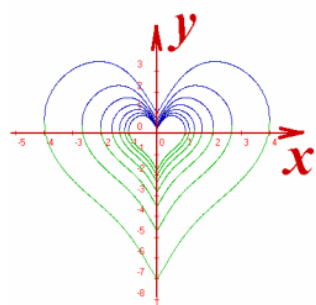


## 4 Analytické křivky a plochy

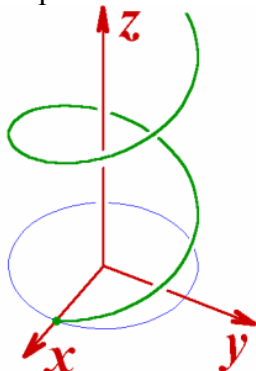
V kapitole 1.4 jsme definovali křivku jako topologicky jednorozměrnou souvislou množinu bodů. Křivky můžeme dělit podle dimenze prostoru, jehož jsou podmnožinou a podle možnosti analytického popisu, tj. možnosti stanovit obecné vztahy mezi souřadnicemi jednotlivých bodů křivky:

### podle dimenze prostoru

rovinné:

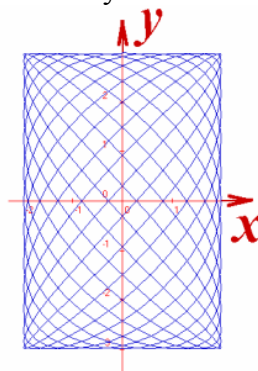


prostorové



### podle možnosti analytického popisu

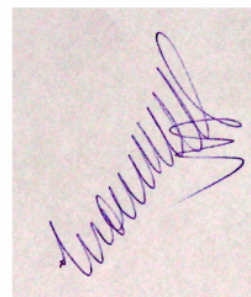
analytické



$$x = 2 \sin 15t$$

$$y = 3 \cos 1t$$

grafické



??????????????

V této kapitole se budeme zabývat pouze analytickými křivkami, a to jak rovinnými, tak prostorovými.

### 4.1 Analytické určení křivky

Rovinnou křivku můžeme analyticky popsat několika způsoby.

**1. Křivka jako graf funkce:** Funkce jedné reálné proměnné je zobrazení  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subseteq \mathbb{R}$  je definiční obor funkce. Grafem funkce rozumíme množinu

$$G(f) = \{[x; y] \in E^2 \mid y = f(x)\}.$$

Tímto grafem je velmi často křivka (např. grafy funkcí  $\sin x$ ;  $\ln x$ ) či více křivek (např.  $x^{-1}$ ;  $\ln|x-1|$ ).

**2. Parametrické vyjádření křivky:** Jedná se o zadání křivky pomocí soustavy dvou popř. tří rovnic v nichž je souřadnice každého bodu křivky zapsána jako funkce reálné proměnné, kterou nazýváme parametr. Pro křivku v rovině tedy

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t); \\ y &= \psi(t); \end{aligned} \quad t \in I \quad (1)$$

kde  $I$  je interval. Tyto rovnice nazýváme rovnice parametrické. Například soustava

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \cos t \\ y &= 2 \cdot \sin t \end{aligned} \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad (2)$$

představuje parametrické rovnice kružnice. Často se setkáváme s vyjádřením rovinné křivky v polární soustavě souřadné, a to ve tvaru

$$r = \varphi(t); \quad t \in I,$$

kde  $t$  je orientovaný úhel, který svírá průvodič bodu s polární osou a  $r$  je vzdálenost bodu od počátku. Toto vyjádření ovšem snadno převedeme na vyjádření parametrické pomocí známých vztahů

$$\begin{aligned} x &= r \cos t = \varphi(t) \cos t \\ y &= r \sin t = \varphi(t) \sin t \end{aligned}; \quad t \in I$$

**3. Obecná rovnice křivky:** Upravíme-li soustavu (1) na jedinou rovnici tak, že se v ní nebude parametr vyskytovat, dostaneme rovnici obecnou. Tomuto postupu říkáme vyloučení parametru. Upravíme-li naopak obecnou rovnici na rovnici o jedné neznámé pomocí substituce tak, že tato rovnice přejde v rovnost, je tato substituce parametrickými rovnicemi téže křivky. Tomuto postupu říkáme parametrizace. Například rovnice  $x^2 + y^2 = 4$  je obecná rovnice kružnice s parametrickým vyjádřením (2). Tímto způsobem lze ovšem vyjádřit jen rovinné křivky. Vyloučením parametru z parametrických rovnic rovinné křivky dostaneme rovnici tvaru

$$f(x; y) = 0$$

Vyloučením parametru z parametrických rovnic prostorové křivky dostaneme vyjádření této křivky pomocí soustavy dvou rovnic:

$$f(x; y; z) = 0; \quad g(x; y; z) = 0$$

Každá z těchto rovnic je rovnicí plochy v prostoru, prostorovou křivku tak dostáváme jako průsečnici těchto dvou ploch.

**3. Příklad:** Parametrizujme obecné rovnice křivek

$$\text{a) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{b) } (x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \text{c) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Poznámka:** Ze střední školy víme, že se jedná o rovnice elipsy, paraboly a hyperboly. Těmto křivkám se budeme podrobněji věnovat v dalších kapitolách.

**Řešení:** a) položíme-li  $x = a \cos t$ ;  $y = b \sin t$  a dosadíme do obecné rovnice, obdržíme

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

což je rovnice, která platí pro každé  $t \in \mathbb{R}$ . Parametrické rovnice naší elipsy tedy jsou

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \tag{3}$$

Vzhledem k tomu, že  $x \in \langle -a; a \rangle$ ;  $y \in \langle -b; b \rangle$ ; lze definiční obor parametru zúžit na interval  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$

**b)** Z této rovnice lze vyjádřit  $y$ :  $y = \frac{1}{2p}(x-m)^2 + n$ . Parametrické rovnice tedy budou zřejmě tvaru

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{1}{2p}(t-m)^2 + n; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

**c)** Při parametrizaci elipsy jsme využili známou vlastnost sinu a kosinu – totiž že pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ . Pokud bychom chtěli stejný obrat použít u hyperboly, museli bychom najít dvě funkce, u nichž analogicky funguje ne součet, ale rozdíl čtverců, tj. dvě funkce  $f; g$  takové, že pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je  $g^2(t) - f^2(t) = 1$ . Pak bychom mohli položit  $x = a \cdot g(t)$ ;  $y = b \cdot f(t)$  a dosazením do rovnice hyperboly zcela analogicky:

$$\frac{(a \cdot g(t))^2}{a^2} - \frac{(b \cdot f(t))^2}{b^2} = 1 \Rightarrow g^2(t) - f^2(t) = 1$$

Je jen otázkou, zda takové funkce existují. Odpověď na tuto otázku je kladná. Položíme-li totiž

$$g(t) = \cos^{-1} t; \quad f(t) = \operatorname{tg} t$$

pak je skutečně

$$g^2(t) - f^2(t) = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

takže příslušná parametrizace hyperboly je tvaru

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos^{-1} t \\ y &= b \cdot \operatorname{tg} t \end{aligned}$$

Je třeba samozřejmě položit  $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  a vzhledem k periodicitě použitých goniometrických funkcí stačí dále  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ . Jinou zajímavou možností je

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \quad g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

pak je opět

$$g^2(t) - f^2(t) = \frac{1}{4} \cdot (e^t + e^{-t})^2 - \frac{1}{4} \cdot (e^t - e^{-t})^2 = \frac{1}{4} \cdot (e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}) = 1$$

