T_1T_2$. Dvojpoměr -1 zjistíme i v případě, že body $A; B$ leží na jiné sečně vedené z bodu P . Z kót na obrázku je zřejmé:



$$(A'; B'; Q'; P') = \frac{(A'; B'; Q')}{(A'; B'; P')} = \frac{\frac{12,18}{-4,75}}{\frac{10,82}{-27,74}} = \frac{-12,18}{4,75} = -1,00$$

Kóty, a proto i výsledek, jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa. Velikosti jsou orientované. První složený zlomek odpovídá situaci, kdy za kladný směr považujeme směr zleva doprava, druhý zlomek situaci opačné.

Pro body, jejichž dvojpoměr je

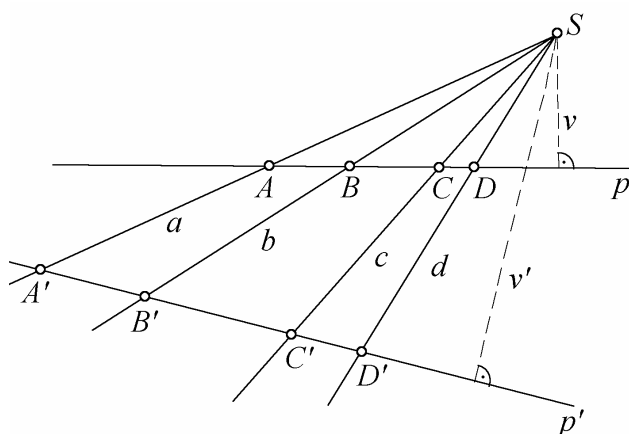
roven mínus jedné, zavedeme speciální název:

7. Harmonická čtveřice, harmonicky sdružené body: Čtyři kolineární body $A; B; P; Q$, pro které je $(A; B; P; Q) = -1$, nazýváme harmonická čtveřice. O bodech $P; Q$ říkáme, že jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům $A; B$.

V projektivní rovině a v projektivním prostoru nás budou nejvíce zajímat zobrazení, v nichž obrazem každé přímky je buď opět přímka, anebo bod. Takové zobrazení nazýváme projektivním zobrazem nebo také promítáním.

8. Projektivní zobrazení (promítání) – je zobrazení, v němž obrazem přímky je opět přímka, anebo bod.

9. Kolineární zobrazení – je speciálním případem projektivního zobrazení. Je to zobrazení,



které je projektivní a navíc prosté. Toto zobrazení tedy každou přímku zobrazuje na přímku (nemůže ji zobrazit na bod)

10. Promítání přímky na přímku:

V projektivní rovině jsou dány přímky $p; p'$ a bod $S \notin p; p'$. Zobrazení, které každému bodu $A \in p$ přiřadí bod $A' \in p' \cap SA$ nazýváme promítáním přímky p na přímku p' z bodu S . Bod S nazýváme střed promítání, Přímku SA

nazýváme **promítací přímkou** bodu A . Promítání, jehož střed je vlastní, nazýváme **středové**, promítání s nevlastním středem **nazýváme rovnoběžné**.

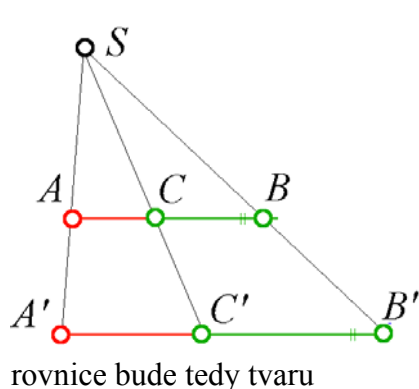
11. Věta (Pappova): Promítání přímky na přímku zachovává dvojpoměr bodů.

Důležitým důsledkem Pappovy věty je skutečnost, že každé kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr bodů.

3.3 Zobrazení v ${}_{\infty}E^2$

1. Zachování dělicího poměru: Jak jsme konstatovali v závěru předchozí kapitoly, všechna kolineární zobrazení zachovávají dvojpoměr bodů. Mnohá z nich však zachovávají i dělicí poměr. Především jsou to shodná zobrazení, která zachovávají velikosti úseček. Dále jsou to zobrazení podobná, která jsou složena ze zobrazení shodných a ze stejnoolehlosti. Zachování dělicího poměru vyplývá z vlastností podobných trojúhelníků (viz připojený obrázek).

Každé projektivní zobrazení v projektivní rovině lze popsat soustavou rovnic



$$\begin{pmatrix} k'x'_1 \\ k'x'_2 \\ k'\omega_{X'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ k\omega_X \end{pmatrix}$$

Bod $X = (kx_1; kx_2; k\omega_X)$ se v projektivní rovině zobrazí na bod $X' = (k'x'_1; k'x'_2; k'\omega_{X'})$. V této rovnici vystupují libovolní reprezentanti bodů $X; X'$ (čísla $k \neq 0$; $k' \neq 0$ lze volit libovolně), budeme tedy volit většinou $k' = k = 1$, rovnice bude tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \omega_{X'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \omega_X \end{pmatrix} \quad (1)$$

kde ω_X resp. $\omega_{X'}$ je rovno jedné, nebo nule podle toho, zda bod X resp. X' je vlastní, nebo nevlastní.

Uvažujme tři různé kolineární vlastní body $A; B; C$. Podle definice dělicího poměru musí být $(A; B; C) \neq 0; 1$. Zobražíme-li tyto body na body $A'; B'; C'$ zobrazením, které zachovává dělicí poměr, musí být rovněž $(A'; B'; C') \neq 0; 1$, což podle definice dělicího poměru znamená, že i body $A'; B'; C'$ jsou navzájem různé a všechny vlastní. Zobrazení, které zachovává dělicí poměr, tedy zobrazuje vždy vlastní bod na vlastní bod. Jestliže tedy rovnice (1) je rovnicí takového zobrazení, musí platit

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To ovšem znamená, že musí být $a_{31} = a_{32} = 0$ a $a_{33} = 1$. Kolineární zobrazení v euklidovské rovině lze tedy popsat projektivním zobrazením tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T \quad (2)$$

kde $\mathbf{X}; \mathbf{X}'$ jsou euklidovští reprezentanti vlastních bodů $X; X'$ projektivního prostoru. Tyto reprezentanty můžeme chápat jako polohové vektory bodů $X; X'$ v euklidovském prostoru.

2. Základní zobrazení v ${}_{\infty}E^2$:

Posunutí o vektor \mathbf{v} :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{v}}: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{X}^T$$

Podobně otočení o úhel α kolem počátku

$$\mathcal{R}_{\alpha}: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{R}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}^T$$

(porovnejte tato vyjádření se zápisem stejných zobrazení v euklidovském prostoru – viz kpt. 2. 5.) Každé kolineární zobrazení je tak zcela určeno maticí typu 3×3 . Uvedme v přehledu matice známých zobrazení v základním tvaru

Označení	\mathcal{O}_x	\mathcal{O}_y	\mathcal{I}_O	\mathcal{R}_{α}
Název	Souměrnost podle osy x	Souměrnost podle osy y	Souměrnost podle počátku	Otočení kolem počátku o úhel α
Matice	$\mathbf{O}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{O}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Označení	$\mathcal{I}_{\mathbf{v}}$	\mathcal{H}_{λ}		
Název	Posunutí o vektor \mathbf{v}	Stejnolehlost se středem O , koef. λ		
Matice	$\mathbf{T}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{H}_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		

3. Skládání zobrazení v ∞E^2 : Výhodou této reprezentace zobrazení je jednoduché skládání. Pokusme se najít matici osové souměrnosti podle přímky $p: x=9$. Tento příklad jsme již řešili v euklidovském prostoru – „syntetický“ návod je stejný: musíme složit tři zobrazení: posunutí o vektor $-\mathbf{v}$, souměrnost podle osy y a posunutí o vektor \mathbf{v} (musíme skládat přesně v tomto pořadí – skládání zobrazení není komutativní). Tedy

libovolný bod X posuneme o vektor $-\mathbf{v}$ do bodu X_1 : $\mathbf{X}_1^T = \mathbf{T}_{-\mathbf{v}} \cdot \mathbf{X}^T$
 bod X_1 zobrazíme v souměrnost podle y do bodu X_2 : $\mathbf{X}_2^T = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{X}_1^T = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{v}} \cdot \mathbf{X}^T$
 bod X_2 posuneme o vektor \mathbf{v} do bodu X' : $\mathbf{X}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{X}_2^T = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{v}} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{O}_p \cdot \mathbf{X}^T$