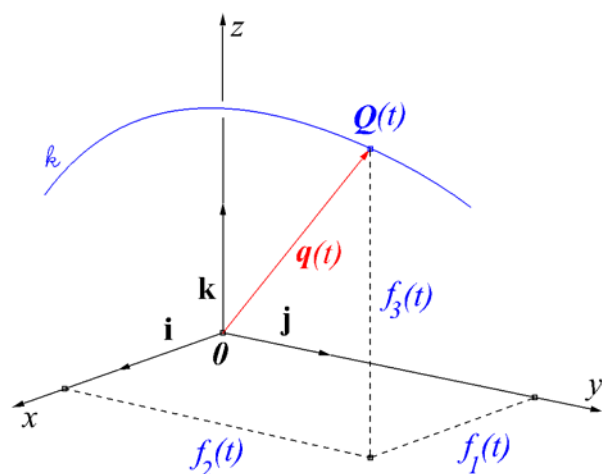
Protože funkce  $f; g$  plní u hyperboly analogickou úlohu jako sinus a kosinus u elipsy, nazývají se v matematice hyperbolický sinus resp. hyperbolický kosinus a značí se

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \quad t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Parametrizaci hyperboly pak dostáváme ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= a \cosh t; \\ y &= b \sinh t; \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R} \quad (6)$$

**4. Bodová funkce:** Zatímco funkce jedné reálné proměnné je zobrazení  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subseteq \mathbb{R}$  je definiční obor funkce, rovinnou resp. prostorovou bodovou funkcí jedné reálné proměnné v euklidovském (projektivním) prostoru rozumíme zobrazení  $\mathbf{f} : D \rightarrow E^2$  resp.



$\mathbf{f} : D \rightarrow E^3$ , ( $\mathbf{f} : D \rightarrow {}_{\infty}E^2$  resp.

$\mathbf{f} : D \rightarrow {}_{\infty}E^3$ ) kde  $D \subseteq \mathbb{R}$  je definiční obor funkce. Proměnnou budeme značit  $t$  a nazýváme ji parametr. Hodnotou bodové funkce pro  $t \in D \subseteq \mathbb{R}$  je bod

$$Q(t) = [f_1(t); f_2(t)] \in E^2$$

resp.

$$Q(t) = [f_1(t); f_2(t); f_3(t)] \in E^3.$$

popř.

$$Q(t) = (k \cdot f_1(t); k \cdot f_2(t); k \cdot \omega) \in {}_{\infty}E^2$$

resp.

$$Q(t) = (k \cdot f_1(t); k \cdot f_2(t); k \cdot f_3(t); k \cdot \omega) \in {}_{\infty}E^3$$

Každá hodnota parametru  $t$  určuje bod  $Q(t)$  jednoznačně. Protože nehrozí nedorozumění, mluvíme často jen o bodu  $t$  místo o bodu  $Q(t)$ . Body projektivního prostoru budeme reprezentovat euklidovskými reprezentanty, tj. budeme psát

$$Q(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega) \in {}_{\infty}E^2 \quad (1)$$

resp.

$$Q(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t); \omega) \in {}_{\infty}E^3 \quad (2)$$

kde  $\omega = 1$  resp.  $\omega = 0$  právě tehdy, když je bod  $Q(t)$  vlastní resp. nevlastní. Můžeme se rovněž setkat s tím, že vlastní bod  $Q(t) = (q_1; q_2; 1) \in {}_{\infty}E^2$  křivky  $k$  je reprezentován jeho polohovým vektorem  ${}_{\infty}Q(t) = \mathbf{q}(t) = Q(t) - \mathbf{O} = (q_1; q_2; 1) - (0; 0; 1) = (q_1; q_2; 0) \in {}_{\infty}E^2$  (v  ${}_{\infty}E^3$  analogicky). Rovnice (1) a (2) jsou pak tvaru

$$\mathbf{q}(t) = (f_1(t); f_2(t)) \in Z(E^2)$$

resp.

$$\mathbf{q}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \in Z(E^3)$$

a hovoříme pak o vektorových rovnicích křivky.

Obor hodnot bodové funkce (tj. množinu bodů, které jsou obrazem nějakého  $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ ) budeme nazývat grafem bodové funkce. Funkce  $f_1(t); f_2(t)$  popř.  $f_3(t)$  nazýváme **souřadnicové funkce**.

Lze ukázat, že pokud je definičním oborem bodové funkce interval (tj. souvislá podmnožina  $\mathbb{R}$ ) a všechny souřadnicové funkce jsou spojité, pak grafem bodové funkce je křivka  $k$  v prostoru  ${}_{\infty}E^2$  popř.  ${}_{\infty}E^3$ . Říkáme pak, že křivka je určena bodovou funkcí.

Je-li  $D = \langle t_1; t_2 \rangle$ ; kde  $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$ , pak bod  $T_1 = (f_1(t_1); f_2(t_1); \omega)$  nazýváme počátečním a bod  $T_2 = (f_1(t_2); f_2(t_2); \omega)$  koncovým bodem rovinné křivky. Pro prostorovou křivku analogicky.

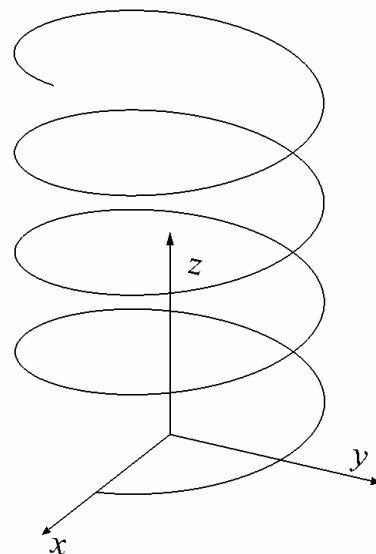
## 2. Příklad: Parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} ; t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

je určena kružnice. Přepíšeme-li je do tvaru  $K(t) = (\cos t; \sin t; 1)$ ,  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ , dostáváme kružnici jako rovinnou bodovou funkci.

Parametrickými rovnicemi

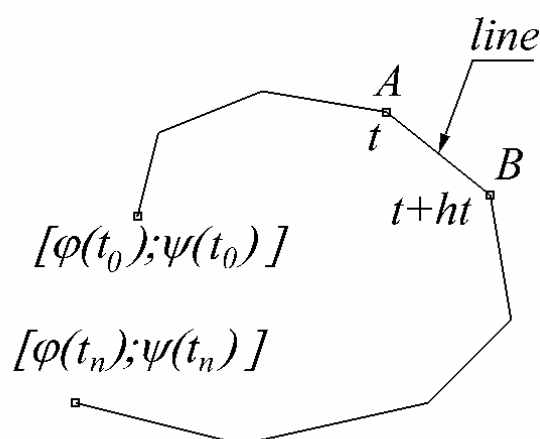
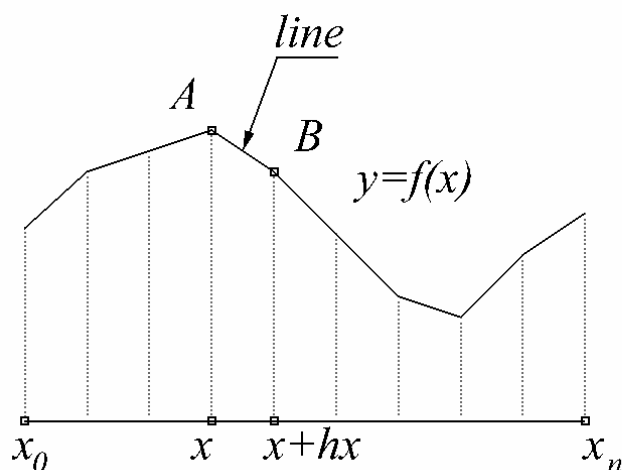
$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t ; t \in \langle 0; 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{N} \\ z &= t \end{aligned}$$

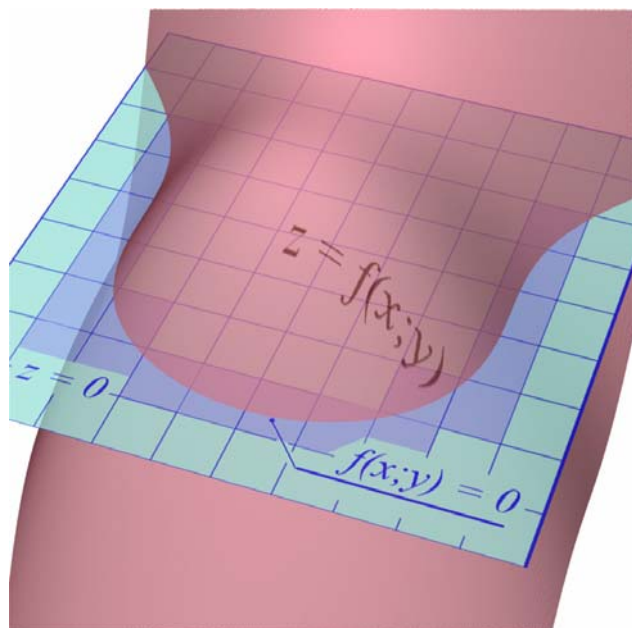


je určeno  $k$  závitů prostorové křivky zvané cylindrická šroubovice, která je znázorněna na připojeném obrázku (touto křivkou se budeme zabývat dále). Tyto parametrické rovnice můžeme přepsat do tvaru prostorové bodové funkce  $S(t) = (\cos t; \sin t; t)$ ;  $t \in \langle 0; 2k\pi \rangle$ . Bodovou funkci dostaneme z parametrických rovnic křivky jejich „přepisem“ do jednoho řádku.

## 4. 2 Grafické algoritmy konstrukce křivek

Křivky zadané jako graf funkce a křivky zadané parametrickými rovnicemi resp. bodovou funkcí sestavují grafické systémy většinou tak, že definiční obor funkce  $\langle x_0; x_n \rangle$  resp. interval  $\langle t_0; t_n \rangle$ , ve kterém je definován parametr, rozdělí ekvidistantním dělením na  $n$  stejných dílů a křivka je sestavena jako „lomená čára“, která prochází body  $[x_i; f(x_i)]$  resp.  $[\varphi(t_i); \psi(t_i)]$ .





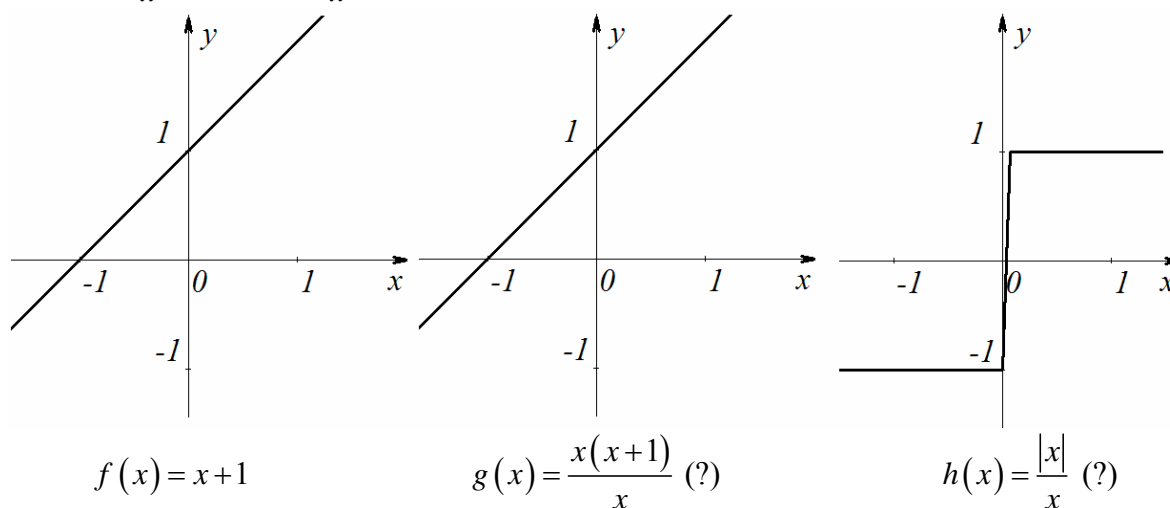
Z algoritmického hlediska je nejméně příjemná křivka zadaná rovnicí  $f(x, y) = 0$ . Nejjednodušší algoritmus její konstrukce využívá skutečnosti, že křivka  $f(x, y) = 0$  je průsečnicí plochy  $z = f(x, y)$  a roviny  $z = 0$ , a dále nenulové velikosti pixelů výstupního zařízení počítače. Dva do sebe vnořené cykly procházejí výstupní okno pixel po pixelu a testují znaménka funkce  $f(x, y)$  ve vrcholech každého pixelu. Jestliže jsou všechna stejná, pak křivka pixelem neprochází a pixel zůstane nesestrojen (neobarven). Jestliže se znaménka liší, pixel se obarví (sestrojí).

### 4.3 Tečna a normála křivky

Problémem tečen k nejrůznějším křivkám se zabývali již antičtí matematikové. Uspokojivě zavedli pojem tečny ke kuželosečce, korektní řešení pro obecné křivky však bylo nalezeno až s objevem diferenciálního počtu, který se stal velmi účinným nástrojem matematického popisu křivek a ploch. S jeho základy se v matematice budete teprve seznamovat, proto si zde všimneme jen zcela nezbytného aparátu, který se skrývá v současných softwarových nástrojích geometrického modelování.

Sestrojíme-li tímto algoritmem uvedeným v minulé kapitole grafy funkcí  $f(x) = x + 1$ ;

$g(x) = \frac{x(x+1)}{x}$ ;  $h(x) = \frac{|x|}{x}$ ; dostaneme následující obrázek:



Zatímco graf funkce  $f(x)$  asi nikoho nepřekvapí, grafy funkcí  $g(x)$ ;  $h(x)$  jsou již problematické. Tyto funkce totiž nejsou definovány v nule. Při „obvyklých zadáních“ intervalu  $\langle x_1; x_2 \rangle$  a kroku  $h_x$  (např.  $\langle -2; 2 \rangle$ ; 0.1) by měl program havarovat, neboť algoritmus požaduje funkční hodnotu v bodě nula a potřebuje tedy touto nulou dělit. Program

sice možná „přežije“ (díky zaokrouhlovacím chybám při opakovaném přičítání kroku se totiž do nuly „netrefí“). Je však otázkou, nakolik jeho výstupy odpovídají realitě.

Graf funkce  $g(x)$  je celkem v pořádku, až na to, že bychom v bodě  $[0;1]$  měli vyznačit prázdný kroužek – funkční hodnota zde chybí. Pokud funkci  $g(x)$  dodefinujeme tak, že  $g(0)=1$ , bude jejím grafem souvislá množina bodů. Funkcí  $h(x)$  však takto dodefinovat nelze. V bodě  $x=0$  má totiž „schodek“. Říkáme, že funkce  $g(x)$  má v nule limitu, funkce  $h(x)$  v tomto bodě limitu nemá (tato limita neexistuje).

**2. Limita funkce:** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$  právě tehdy, když existuje okolí  $O(x_0)$  takové, že množina

$$M = \{[x; f(x)] \mid x \in O(x_0) - x_0\} \cup [x_0; a]$$

je souvislá. Zapisujeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

**Poznámka:** Takto definovaná limita je tzv. vlastní limita ve vlastním bodě. V matematice budete studovat i jiné případy limit. V tomto textu je však nebudeme potřebovat. Nebudeme se jimi tedy zabývat a místo o vlastní limitě ve vlastním bodě budeme hovořit stručně jen o limitě. V matematice se budete také podrobně zabývat tím, jak limity funkcí určovat. Zde se spokojíme s nejjednoduššími případy, kdy je možné funkční předpis vhodně vykrátit a poté bod  $x_0$  dosadit.