Matici takto složeného zobrazení jsme označili \mathbf{O}_p - všimněte si, že vznikla vynásobením matic použitých zobrazení:

$$\mathbf{O}_p = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2v_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Chceme-li zapsat pořadí, v jakém provádíme dílčí zobrazení, použijme operaci skládání, kterou známe z matematické analýzy, tedy

$$\mathcal{O}_p(X) = \mathcal{T}_{\mathbf{v}}(X)(\mathcal{O}_y(X)(\mathcal{T}_{-\mathbf{v}}(X))) = \mathcal{T}_{\mathbf{v}} \circ \mathcal{O}_y \circ \mathcal{T}_{-\mathbf{v}}(X)$$

- $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ po \mathcal{O}_y po $\mathcal{T}_{-\mathbf{v}}$ - zobrazení tedy provádíme v obráceném pořadí, než v jakém jsou zapsána (posunutí $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ je zapsáno jako první, ale prováděno je poslední). Násobení matic

$$\mathbf{O}_p = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{v}} \quad (4)$$

je zapsáno stejně, provádíme ho tedy rovněž v obráceném pořadí (matice $\mathbf{T}_{\mathbf{v}}$ je zapsána jako první, přitom posunutí $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ provádíme jako poslední). To je poněkud nepříjemné (zaměnit pořadí násobení matic samozřejmě nesmíme). Tato nepříjemnost se dá obejít tím, že budeme všechny matice používat v transponované podobě. Rovnice (1) a (2) by pak byly tvaru

$$(x'_1 \ x'_2 \ 1) = (x_1 \ x_2 \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^T \quad (5)$$

a matice v transponované rovnici (3)

$$\mathbf{O}_p^T = \mathbf{T}_{-\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{O}_y^T \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T$$

bychom pak násobili v pořadí, v jakém zobrazení skutečně provádíme. Tvar rovnice (5) je však poněkud neobvyklý, rovněž indexy prvků v matici \mathbf{A}^T jsou obráceně než bývá zvykem. Proto budeme dále používat tvary rovnic (1) a (2).

4. Příklad: Vypočtěme matici osové souměrnosti podle přímky $r: y=x$; $s: y=-x$

Řešení: Otočíme-li přímku q o $-\frac{\pi}{4}$, splyne s osou x . Pak lze použít osovou souměrnost s maticí \mathbf{O}_x a nakonec použijeme otočení o $\frac{\pi}{4}$, abychom osu „vrátili do původní polohy“. První z hledaných matic je tedy

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_r &= \mathbf{R}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \mathbf{O}_x \cdot \mathbf{R}_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)\end{aligned}$$

Podobně pro druhý případ (proved'te výpočet!) Osové souměrnosti podle přímek $r: y = x$; $s: y = -x$ jsou tedy popsány rovnicemi

$$\mathbf{P}'^T = \mathbf{O}_r \cdot \mathbf{P}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}'^T = \mathbf{O}_s \cdot \mathbf{Q}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde

$$\mathbf{O}_s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice osové souměrnosti s osou $s: y = -x$. Přepište tyto rovnice do soustav bez použití matic!

5. Příklad: Sestrojme matici osové souměrnosti s obecnou osou.

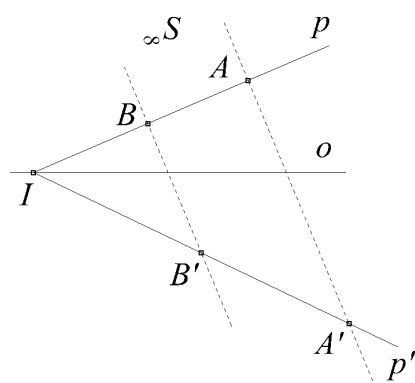
Řešení: Příklad osové souměrnosti s osou $p \parallel y$ jsme již vyřešili – viz vztah (3). Zcela analogický výsledek bychom dostali v případě osy $q \parallel x$ – zde by bylo $\mathbf{O}_q = \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{O}_x \cdot \mathbf{T}_{-v}$. V případě že osa r není rovnoběžná a ni s x , ani s y , pak je třeba započítat i otočení o úhel $\alpha = \angle rx$. Je-li tedy $R \in r$ libovolný bod a \mathbf{r} jeho polohový vektor, je

$$\mathbf{O}_r = \mathbf{T}_r \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{O}_x \cdot \mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{T}_{-r} = \mathbf{T}_r \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{O}_x \cdot \mathbf{R}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{T}_r^{-1}$$

Vidíme, že analytické skládání zobrazení v projektivním prostoru spočívá v mechanickém násobení matic. Nemusíme-li tyto součiny počítat ručně, je toto skládání podstatně výhodnější než skládání v prostoru afinním. Násobení matic je totiž programátorsky zcela rutinní záležitost, proto jsou geometrická zobrazení v CAD systémech realizována právě pomocí operací s maticemi.

Kromě shodných a podobných zobrazení, která znáte ze střední školy, jsou v projektivní rovině důležitá následující zobrazení:

6. Osová afinita v rovině je určena svojí osou o a dvojicí $A; A'$ odpovídajících si bodů. Popište konstrukci dalšího bodu v takto zadané osové afinitě (viz připojený obrázek):



Konstrukce obrazu B'
známého vzoru B :

- 1) $p \equiv AB$
- 2) $I \in p \cap o$
- 3) $p' \equiv A'I$
- 4) $s: s \parallel AA'$; $B \in s$
- 5) $B' \in p' \cap s$

Konstrukce vzoru B
známého obrazu B' :

- 1) $p' \equiv A'B'$
- 2) $I \in p' \cap o$
- 3) $p \equiv AI$
- 4) $s: s \parallel AA'$; $B' \in s$
- 5) $B \in p \cap s$

Vlastnosti osové afinity:

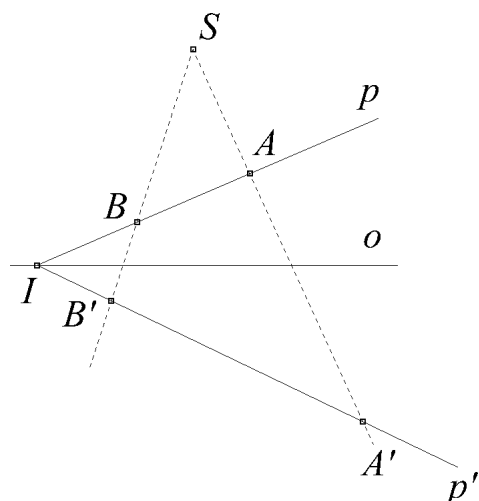
- a) Obrazem bodu je bod, obrazem přímky je přímka.
- b) Afinity zachovává incidenci, rovnoběžnost, dvojpoměr a dělicí poměr
- c) Osa afinity je bodově samodružná.
- d) Přímka určená vzor a obrazem téhož bodu určuje směr afinity
- e) Vzor a obraz přímky se protínají na ose afinity
(v případě, že jsou rovnoběžné se jedná o nevlastní bod, tj. rovnoběžka s osou afinity se zobrazí na rovnoběžku s osou afinity)

7. Analytické vyjádření osové afinity v rovině: Matice osových afinit s osami v osách x resp. y , které zobrazují bod $P = (p_1; p_2; 1)$ na bod $P' = (p'_1; p'_2; 1)$, jsou

$$\mathbf{A}_{x,P,P'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p'_1 - p_1}{p_2} & 0 \\ 0 & \frac{p'_2}{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{A}_{y,P,P'} = \begin{pmatrix} \frac{p'_1}{p_1} & 0 & 0 \\ \frac{p'_2 - p_2}{p_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice afinity s osou v obecné poloze obdržíme vhodným složením těchto afinit s translacemi a rotacemi podobně jako v př. 5.

8. Středová kolineace v rovině je určena osou a trojicí $S; A; A'$ kolineárních bodů, kde vlastní bod S je střed kolineace a $A; A'$ je dvojice odpovídajících si bodů. Popišme konstrukci dalšího bodu v takto zadané kolineaci. Připomeňme, že pracujeme v projektivní rovině, tj. můžeme zobrazovat i nevlastní body, naopak obrazem vlastního bodu může být bod nevlastní.