**3. Příklad:** a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x+1 = \lim_{x \rightarrow 0} 0+1 = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = 4$

**4. Derivace funkce:** Derivace funkce je matematický nástroj, který umožňuje definovat tečnu křivky. Derivací  $f'(x)$  funkce  $f(x)$  na množině  $I$  rozumíme funkci

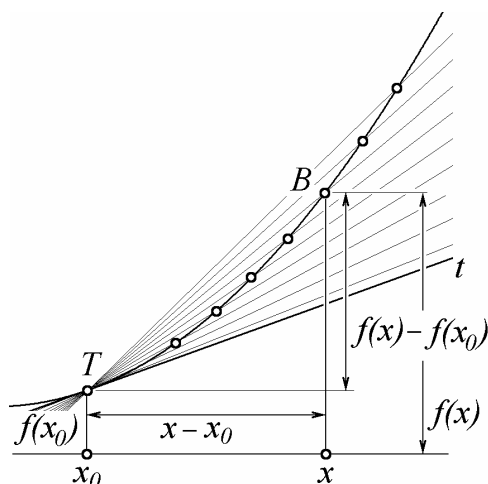
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

pokud tato limita na celé množině  $I$  existuje. Derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0 \in I$  rozumíme číslo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

tedy hodnotu funkce  $f'(x)$  v bodě  $x_0 \in I$ .

Jak je vidět z připojeného obrázku, derivace funkce v bodě  $x_0$  udává směrnici přímky  $t$ , kterou můžeme prohlásit za tečnu grafu funkce.



**5. Derivace některých důležitých funkcí na množině  $\mathbb{R}$  :**

$$\text{a) } (x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x+0 = 2x$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3x^2 + 2x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) - 3x^2 - 2x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2x + 2h - 3x^2 - 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 2) = 6x + 2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } (c)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \text{ (derivace konstanty je nula)} \quad (3)$$

Podobně se dá dokázat obecně, že:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0)' = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 x \quad (4)$$

a dále

$$(c \cdot \sin x)' = c \cdot \cos x; \quad (c \cdot \cos x)' = -c \cdot \sin x \quad (5)$$

**6. Tečna grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$**  je přímka, která prochází bodem  $T \equiv [x_0; f(x_0)]$  a má směrnici  $f'(x_0)$ . Derivace  $f'(x)$  na množině  $I$  pak udává závislost této směrnice na měnícím se  $x$ . Při určování tečny postupujeme většinou tak, že určíme nejdříve  $f'(x)$  a dosazením konkrétního bodu pak  $f'(x_0)$ .

**7. Příklad:** Určete tečny grafů funkcí

$$\text{a) } f(x) = x^2 + 2x \text{ v bodě } x_0 = 0 \quad \text{b) } g(x) = 2 \cos x \text{ v bodě } x_0 = \frac{1}{3}\pi$$

**Řešení:** a)  $f(x) = x^2 + 2x$ ;  $k = f'(x_0) = f'(0) = 2$ ;

rovnice tečny

$$t \equiv y = kx + q$$

$$t \equiv y = 2x + q.$$

$$T = [x_0; f(x_0)] = [0; 0] \in t$$

$$0 = 2 \cdot 0 + q \Rightarrow q = 0;$$

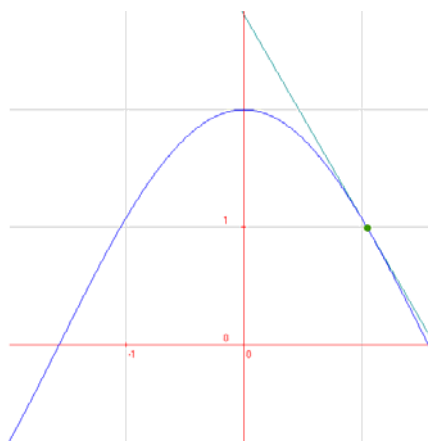
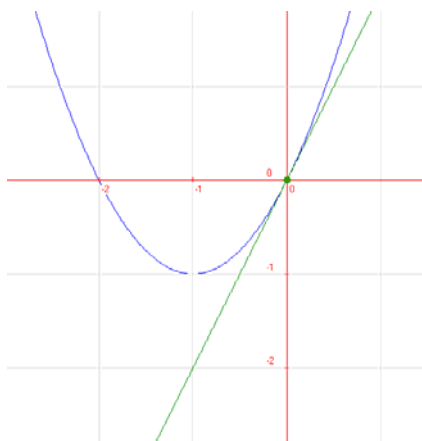
$$t \equiv y = 2x$$

$$\text{b) } g(x) = 2 \cos x; k = g'(x_0) = g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

rovnice tečny

$$t \equiv y = -\sqrt{3}x + q$$

$$T = \left[\frac{\pi}{3}; 2 \cos \frac{\pi}{3}\right] = \left[\frac{\pi}{3}; 1\right] \in t \quad 1 = -\sqrt{3} \frac{\pi}{3} + q \Rightarrow q = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \quad t \equiv y = -\sqrt{3}x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$





Vzhledem k tomu, že derivace funkce na množině je opět funkce, můžeme ji dále derivovat. Hovoříme pak o derivaci druhé, třetí, atd. Např.

$$f(x) = \sin x; f'(x) = \cos x; f''(x) = -\sin x; f'''(x) = -\cos x \text{ atd.}$$

V dalším textu využijeme první a druhou derivaci funkce

**8. Derivace bodové funkce:** Proměnnou bodové funkce (parametr) značíme většinou  $t$  a derivujeme po složkách, tj. derivací bodové funkce

$$Q(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega)$$

v projektivní rovině bude funkce

$$Q'(t) = (f'_1(t); f'_2(t); 0).$$

Je-li tedy například

$$Q(t) = (3 \cos t; 3 \sin t; 2t; 1)$$

je

$$Q'(t) = (-3 \sin t; 3 \cos t; 2; 0)$$

Pro derivaci složek bodové funkce jsme použili vztahy (3;4;5).

Všimněte si, že derivací bodové funkce v projektivním prostoru je funkce, jejímž oborem hodnot je množina nevlastních bodů, tj. derivací funkce v bodě (ať již vlastním nebo nevlastním) je nevlastní bod. Jeho reprezentanti jsou tedy přímo směrové vektory tečny v daném bodě. V projektivním prostoru lze uvažovat zcela analogicky.

Aby ovšem naše úvahy byly korektní, je třeba, aby derivace  $f'_1(t); f'_2(t)$  popř.  $f'_3(t)$  jednak existovaly a dále musí být alespoň jedna z nich nenulová (neboť směrový vektor tečny nemůže být nulový). Je tedy třeba zavést následující pojem:

**9. Regulární bod, regulární křivka:** bodová funkce

$$Q(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega) \quad \text{resp.} \quad Q(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t); \omega)$$

je v bodě  $T_0 = (f_1(t_0); f_2(t_0); \omega)$  resp.  $T_0 = (f_1(t_0); f_2(t_0); f_3(t_0); \omega)$  regulární  $n$ -tého řádu právě tehdy, když existují derivace souřadnicových funkcí až do řádu  $n$  z nichž alespoň jedna je nenulová. Bod  $T_0$  nazýváme regulární bod funkce (i křivky). Funkci, jejímž definičním oborem je interval a která je v každém svém bodě regulární, nazveme regulární funkcí (nebo též pohybem). Křivku nazveme regulární právě tehdy, je-li grafem nějaké regulární funkce.

**10. Tečna a normála v regulárním bodě křivky:** Necht'  $k$  je rovinná resp. prostorová regulární křivka určená bodovou funkcí  $Q(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega)$  resp.  $Q(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t); \omega)$ . Pak tečnou křivky  $k$  v bodě  $T_0 = Q(t_0) = (f_1(t_0); f_2(t_0); \omega)$  resp.  $T_0 = Q(t_0) = (f_1(t_0); f_2(t_0); f_3(t_0); \omega)$  rozumíme přímku, která prochází bodem  $T_0$  a má směrový vektor  $Q'(t_0) = (f'_1(t_0); f'_2(t_0); 0)$  resp.  $Q'(t_0) = (f'_1(t_0); f'_2(t_0); f'_3(t_0); 0)$ . Normálou této křivky v bodě  $T_0 = Q(t_0)$  rozumíme

libovolnou kolmicí k tečně v bodě  $T_0$ , která tímto bodem prochází. Tečnu k regulární křivce tak lze psát ve tvaru  $X = Q(t_0) + Q'(t_0) \cdot t$ .

Lze ukázat, že k dané regulární křivce existuje v daném bodě jediná tečna. Každá křivka má ovšem nekonečně mnoho normál – normálou je každá přímka, která prochází bodem  $T_0$  a leží v rovině kolmé k tečně.

**11. Příklad:** Určeme směrový vektor tečny následujících křivek v daných bodech

a)  $K(t) = (r \cos t; r \sin t; 0; 1)$   $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  v bodě  $T_0 = K(t_0)$

b)  $E(t) = (a \cos t; b \sin t; 0; 1)$   $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  v bodě  $T_0 = E(t_0)$

c)  $P(t) = (t; t^2; 0; 1)$

d)  $S(t) = (r \cos t; r \sin t; v_0 t; 1)$ ;  $t \in \langle 0; 2k\pi \rangle$ ;  $k \in \mathbb{N}$ , v bodě  $T_0 = S(t_0)$

**Poznámka:** v případech a) b) c) se jedná o kružnici elipsu a parabolu (tyto křivky známe ze střední školy), v případě d) jde o cylindrickou šroubovici, kterou se budeme zabývat dále.

**Řešení:**

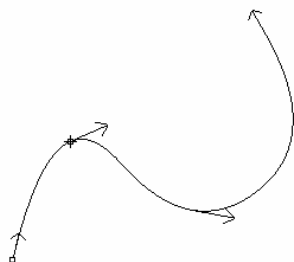
a)  $K'(t) = (-r \sin t; r \cos t; 0; 0)$   $K'(t_0) = (-r \sin t_0; r \cos t_0; 0; 0)$

b)  $E'(t) = (-a \sin t; b \cos t; 0; 0)$   $E'(t_0) = (-a \sin t_0; b \cos t_0; 0; 0)$

c)  $P'(t) = (1; 2t; 0; 0)$   $P'(t_0) = (1; 2t_0; 0; 0)$

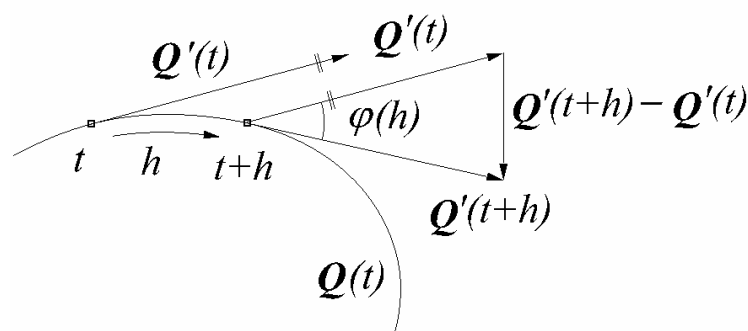
d)  $S'(t) = (-r \sin t; r \cos t; v_0; 0)$   $S'(t_0) = (-r \sin t_0; r \cos t_0; v_0; 0)$

V systému **Rhinoceros** jsou směrové vektory tečen křivky v aktuálním bodě přístupné z menu **Analýza/Směr**, konstrukce tečny ke křivce pak z menu **Křivka/Úsečka**.



#### 4. 4 Křivost a osculační kružnice

Na střední škole se uvádí pojem osculační kružnice kuželoseček jako kružnice, která „co nejlépe nahrazuje“ danou kuželosečku ve vrcholech. Nespecifikuje se ovšem, co to znamená, a ani syntetické konstrukce, které se uvádějí, se nijak nezdůvodňují. Nyní se o to pokusíme.



Osculační kružnice křivky v bodě je kružnice, která se v daném bodě křivky dotýká (tj. má s ní společnou tečnu) a navíc má „vhodný“ poloměr – má stejnou křivost.

**1. Křivost (flexe), poloměr křivosti, osculační kružnice, hlavní normála:** Uvažujme dva body  $t$ ;  $t+h$  regulární křivky  $Q(t)$  a označme  $\varphi(h)$  velikost

úhlu, který svírají směrové vektory  $Q'(t)$ ;  $Q'(t+h)$  tečen křivky  $Q(t)$  v bodech  $t$ ;  $t+h$ . Pro „velmi malé“  $h$  bude tento úhel tím větší, čím více se bude křivka  $Q(t)$  „lišit od své tečny“, tj. čím bude „křivější“. Číslo

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|}$$

nazýváme proto křivostí křivky  $\mathbf{Q}(t)$  v bodě  $t$ . Lze dokázat, že křivost křivky  $\mathbf{Q}(t)$  v bodě  $t$  je rovna

$$\kappa = \frac{|\mathbf{Q}'(t) \times \mathbf{Q}''(t)|}{|\mathbf{Q}'(t)|^3} \quad (1)$$

Oskulační kružnice tedy existují ve všech bodech, které jsou regulární 2. řádu, a to nejen pro křivky rovinné, ale i prostorové. V „prostorových“ případech je ovšem problémem už to, ve které rovině oskulační kružnice vlastně sestrojovat.

Oskulační kružnici budeme zřejmě sestrojovat v rovině, ve které leží vektory  $\mathbf{Q}'(t)$ ;  $\mathbf{Q}'(t+h)$ , tedy vektor  $\mathbf{Q}'(t+h) - \mathbf{Q}'(t)$ , resp, jeho limitní případ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Q}'(t+h) - \mathbf{Q}'(t)}{h} = \mathbf{Q}''(t)$$

Rovinu

$$\sigma = \mathbf{Q}(t_0) + \mathbf{Q}'(t_0)u + \mathbf{Q}''(t_0)v$$

tedy nazýváme oskulační rovinou křivky v bodě  $T_0 = \mathbf{Q}(t_0)$ . Kružnici  $\mathbf{K}(t)$ , která leží v oskulační rovině křivky  $\mathbf{Q}(t)$ , dotýká se této křivky v bodě  $t$ , má poloměr  $r = \kappa^{-1}$  a s polopřímku  $X = T_0 + \mathbf{Q}''(T_0) \cdot t$ ;  $t \geq 0$  má dva společné body, nazýváme **oskulační kružnici** křivky  $\mathbf{Q}(t)$  v bodě  $t$ . Střed této kružnice leží na normále křivky, která leží v oskulační rovině, nazýváme ji **hlavní normálou křivky**.

**2. Vrcholy regulární křivky:** Křivost v (proměnném) bodě  $t$  dle výrazu (1) je funkcí parametru  $t$ . Extrémy této funkce detekují body, ve kterých má daná křivka největší resp. nejmenší křivost. Tyto body nazýváme **vrcholy křivky**. Oskulační kružnice ve vrcholech křivky nazýváme speciálně **hyperoskulačními kružnicemi**.