Obraz a vzor vlastního bodu: Popišme nejdříve případ, kdy vzor i obraz bodu jsou vlastní body (viz připojený obrázek):

Konstrukce obrazu B'
známého vzoru B :

- 1) $p \equiv AB$
- 2) $I \in p \cap o$
- 3) $p' \equiv A'I$
- 4) $s \equiv SB$
- 5) $B' \in p' \cap s$

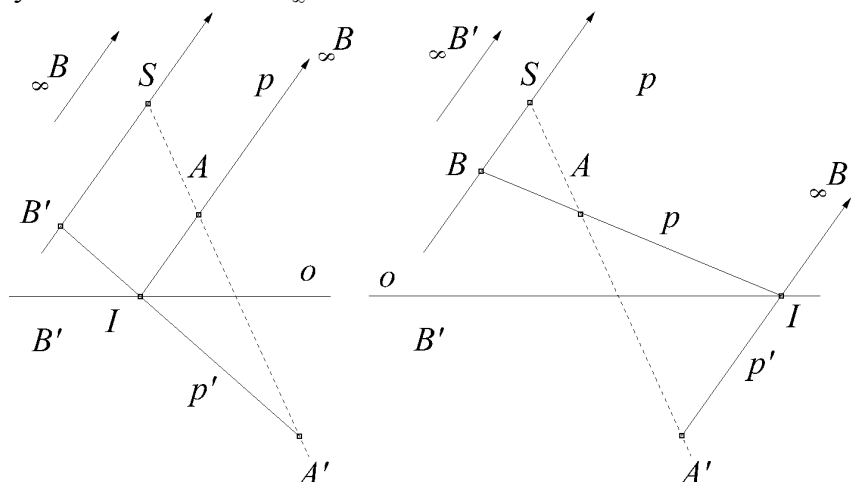
Konstrukce vzoru B
známého obrazu B' :

- 1) $p' \equiv A'B'$
- 2) $I \in p' \cap o$
- 3) $p \equiv AI$
- 4) $s' \equiv SB'$
- 5) $B \in p \cap s'$

Vlastnosti středové kolineace:

- a) Obrazem bodu je bod, obrazem přímky je přímka.
- b) Kolineace zachovává incidenci a dvojpoměr
- c) Osa kolineace je bodově samodružná.
- d) Přímka určená vzorem a obrazem téhož bodu prochází středem kolineace
- e) Vzor a obraz přímky se protínají na ose kolineace (v případě, že jsou rovnoběžné se jedná o nevlastní bod, tj. rovnoběžka s osou kolineace se zobrazí na rovnoběžku s osou kolineace)

9. Konstrukce nevlastních útvarů ve středové kolineaci: Na dalším obrázku vlevo je znázorněna konstrukce obrazu B' , je-li jeho vzor ${}_{\infty}B$ nevlastní. Vpravo naopak konstrukce vzoru B , který má nevlastní obraz ${}_{\infty}B'$.



Všechny nevlastní body projektivní roviny leží na nevlastní přímce. Body, jejichž obrazem je nevlastní bod, leží na téže přímce. Tuto přímku nazýváme **úběžnice**.

10. Analytické vyjádření středové kolineace v projektivní rovině: Uveďme nejdříve opět matici \mathbf{K}_x středové kolineace \mathcal{K}_x s osou v ose x a středem $\mathbf{S} = (0; s_2; 1)$. To ovšem k určení středové kolineace ještě nestačí. Zadání lze tedy doplnit opět zadáním vzoru $\mathbf{P} = (p_1; p_2; 1)$ a obrazu $\mathbf{P}' = (p'_1; p'_2; \omega_p)$ jednoho zobrazovaného bodu. Vzhledem k tomu, že body $\mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}'$ jsou kolineární, stačí zadat dva z nich a dělicí poměr. Za předpokladu, že jsou dány body $\mathbf{S}; \mathbf{P}$ a dělicí poměr $\lambda = (P'; P; S)$, je matice středové kolineace tvaru.

$$\mathbf{K}_{x, S, P, \lambda} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & & 0 & 0 \\ 0 & & p'_2 \cdot p_2^{-1} \cdot \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & s_2^{-1} (p'_2 \cdot p_2^{-1} \cdot \lambda^{-1} - 1) & & 1 \end{array} \right)$$

11. Příklad: Stanovme matici středové kolineace s osou v ose x středem $\mathbf{S} = (0; 8; 1)$, která zobrazí bod $\mathbf{P} = (2; 4; 1)$ do bodu $\mathbf{P}' = (5; -2; 1)$. Stanovme úběžnici vzorů a obrazů.

Řešení: Dělicí poměr je $\lambda = (P'; P; S) = \frac{5}{2}$. Dosazením do výše uvedené matice dostáváme

$$\mathbf{K}_x = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & & 0 & 0 \\ 0 & & \frac{-2}{4} \cdot \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \left(\frac{-2}{4} \cdot \frac{2}{5} - 1 \right) & & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (5)$$

Úběžnice budou rovnoběžky s osou x , tj. přímky $y = u_2$; $y = v_2'$. Má-li se vlastní bod $U = (u_1; u_2; 1)$ zobrazit na nevlastní $u = (u_1'; u_2'; 0)$, musí být

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

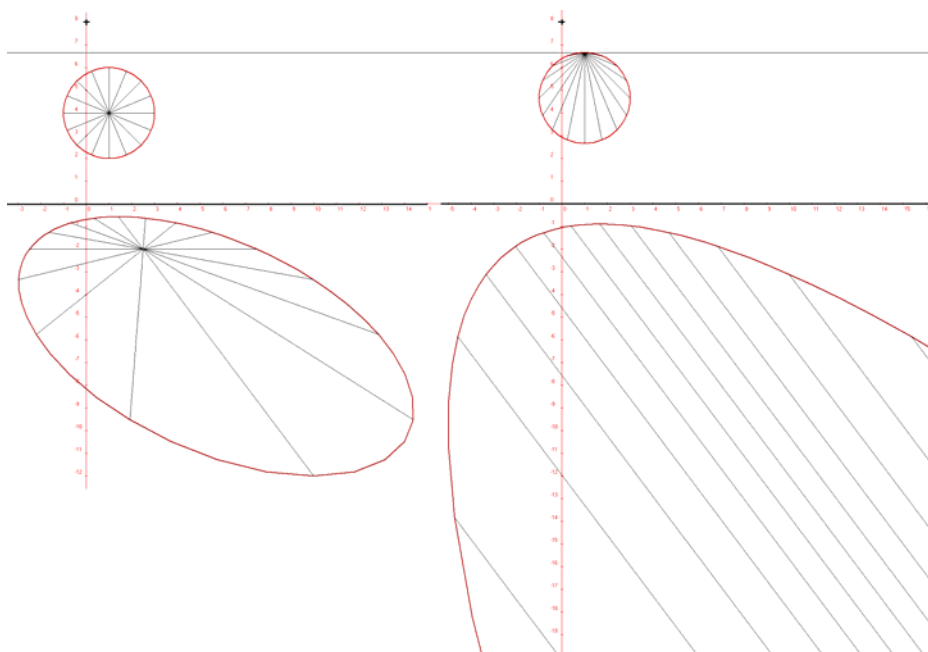
Porovnáním třetích složek dostáváme $-\frac{3}{20}u_2 + 1 = 0$, tedy $u_2 = \frac{20}{3}$, úběžnice obrazů je tedy $y = \frac{20}{3}$. Provnáním prvních dvou složek zjistíme, že $u_1' = u_1$; $u_2' = -\frac{2}{10}u_2 = -\frac{2}{10} \cdot \frac{20}{3} = -\frac{4}{3}$. Bod $U = (u_1; u_2; 1) = (u_1; \frac{20}{3}; 1)$ se tedy zobrazí na směr určený vektorem $u = (u_1'; u_2'; 0) = (u_1; -\frac{4}{3}; 0)$