**3. Příklad:** Vypočtěme středy a poloměry hyperoskulačních kružnic kružnice, elipsy a paraboly

**Řešení: a)**  $\mathbf{K}(t) = (r \cos t; r \sin t; 0; 1) \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ;  $\mathbf{K}'(t) = (-r \sin t; r \cos t; 0; 0)$   
 $\mathbf{K}''(t) = (-r \cos t; -r \sin t; 0; 0)$

$$\mathbf{K}'(t) \times \mathbf{K}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin t & r \cos t & 0 \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cdot \mathbf{k} = (0; 0; r^2)$$

$$\kappa_K = \frac{|\mathbf{K}'(t) \times \mathbf{K}''(t)|}{|\mathbf{K}'(t)|^3} = \frac{r^2}{|(-r \sin t; r \cos t; 0)|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

Poloměr oskulační kružnice kružnice je tedy  $r$  a kružnice je sama sobě kružnicí oskulační. Všimněte si, že

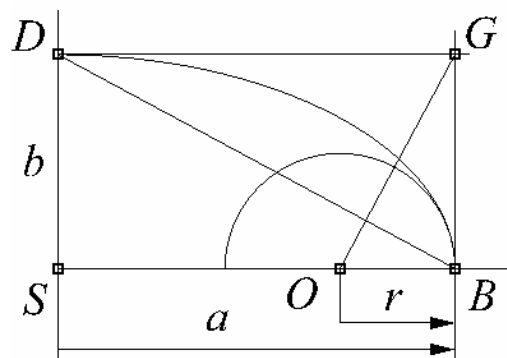
$$\mathbf{K}'(t) \cdot \mathbf{K}''(t) = (-r \sin t; r \cos t; 0) \cdot (-r \cos t; -r \sin t; 0) = 0$$

tedy  $\mathbf{K}'(t) \perp \mathbf{K}''(t)$ , takže vektor  $\mathbf{K}''(t)$  je v tomto případě přímo vektorem hlavní normály.

b)  $\mathbf{E}(t) = (a \cos t; b \sin t; 0; 1) \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ;  $\mathbf{E}'(t)$  - viz př. 4

$$\mathbf{E}''(t) = (-a \cos t; -b \sin t; 0; 0); \mathbf{E}'(t) \times \mathbf{E}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & b \cos t & 0 \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \end{vmatrix} = ab \cdot \mathbf{k} = (0; 0; ab)$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{E}'(t) \times \mathbf{E}''(t)|}{|\mathbf{E}'(t)|^3} = \frac{ab}{|(-a \sin t; b \cos t; 0)|^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3} \Rightarrow r = \frac{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}{ab}$$



V hlavním resp. vedlejším vrcholu (tj. při této parametrizaci pro  $t=0$  resp.  $t=\frac{\pi}{2}$ ) je

$$r_A = \frac{(\sqrt{a^2 \sin^2 0 + b^2 \cos^2 0})^3}{ab} = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a};$$

$$r_C = \frac{(\sqrt{a^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}})^3}{ab} = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}$$

I zde snadno zjistíme, že  $\mathbf{E}'(t) \cdot \mathbf{E}''(t) = 0$ , vektor  $\mathbf{E}''(t)$  je tedy směrovým vektorem hlavní normály. Tím jsou zdůvodněny konstrukce oskulačních kružnic elipsy, které známe ze střední školy – ilustrovme pro hlavní vrchol:

$$\triangle BSD \sim \triangle GBO \quad (uu)$$

$$\frac{r}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$$

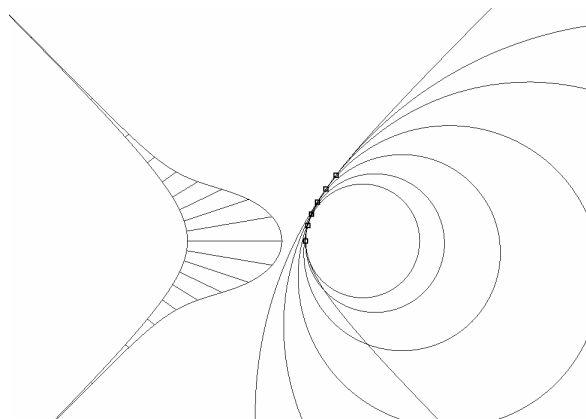
c)  $\mathbf{P}(t) = (t; t^2; 0; 1); t \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{P}'(t) = (1; 2t; 0; 0); \quad \mathbf{P}''(t) = (0; 2; 0; 0)$

$$\mathbf{P}'(t) \times \mathbf{P}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \mathbf{k} = (0; 0; 2)$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{P}'(t) \times \mathbf{P}''(t)|}{|\mathbf{P}'(t)|^3} = \frac{2}{|(1; 2t; 0)|^3} = \frac{2}{(\sqrt{1+4t^2})^3} \Rightarrow r = \frac{(\sqrt{1+4t^2})^3}{2}$$

Pro vrchol paraboly (tedy pro  $t=0$ ), je  $r = \frac{1}{2}$ , což je rovněž v souladu s naší předchozí zkušeností (parametr této paraboly je totiž  $p = \frac{1}{2}$ )

V systému Rhinoceros je možné sestavit oskulační kružnice křivek, a to z menu **Analýza/Hlavní křivosti**. Příkaz jednak umožní sestavit oskulační kružnici a jednak vypíše souřadnice jejího středu a poloměr. Rovněž je možné zapnout graf křivosti - **Analýza/Křivka/Zapnout graf křivosti**.



Na připojeném obrázku si můžeme prohlédnout oskulační kružnice v několika bodech hyperboly (pravá větev). Jejich zmenšující se poloměr signalizuje stoupající křivost křivky tak, jak je vidět na zapnutém grafu křivosti levé větve. Délky úseček grafu křivosti jsou funkční hodnoty funkce (1)

**3. Příklad:** Vypočtěme křivost a poloměr oskulační kružnice šroubovice v libovolném bodě.

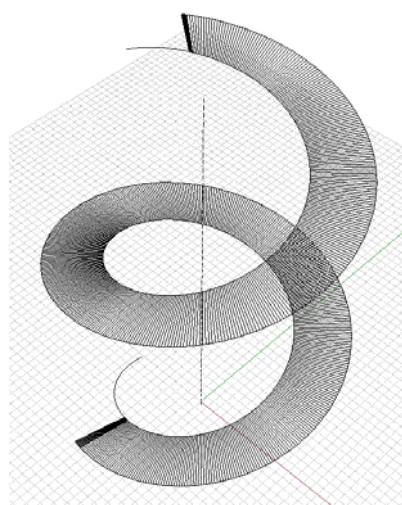
**Řešení:**  $S(t) = (r \cos t; r \sin t; v_0 t; 1);$

$$t \in (0; 2k\pi); k \in \mathbb{N};$$

$$S'(t) = (-r \sin t; r \cos t; v_0; 0); \quad S''(t) = (-r \cos t; -r \sin t; 0; 0)$$

$$S'(t) \times S''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin t & r \cos t & v_0 \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot r v_0 \sin t - \mathbf{j} \cdot r v_0 \cos t + \mathbf{k} \cdot r^2 = r(v_0 \sin t; -v_0 \cos t; r)$$

$$\kappa = \frac{|S'(t) \times S''(t)|}{|S'(t)|^3} = \frac{|r(v_0 \sin t; -v_0 \cos t; r)|}{|(-r \sin t; r \cos t; v_0; 0)|^3} = \frac{r\sqrt{v_0^2 + r^2}}{(\sqrt{v_0^2 + r^2})^3} = \frac{r}{v_0^2 + r^2} \Rightarrow R = \frac{v_0^2 + r^2}{r}$$



kde jsme poloměr oskulační kružnice pro odlišení označili  $R$ . Všimněte si, že křivost šroubovice tedy ani poloměr oskulační kružnice nijak nezávisí na parametru  $t$ , křivost šroubovice a poloměr oskulačních kružnic je tedy pro celou šroubovici konstantní. Můžeme se o tom přesvědčit v Rhinoceros pomocí grafu křivosti tak, jak je znázorněno na připojeném obrázku.

Porovnáme-li poloměr oskulační kružnice šroubovice s výsledkem příkladu 2b), zjistíme, že jsme obdrželi poloměr oskulační kružnice elipsy s hlavní poloosou  $\sqrt{v_0^2 + r^2}$  a vedlejší poloosou  $r$ . Tento výsledek využijeme později při konstrukci oskulačních kružnic šroubovice.

## 4. 5 Analytické vyjádření plochy

V tomto textu se budeme zabývat jen analytickými plochami, tj. plochami, v nichž můžeme matematicky popsat vztahy mezi souřadnicemi bodů na ploše. Z matematiky tři způsoby analytického vyjadřování ploch:

**1. Plocha jako graf funkce:** V matematice se seznámíte s pojem funkce dvou reálných proměnných jako se zobrazením  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  je definiční obor funkce. Grafem takové funkce rozumíme množinu

$$G(f) = \{[x; y; z] \in E^3 \mid z = f(x; y)\}. \quad (1)$$

Grafem funkce je velmi často plocha (např. grafy funkcí  $\sqrt{1-x^2-y^2}$ ;  $e^{-x^2-y^2}$ ) či více ploch (např.  $(x+y)^{-1}$ ;  $\ln|x+y-1|$ ). V geometrii se proměnné parametry velmi často značí  $u, v$

**2. Parametrické vyjádření plochy:** Jedná se o zadání plochy pomocí soustavy tří rovnic v nichž je souřadnice každého bodu křivky zapsána jako funkce dvou reálných proměnných (parametrů),

$$\begin{aligned}x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v); [u, v] \in \mathbf{I} \\ z &= \tau(u, v)\end{aligned}\quad (2)$$

kde  $\mathbf{I}$  je souvislá podmnožina  $\mathbb{R}^2$ . Tyto rovnice nazýváme rovnice parametrické. Například soustava

$$\begin{aligned}x &= 2 \cdot \cos u \cos v \\ y &= 2 \cdot \sin u \cos v; [u, v] \in \langle 0; 2\pi \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \\ z &= 2 \cdot \sin v\end{aligned}\quad (3)$$

představuje parametrické rovnice kulové plochy.

Plochu, která je zadána předpisem (1), můžeme v případě potřeby parametrizovat velmi snadno, a to předpisem

$$\begin{aligned}x &= u \\ y &= v \\ z &= f(u, v)\end{aligned}$$

**3. Obecná rovnice plochy:** Upravíme-li soustavu (2) na jedinou rovnici tak, že se v ní nebudou parametry vyskytovat, dostaneme rovnici obecnou. Tomuto postupu říkáme vyloučení parametru. Upravíme-li naopak obecnou rovnici na rovnici o jedné neznámé pomocí substituce tak, že tato rovnice přejde v rovnost, je tato substituce parametrickými rovnicemi téže plochy. Tomuto postupu říkáme parametrizace. Například rovnice  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  je obecná rovnice kulové plochy s parametrickým vyjádřením (3). Parametrizace je většinou dosti obtížná a vyžaduje jistou zručnost a „matematickou předvídavost“. Následující příklad tedy chápeme jako ilustrativní.

**4. Příklad:** Parametrizujme obecnou rovnici

$$\text{a) } x^2 + y^2 - z = 0 \quad \text{b) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{c) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**Pozn.:** rovnice a) je rovnicí eliptického paraboloidu, rovnice b) elipsoidu a rovnice c) jednodílného hyperboloidu. Těmto plochám se budete věnovat také v matematice.

**Řešení: a)** Položme  $x = v \cos u$ ;  $y = v \sin u$ ;  $z = v^2$  a dosadíme do obecné rovnice. Obdržíme:

$$v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u - v^2 = 0$$

což je rovnice, která platí pro každé  $u, v \in \mathbb{R}$ . Rovnice

$$\begin{aligned}x &= v \cos u \\ y &= v \sin u \\ z &= v^2\end{aligned}$$

jsou tedy hledané parametrické rovnice paraboloidu. Vzhledem k periodicitě sinu a kosinu lze definiční obor zúžit na  $u \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ;  $v \in \mathbb{R}$ .

**b)** Položíme-li  $x = a \cdot \cos u \cdot \cos v$ ;  $y = b \cdot \sin u \cdot \cos v$   $z = c \cdot \sin v$  a dosadíme do obecné rovnice, obdržíme

$$\frac{(a \cdot \cos u \cdot \cos v)^2}{a^2} + \frac{(b \cdot \sin u \cdot \cos v)^2}{b^2} + \frac{(c \cdot \sin v)^2}{c^2} = 1$$

$$\cos^2 u \cdot \cos^2 v + \sin^2 u \cdot \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$(\cos^2 u + \sin^2 u) \cdot \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

což je opět rovnice, která platí pro každé  $u, v \in \mathbb{R}$ . Parametrické rovnice elipsoidu tedy jsou

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos u \cdot \cos v \\ y &= b \cdot \sin u \cdot \cos v \\ z &= c \cdot \sin v \end{aligned} \quad (4)$$

Vzhledem k periodicitě sinu a kosinu lze definiční obor opět zúžit, tentokrát na intervaly  $u \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ;  $v \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ .

**c)** Využijeme příkladu 4c kpt. 3. 2 položíme

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos^{-1} v \cos u \\ y &= b \cdot \cos^{-1} v \sin u \\ z &= c \cdot \operatorname{tg} v \end{aligned} \quad u \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \quad (5)$$

Dosazením do obecné rovnice pak skutečně obdržíme

$$\frac{a^2 \cdot \cos^2 u}{a^2 \cos^2 v} + \frac{b^2 \cdot \sin^2 u}{b^2 \cos^2 v} - \frac{c^2 \sin^2 v}{c^2 \cos^2 v} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 v} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 v} - \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{1 - \sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v} = 1$$

Parametrizací téže plochy samozřejmě existuje víc. Dosadíme-li do obecné rovnice jednodílného hyperboloidu např.