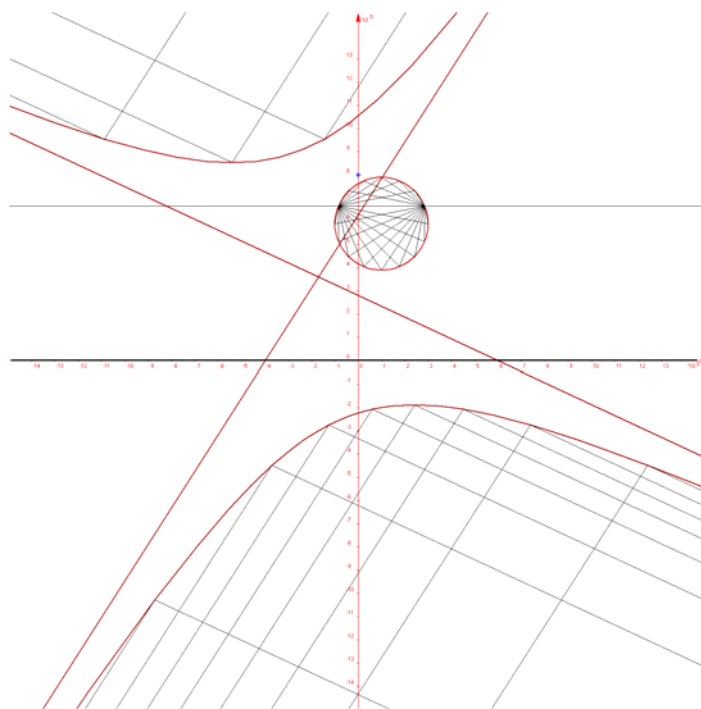
12. Pravidelný n -úhelník ve středové kolineaci: Ve středové kolineaci z předchozího příkladu zobrazme pravidelný n -úhelník je-li

a) $S = (3; \frac{7}{3}; 1)$; $A = (3; \frac{13}{3}; 1)$ b) $S = (3; \frac{14}{3}; 1)$; $A = (3; \frac{20}{3}; 1)$ c) $S = (3; \frac{17}{3}; 1)$; $A = (3; \frac{23}{3}; 1)$

Poznámka: Podle předchozího příkladu je úběžnicí přímka $y = \frac{20}{3}$. Šestnáctiúhelník zadaný dle a) tedy úběžnici neprotíná. Dle zadání b) leží na úběžnici právě jeden bod (totiž zadaný bod A). Ten se tedy zobrazí na nevlastní bod $_{\infty}A$, obraz tedy bude mít právě jeden nevlastní bod. Dle zadání c) mnohoúhelník úběžnici protíná – průsečíky označme $R; S$. Ty se zobrazí na nevlastní body $_{\infty}R; _{\infty}S$. Tento obraz tedy bude mít právě dva nevlastní body.

Řešení: Necháme sestavit počítač. Vrcholy zobrazovaného šestnáctiúhelníka budou obrazy vrcholu A v rotacích $\mathcal{R}_k(S; \alpha = \frac{2\pi k}{n})$; $k = 1; \dots; n-1$. Matice těchto rotací je tvaru $R_{S,\alpha} = T_s \cdot R_{O,\alpha} \cdot T_s^{-1}$ - viz kpt. 3. 4.). Takto získané vrcholy zobrazíme v kolineaci pomocí matice (4). Na obrázcích vidíte řešení pro $n = 64$. Při takto velkém n již pravidelný n -úhelník vnímáme jako kružnici a její obrazy připomínají elipsu, parabolu a hyperbolu – kuželosečky, které známe ze střední školy. Není to náhoda, jak uvidíme v kpt. 5.1.





3.4 Zobrazení v ${}_{\infty}E^3$

Podobně jako v projektivní rovině můžeme i v projektivním prostoru studovat nejrůznější zobrazení. Zaměříme se opět na zobrazení, která zachovávají dělicí poměr, tj. zobrazení, která zobrazují vlastní bod vždy na vlastní bod.

Uvedme v přehledu nejdůležitější z nich.

Souměrnost podle roviny $x = 0$

$$\mathbf{S}_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle roviny $y = 0$

$$\mathbf{S}_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle roviny $z = 0$

$$\mathbf{S}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle osy x

$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle osy y

$$\mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle osy z

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle počátku

Posunutí o vektor \mathbf{v} :

Otáčení kolem osy x

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otáčení kolem osy y

$$\mathbf{R}_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otáčení kolem osy z

$$\mathbf{R}_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stejnolehlost

$$\mathbf{S}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skládání těchto zobrazení provádíme stejně jako v projektivní rovině - rovněž násobením matic v obráceném pořadí.

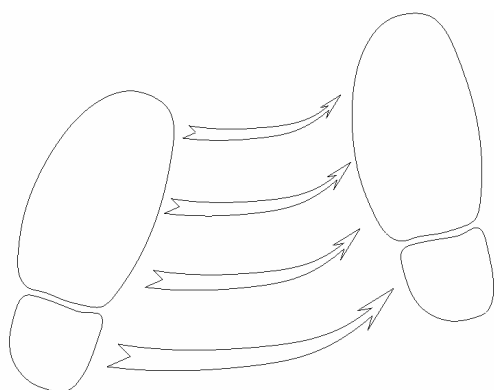
1. Příklad: Určeme matici středové souměrnosti se středem v bodě $\mathbf{S} = (s_1; s_2; s_3; 1)$.

Řešení: Střed souměrnosti musíme nejdříve posunout do počátku, zde provést souměrnost podle počátku, a poté posunout „zpět“. Výsledná matice tedy bude tvaru

$$\mathbf{S}_s = \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_{-s} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & -1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & -1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2s_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 2s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Shodná zobrazení



V předchozím textu jsme hovořili o shodných zobrazeních. Jsou to zobrazení, v nichž obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B' \cong AB$. Každé shodné zobrazení je kolineární a zobrazuje vždy vlastní bod na vlastní bod, proto je možné ho zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Je nyní otázkou, zda a jak z tohoto zápisu poznáme, že se jedná o shodné zobrazení.

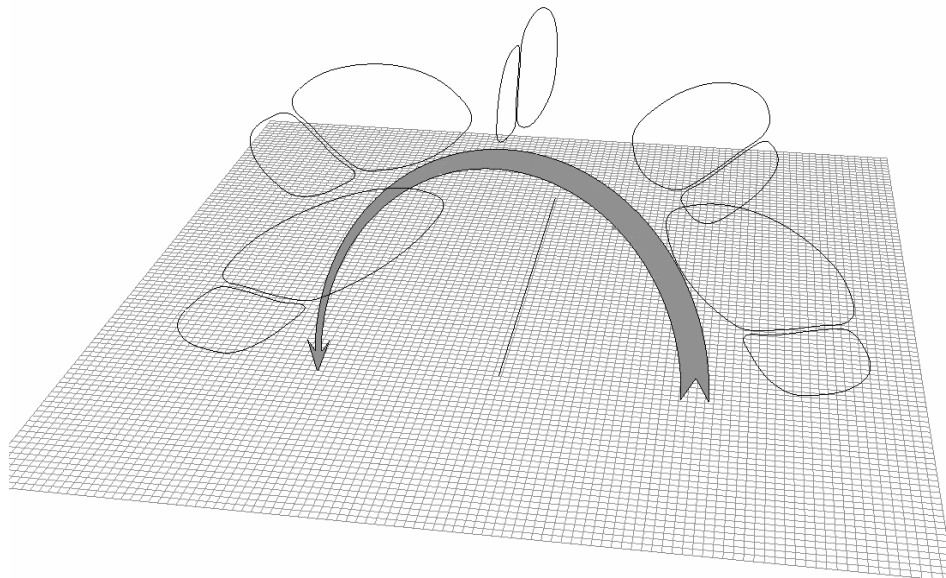
1. Příklad: Vypočtěte determinanty matic \mathbf{O}_x osově souměrnosti podle osy x ; \mathbf{O}_y osově souměrnosti podle osy y ; \mathbf{S} středové souměrnosti podle počátku; \mathbf{R}_α rotace kolem počátku o úhel α ; \mathbf{T}_v posunutí o vektor \mathbf{v} ; \mathbf{O}_p osově souměrnosti podle přímky $p: x=9$ (viz vztah 3 v kpt. 2.6)

Řešení: Výpočet přenecháváme čtenáři jako cvičení, uvedme jen výsledky:

$$\det \mathbf{S} = \det \mathbf{R}_\alpha = \det \mathbf{T}_v = 1; \det \mathbf{O}_x = \det \mathbf{O}_y = \det \mathbf{O}_p = \det \mathbf{O}_r = \det \mathbf{O}_s = -1.$$

Lze ukázat, že matice \mathbf{M} typu 3×3 je maticí shodného zobrazení v rovině právě tehdy, je-li $\det \mathbf{M} = \pm 1$. Znaménko determinantu zde má přitom zajímavý geometrický význam. Když jsme se na základní škole začali seznamovat se shodnými zobrazeními, kreslili jsme shodné

útvary na průsvitku, kterou jsme pak „přemísťovali“. V některých případech stačilo průsvitkou „jezdit“ (posouvání, otáčení), někdy bylo třeba průsvitku „převrátit naruby“ (osová souměrnost). Některé shodnosti v rovině lze modelovat „pohybem“ v rovině (přímé shodnosti), k některým je třeba buď osové souměrnosti nebo „pohybu“ v prostoru (nepřímé shodnosti). Podobně v prostoru.



Máme-li dvě levé boty stejného typu a stejné velikosti lze (alespoň myšlenkově) jednu na druhou „přemístit“ tak, že se kryjí. Jedná-li se však o standardní pár, pak z levé boty pravou pouhým „pohybem“ nevyrobíme. Proměna tak může být jen zdánlivá - potřebujeme k ní zrcadlo. Čistě matematicky bychom ji mohli provést „pohybem“ ve čtyřrozměrném prostoru. Podobná proměna skutečné boty z pravé na levou je matematicky sice možná, technicky ovšem neproveditelná - čtyřrozměrný prostor alespoň prozatím) v technické praxi k dispozici nemáme.

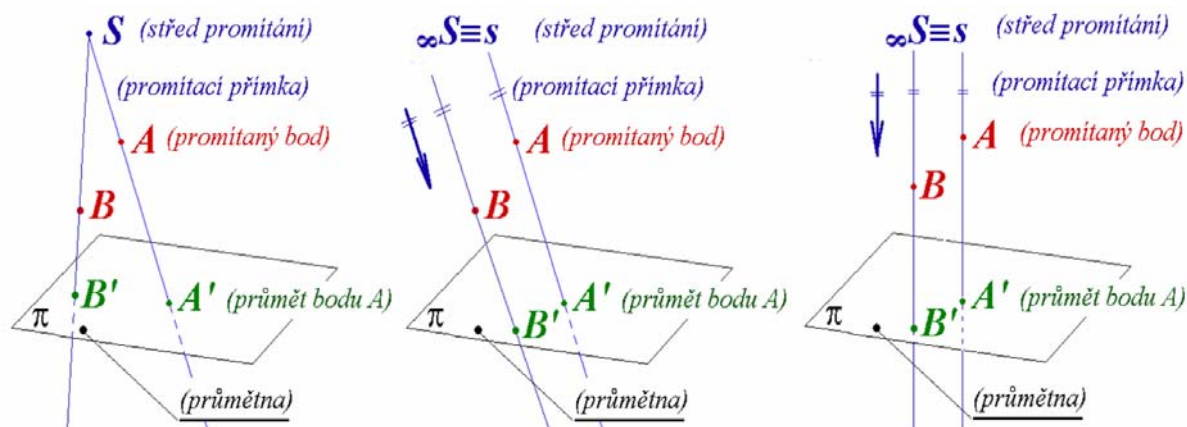
Matematický důvod rozdílů pravé a levé boty (i jejich dvojrozměrných stop) je následující.

2. Přímá a nepřímá shodnost: Shodnost, jejíž determinant je roven jedné (mínus jedné), nazýváme přímá (nepřímá).

Přímé shodnosti jsou tedy zobrazení, která lze složit z translací a rotací. Nepřímé shodnosti jsou shodnosti, při jejichž konstrukci je třeba použít osovou souměrnost.

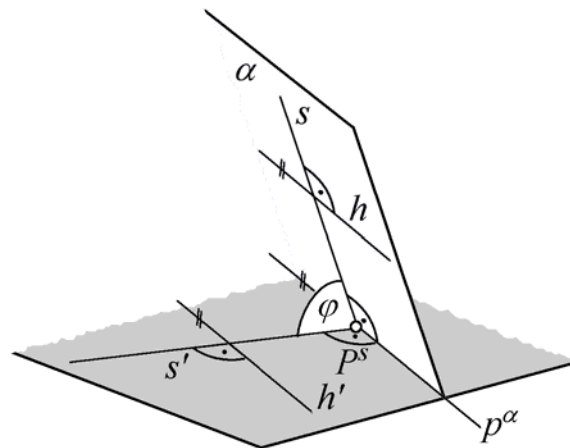
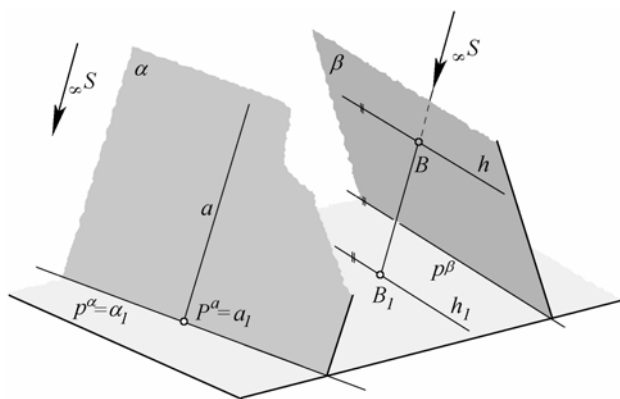
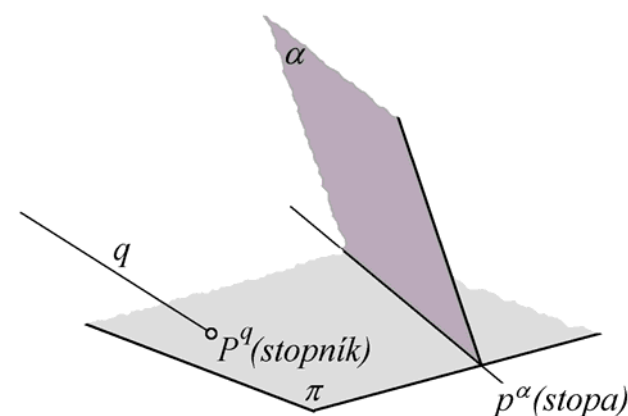
3. 6 Promítání prostoru na rovinu

1. Promítání prostoru na rovinu: Je dána rovina π a bod $S \notin \pi$. Zobrazení $\mathcal{P}: {}_{\infty}E^3 - \{S\} \rightarrow {}_{\infty}E^2$, které každému bodu $A \neq S$ přiřadí bod $A' \in SA \cap \pi$, se nazývá **promítání** z bodu S na rovinu π . Bod S nazýváme **střed promítání**, rovinu π **průmětna**. Přímkou SA nazýváme **promítací přímkou** bodu A . Rovinu, která je určena dvěma různými promítacími přímkami, nazýváme **promítací rovinou**. Promítání, jehož střed je vlastní, nazýváme **středové**, promítání s nevlastním středem **nazýváme rovnoběžné**. Rovnoběžné promítání, jehož promítací přímky jsou kolmé na průmětnu, nazýváme **pravoúhlé** (nebo též **kolmé**), rovnoběžné promítání, které není pravoúhlé, nazýváme **kosoúhlé**. Množinu $\mathcal{P}^{\mathcal{U}}$ všech bodů promítací přímek všech bodů útvaru \mathcal{U} nazýváme **promítacím útvarem** útvaru \mathcal{U} .



2. Stopníky, stopy, hlavní a spádové

přímky: Průsečík P^q přímky q s průmětnou π nazýváme **stopníkem přímky** q . Průsečnici p^α roviny α s průmětnou π nazýváme **stopou roviny** α . Každá přímka h^α , která leží v rovině α a je rovnoběžná s její stopou, se nazývá **hlavní přímka roviny** α . Každá přímka s^α , která leží v rovině α a je kolmá na její stopu, se nazývá **spádová přímka roviny** α . Rovina svírá s průmětnou tentýž úhel jako libovolná její spádová přímka.



3. Základní vlastnosti středového promítání:

- Středovým průmětem bodu A je bod A' .
- Středovým průmětem přímky a , která není promítací (tj. $S \notin a$) je přímka a' .
- Středovým průmětem promítací přímky a ; (tj. $S \in a$) je bod a' .
- Středové promítání zachovává incidenci, tj. průmětem bodu A a přímky p takové, že $A \in p$ je bod A' a přímka p' takový, že $A' \in p'$, popř. body A' ; p' takové, že $A' = p'$ (v případě, že p je promítací přímka)

Středové promítání zachovává dvojpoměr bodů (vyplývá bezprostředně z Pappovy věty - viz předchozí kapitola).

4. Základní vlastnosti rovnoběžného promítání se směrem $s = \infty S$:

Rovnoběžným průmětem bodu A je bod A' .

Rovnoběžným průmětem přímky a , která není promítací (tj. $a \not\parallel s$) je přímka a' .

Rovnoběžným průmětem promítací přímky a ; (tj. $a \parallel s$) je bod a' .

Rovnoběžným průmětem dvou různých přímek $a \parallel b$, kde $s \not\subset \alpha = a'b'$, jsou dvě různé přímky $a' \parallel b'$.

Rovnoběžným průmětem dvou různých přímek $a \parallel b$, kde $s \subset \alpha = a'b'$, je jediná přímka $a' = b'$.

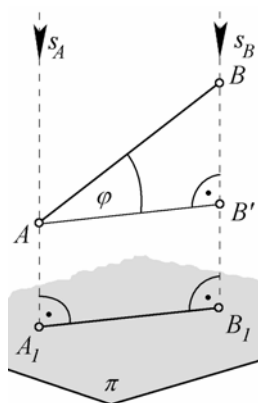
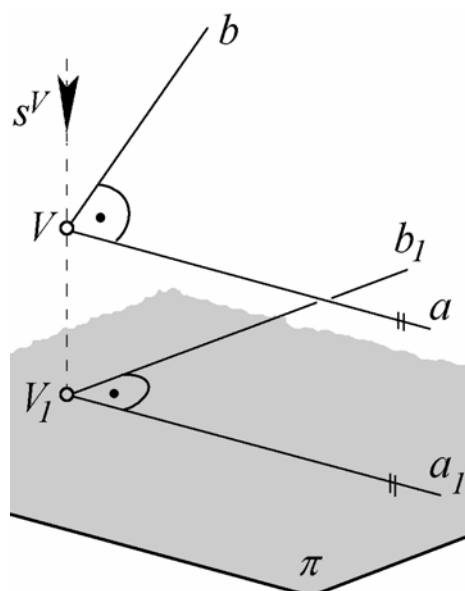
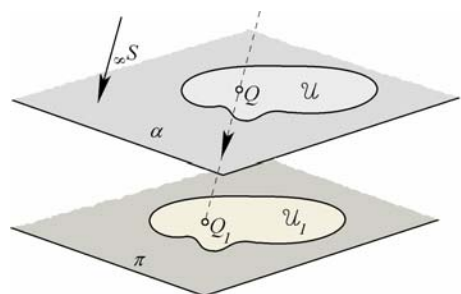
Rovnoběžným průmětem dvou různých promítací přímek (tj. $a \parallel b \parallel s$) jsou dva různé body $a'; b'$.

Rovnoběžným průmětem roviny α , kde $s \not\subset \alpha$, je průmětna π .

Rovnoběžným průmětem roviny α , kde $s \subset \alpha$, je přímka α .

Rovnoběžné promítání zachovává incidenci (viz výše)

Rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr bodů (přímý důsledek Pappovy věty).



Rovnoběžným průmětem útvaru \mathcal{U} , který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, je útvar \mathcal{U}' , který je shodný s útvarem \mathcal{U} .

Stopník P^a libovolné přímky a ležící v rovině α leží na stopě p^a roviny α . Hlavní přímky roviny se promítají do rovnoběžek s její stopou.

5. Kolmý průmět úsečky: Necht' $q \equiv AB$ je přímka,

která svírá s průmětnou úhel φ . Pro velikost $|A_1B_1|$ průmětu A_1B_1 úsečky AB platí:

$$|A_1B_1| = |AB| \cdot \cos \varphi$$

6. Kolmý průmět pravého úhlu: Necht' přímky $a \perp b$; $a \parallel \pi$; $b \not\parallel \pi$. Pak kolmé průměty $a_1; b_1$ přímek $a; b$ jsou na sebe kolmé.

Důležité důsledky:

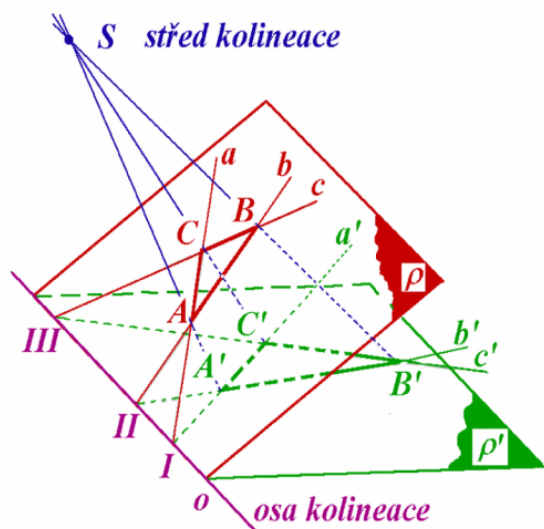
a. Spádové přímky roviny, která není kolmá na průmětnu, se promítají do kolmic na její stopu.

b. Kolmice vedené na rovinu, která není kolmá na průmětnu, se promítají do kolmic na její stopu.

Uveďme nyní důležitý speciální případ kolineárního zobrazení, kterým jsme v závěru kapitoly 2.5. odstartovali úvahy o projektivním prostoru.

7. Středová kolineace mezi rovinami:

V projektivním prostoru ∞E^3 jsou dány dvě vlastní roviny $\rho; \rho'$ a bod S , který neleží v žádné z nich. Středovou kolineací mezi rovinami $\rho; \rho'$ rozumíme zobrazení $\sigma: \rho \rightarrow \rho'$, které zobrazuje:



a) body $A; B; C; \dots \in \rho$ na body $A'; B'; C'; \dots \in \rho'$ tak, že přímky $AA'; BB'; CC'; \dots$ procházejí bodem S (středem kolineace)

b) přímky $a; b; c; \dots \subset \rho$ na přímky $a'; b'; c'; \dots \subset \rho'$ tak, že body $I \in a \cap a'; II \in b \cap b'; III \in c \cap c'; \dots$ leží na téže přímce o (ose kolineace)

c) zobrazení zachovává incidenci, tj. pro každý bod A a každou přímku a platí:

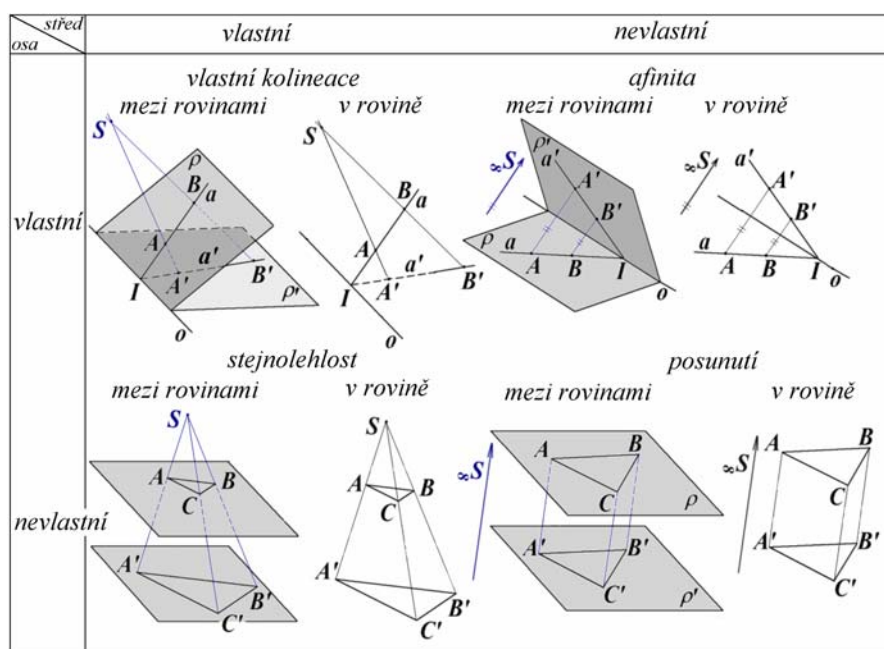
$$A \in a \Rightarrow \sigma(A) \in \sigma(a)$$

Z Pappovy věty vyplývá, že středová kolineace zachovává dvojpoměr bodů a je tedy projektivním zobrazením.

Protože pracujeme v projektivním prostoru, může být střed S i osa o jak vlastní, tak nevlastní. V této jedné definici se tak skrývají čtyři možné případy:

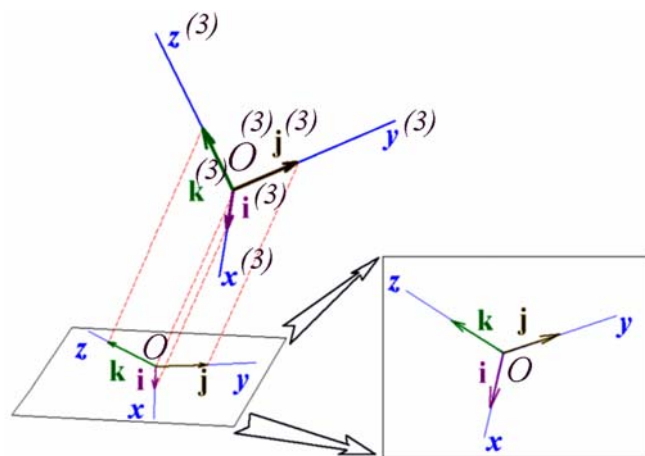
	střed S	
	vlastní	nevlastní
osa o	vlastní	nevlastní
	<p>vlastní kolineace</p>	<p>afinita mezi rovinami</p>
vlastní	<p>stejnolehlost mezi rovinami</p>	<p>posunutí rovin</p>
nevlastní		

12. Rovnoběžný průmět středové kolineace mezi rovinami do roviny: závisí na tom, zda její střed a osa je vlastní, anebo nevlastní. Průměty jednotlivých případů jsou ilustrovány následujícím obrázkem.



Všimněte si, že průměty jednotlivých případů (tj. obrázky označené „v rovině“) se od případů „prostorových“ (označených „mezi rovinami“) vlastně ničím neliší. I „prostorové“ případy jsou totiž již průměty do roviny (tou rovinou je stránka těchto skript). „Prostorové“ případy působí prostorově jen díky šedým rovinám, které iluzi prostoru vyvolávají. Jakmile „zmizí“, iluze prostoru je pryč a my vidíme pouze planimetrickou konstrukci.

K popisu technických objektů se používá kartézská souřadnicová soustava tak, že „významné“ přímky či úsečky objektu jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Chceme-li použít jen jeden průmět, měl by být pokud možno názorný, tj. měli bychom směr promítání volit tak aby se tyto přímky a úsečky nepromítaly do bodu. Rovněž „významné“ roviny (tj. roviny rovnoběžné se souřadnými rovinami) nebo jejich části by se neměly promítat do



přímek nebo úseček. Každý technický objekt má těchto „významných“ přímek a rovin jen konečný (a relativně malý) počet, promítání i průměten máme k dispozici vždy nekonečně mnoho. Je tedy zřejmé, že tomuto požadavku lze vždy vyhovět. Pokud tomu tak bude a budeme-li uvažovat jen rovnoběžné promítání a trojici nezáporných souřadných poloos, bude jejím průmětem trojice nesplyvajících polopřímek se společným počátkem tak, jak je znázorněno na připojeném obrázku.

Vzniká přirozeně otázka, zda lze uvažovat i obráceně – zda ke každé trojici různých polopřímek v průmětně, které mají společný počátek, lze zvolit směr promítání tak, že tyto tři polopřímky jsou průmětem souřadných poloos nějaké kartézské souřadné soustavy. Na tuto otázku odpověděla v roce 1853 kladně Pohlkeova věta. My se nyní budeme zabývat analytickým popisem tohoto promítání.

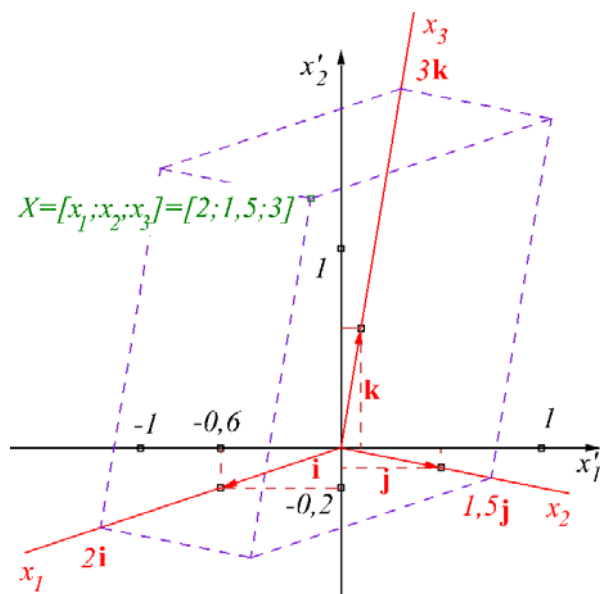
V prostoru E^3 uvažujme kartézskou souřadnou soustavu s počátkem $O^{(3)}$, jednotkovými vektory $\mathbf{i}^{(3)} = (1; 0; 0)$; $\mathbf{j}^{(3)} = (0; 1; 0)$; $\mathbf{k}^{(3)} = (0; 0; 1)$ na osách $x^{(3)}$; $y^{(3)}$; $z^{(3)}$.

Dále uvažujme bod X , který má v této soustavě souřadnice $X = [x_1; x_2; x_3]$, tj. lze psát

$$X = O^{(3)} + x_1 \cdot \mathbf{i}^{(3)} + x_2 \cdot \mathbf{j}^{(3)} + x_3 \cdot \mathbf{k}^{(3)} \quad (1)$$

Promítněme tuto soustavu do průmětny π . Průmětem bodu $O^{(3)}$ bude bod O , průměty vektorů $\mathbf{i}^{(3)}$; $\mathbf{j}^{(3)}$; $\mathbf{k}^{(3)}$ budou vektory \mathbf{i} ; \mathbf{j} ; \mathbf{k} . Průmětem bodu X bude bod X' . Rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr bodů, vzhledem k (1) proto bude

$$X' = O + x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k} \quad (2)$$



V průmětně π zvolme kartézskou souřadnou soustavu s počátkem v bodě O s jednotkovými vektory \mathbf{i}' ; \mathbf{j}' na osách x'_1 ; x'_2 a zajímejme se o souřadnice bodu X' v této soustavě.

Označíme-li tyto souřadnice $X' = [x'_1; x'_2]$, musí být vzhledem k (2)

$$x'_1 \cdot \mathbf{i}' + x'_2 \cdot \mathbf{j}' = x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k}$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici do souřadnic (v rovinné souřadné soustavě), máme:

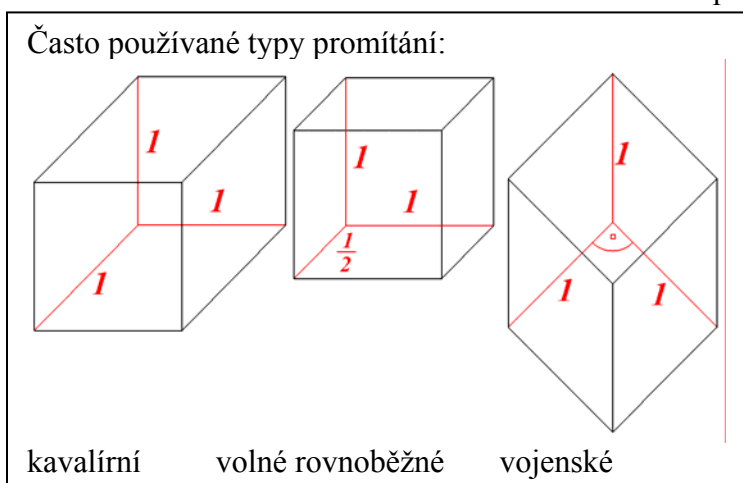
$$x'_1 \cdot i'_1 + x'_2 \cdot j'_1 = x_1 \cdot i_1 + x_2 \cdot j_1 + x_3 \cdot k_1$$

$$x'_2 \cdot i'_2 + x'_2 \cdot j'_2 = x_1 \cdot i_2 + x_2 \cdot j_2 + x_3 \cdot k_2$$

Protože \mathbf{i}' ; \mathbf{j}' jsou jednotkové vektory na souřadných osách, je $\mathbf{i}' = (i'_1; i'_2) = (1; 0)$ a $\mathbf{j}' = (j'_1; j'_2) = (0; 1)$, dostáváme po dosazení do levé strany

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cdot i_1 + x_2 \cdot j_1 + x_3 \cdot k_1 \\ x'_2 &= x_1 \cdot i_2 + x_2 \cdot j_2 + x_3 \cdot k_2 \end{aligned} \quad (3)$$

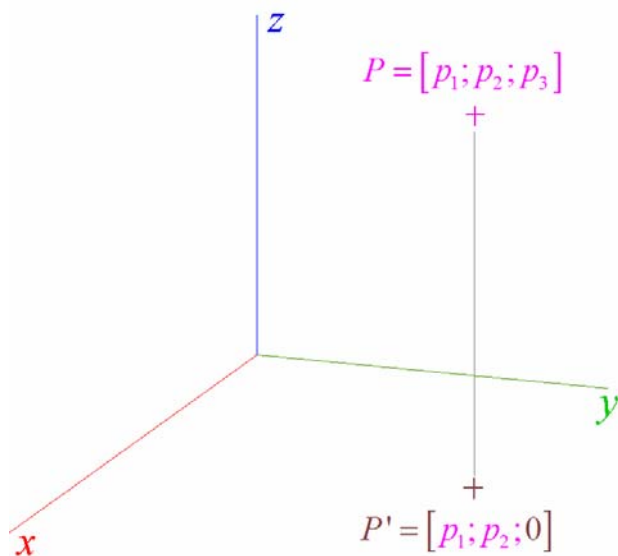
kde $(i_1; i_2)$, $(j_1; j_2)$, $(k_1; k_2)$ jsou souřadnice průmětů \mathbf{i} ; \mathbf{j} ; \mathbf{k} jednotkových vektorů v naší rovinné soustavě. Volbou těchto souřadnic volíme příslušné kosoúhlé promítání. Na našem obrázku je



$$\begin{aligned} x'_1 &= -0,6 \cdot i_1 + 0,5 \cdot j_1 + 0,1 \cdot k_1 \\ x'_2 &= -0,2 \cdot i_2 + 0,1 \cdot j_2 + 0,6 \cdot k_2 \end{aligned}$$

Soustavu (3) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 & 0 \\ i_2 & j_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Všimněte si, že třetí řádek matice tohoto zobrazení je nulový, matice tohoto zobrazení je tedy singulární. Je tomu tak proto, že promítání není prosté zobrazení (celá promítací přímka se totiž zobrazí do jediného bodu).

Podívejme se nyní na **pravoúhlé promítání**. Pro analytické zpracování je nejjednodušší pravoúhlé promítání do některé ze souřadnicových rovin, kde pouze nulujeme příslušnou souřadnici. Např. promítání do roviny $z = 0$ je určeno soustavou rovnic

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= x_2 \\x'_3 &= 0\end{aligned}$$

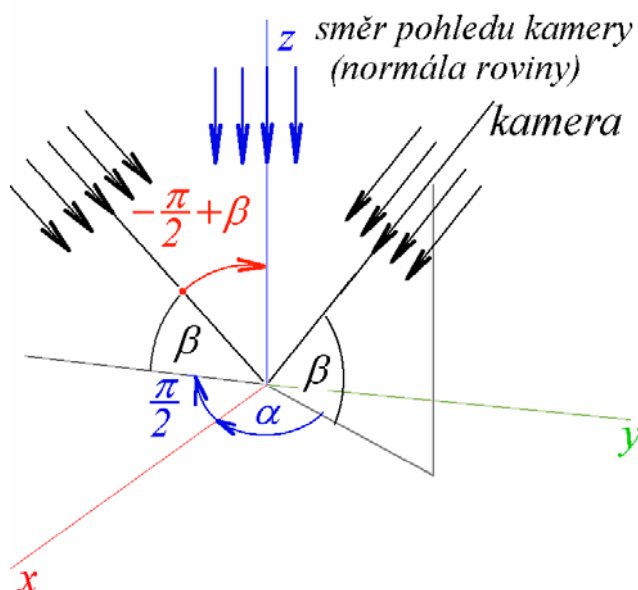
což přepsáno jako projektivní transformace:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{K}_{xy} \cdot \mathbf{X}^T$$

kde

$$\mathbf{K}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice kolmého promítání na rovinu $z = 0$.



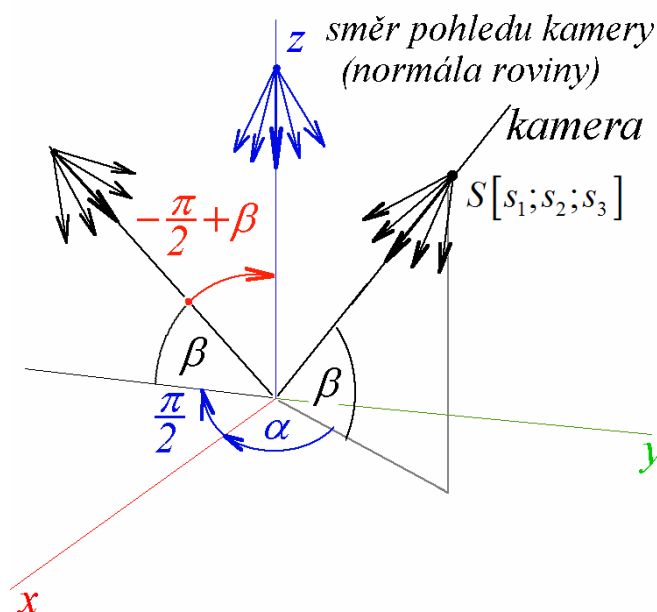
Chceme-li promítat kolmo na rovinu v obecné poloze, je třeba buď zadat rovnici roviny, na kterou chceme kolmo promítat, anebo (což je pro CAD systémy přirozenější) směr „pohledu kamery“ do souřadné soustavy, např. pomocí horizontálního a vertikálního úhlu tak, jak je naznačeno na připojeném obrázku. Pomocí dvou rotací pak tento směr ztotožníme s některou souřadnou osou provedeme kolmý průmět do příslušné průmětny a pomocí otočení o opačné úhly vrátíme kameře příslušný směr. Pokud budeme např. chtít použít výše uvedené promítání do roviny $z = 0$, bude postup následující: Nejprve otočíme kameru kolem osy z o úhel $\omega_1 = -\alpha - \frac{\pi}{2}$, aby

pohled kamery byl kolmý na osu x (záporná znaménka proto, že otáčíme „proti“ zadanému úhlu α). Matice otáčení je

$$\mathbf{R}_{z;\omega_1} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 & -\sin \omega_1 & 0 & 0 \\ \sin \omega_1 & \cos \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Následuje otočení o úhel $\omega_2 = \beta - \frac{\pi}{2}$ kolem osy x :

$$\mathbf{R}_{x;\omega_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_2 & -\sin \omega_2 & 0 \\ 0 & \sin \omega_2 & \cos \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Nyní můžeme promítnout kolmo na rovinu $z = 0$, tj. použít matici $\mathbf{K}_{x,y}$ a po tomto průmětu objekt „vrátit“ pomocí matic $\mathbf{R}_{x;-\omega_2}$; $\mathbf{R}_{z;-\omega_1}$. Tyto matice násobíme v obráceném pořadí, takže matice \mathbf{P} našeho promítání je tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{z;-\omega_1} \cdot \mathbf{R}_{x;-\omega_2} \cdot \mathbf{K}_{x,y} \cdot \mathbf{R}_{z;\omega_2} \cdot \mathbf{R}_{z;\omega_1}$$

Matici **středového promítání** sestrojíme podobným způsobem. Odvození matice středového promítání do roviny $z = 0$ je již poněkud komplikovanější, uveďme tedy pouze výsledek:

$$\mathbf{P}_{S,x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s_3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matici středového promítání na obecnou rovinu obdržíme analogicky jako v případě promítání rovnoběžného, je tedy

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{z;-\omega_1} \cdot \mathbf{R}_{x;-\omega_2} \cdot \mathbf{P}_{S,x,y} \cdot \mathbf{R}_{z;\omega_2} \cdot \mathbf{R}_{z;\omega_1}$$