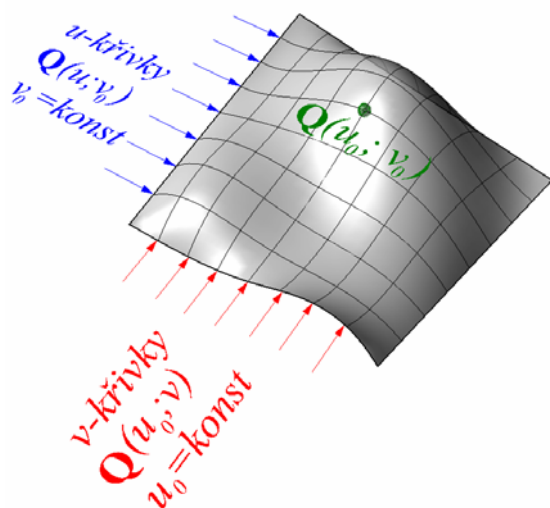
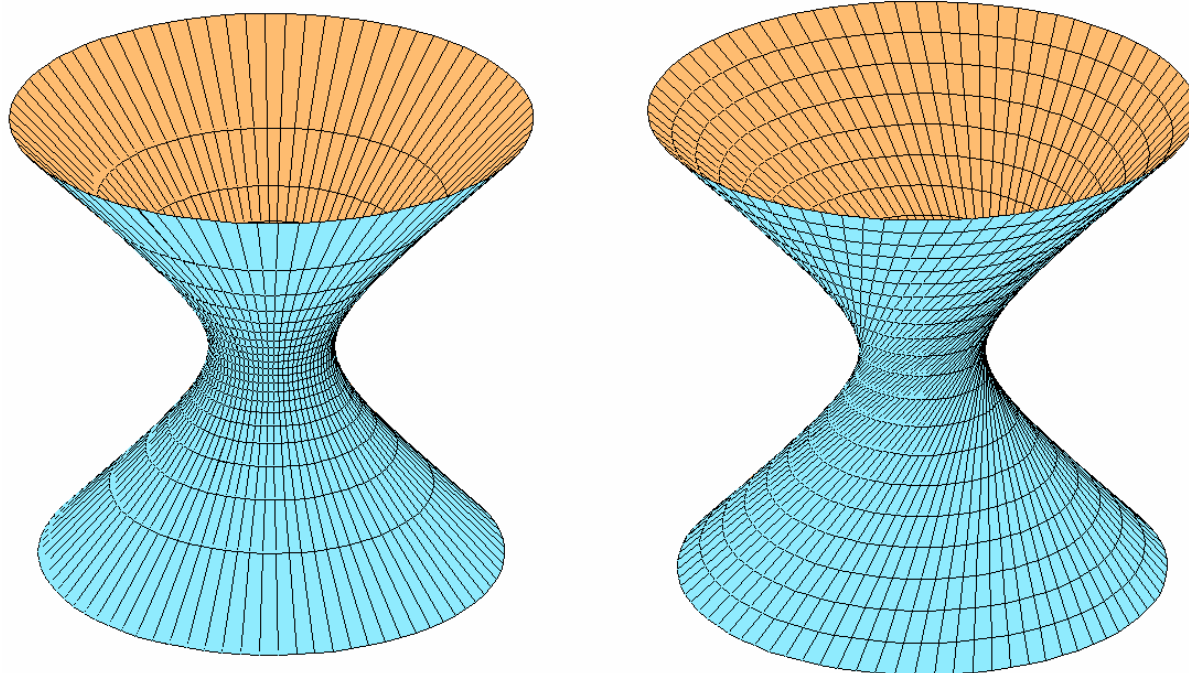
$$\begin{aligned} x &= a \cdot (\cos v - u \sin v) \\ y &= b \cdot (\sin v + u \cos v) \\ z &= c \cdot u \end{aligned} \quad u \in \mathbb{R}; \quad v \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad (6)$$

dostaneme rovněž

$$\frac{a^2 \cdot (\cos v - u \sin v)^2}{a^2} + \frac{b^2 (\sin v + u \cos v)^2}{b^2} - \frac{c^2 u^2}{c^2} =$$

$$= \cos^2 v - 2u \cos v \sin v + u^2 \sin^2 v + \sin^2 v + 2u \sin v \cos v + u^2 \cos^2 v - u^2 = 1$$

takže také rovnice (6) jsou parametrickými rovnicemi našeho hyperboloidu. Jednodílný hyperboloid si můžeme prohlédnout na připojeném obrázku. Vlevo je parametrizace (5), vpravo (6). Tyto obrázky nás přivádějí k dalšímu důležitému pojmu a tím jsou křivky na ploše.



**5. Křivky na ploše:** Křivkou na ploše rozumíme libovolnou křivku, která je podmnožinou uvažované plochy. Velmi důležitými křivkami na plochách vyjádřených parametricky jsou tzv. izoparametrické křivky. **Izoparametrická křivka** je křivka, kterou obdržíme z parametrického vyjádření plochy tím, že parametr  $v$  resp.  $u$  považujeme za konstantu, tj. že položíme  $v = v_0$  resp.  $u = u_0$ . Je-li  $v = v_0$ , hovoříme o  $u$ -křivce, je-li  $u = u_0$ , hovoříme o  $v$ -křivce. Vyjádření izokřivek závisí na parametrizaci plochy.  $u$ -křivkami jednodílného hyperboloidu parametrizovaného rovnicemi (5) jsou křivky

$$\begin{aligned} x &= (a \cdot \cos^{-1} v_0) \cos u = c_1 \cos u \\ y &= (b \cdot \cos^{-1} v_0) \sin u = c_2 \sin u; & u &\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); & v &\in \langle 0; 2\pi \rangle \\ z &= c \cdot \operatorname{tg} v_0 \end{aligned}$$

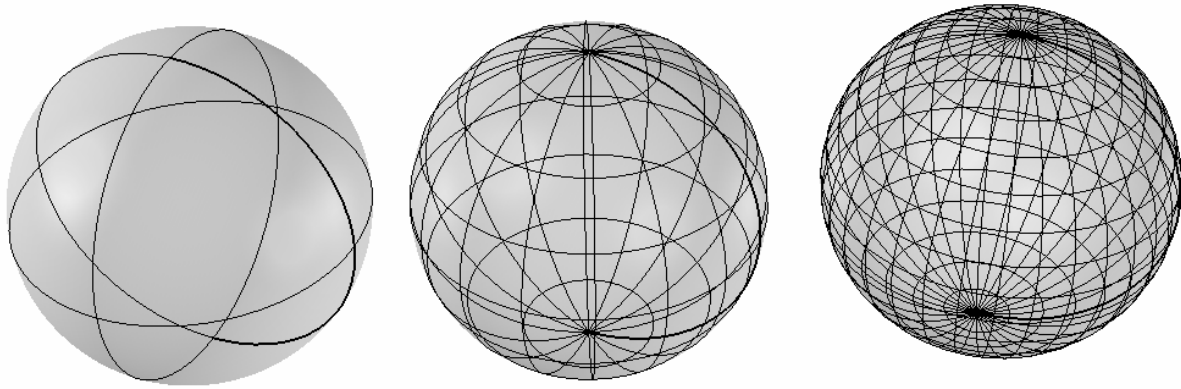
tedy elipsy,  $v$ -křivkami pak

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos^{-1} v \cos u_0 = (a \cdot \cos u_0) \cdot \cos^{-1} v = c_1 \cdot \cos^{-1} v \\ y &= b \cdot \cos^{-1} v \sin u_0 = (b \cdot \sin u_0) \cdot \cos^{-1} v = c_2 \cdot \cos^{-1} v & u &\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); & v &\in \langle 0; 2\pi \rangle \\ z &= c \cdot \operatorname{tg} v \end{aligned}$$

tedy hyperboly. Při parametrizaci (6) jsou  $u$ -křivkami přímky a  $v$ -křivkami elipsy.

Na připojeném obrázku vidíme kulovou plochu sestavenou v systému Rhinoceros.  $u$ -křivkami i  $v$ -křivkami jsou kružnice. Počet zobrazených  $u$ -křivek a  $v$ -křivek označené plochy určujeme v okně **Vlastnosti/objekt/hustota izočar**.





## 4. 6 Tečná rovina a normála plochy

K analytickému popisu ploch se místo parametrických rovnic opět často používají bodové funkce, tentokrát funkce dvou proměnných.

**1. Bodová funkce dvou proměnných:** Bodovou funkcí dvou reálných proměnných v euklidovském (projektivním) prostoru rozumíme zobrazení  $\mathbf{f} : D \rightarrow E^3$  ( $\mathbf{f} : D \rightarrow {}_{\infty}E^3$ ), kde  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  je definiční obor funkce. Proměnné  $u, v$  této funkce nazýváme parametry. Hodnotou bodové funkce pro  $[u; v] \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  je bod

$$Q(u; v) = [f_1(u; v); f_2(u; v); f_3(u; v)] \in E^3$$

$$\text{resp.} \quad Q(u; v) = (k \cdot f_1(u; v); k \cdot f_2(u; v); k \cdot f_3(u; v); k \cdot \omega) \in {}_{\infty}E^3 \quad (2)$$

Každá uspořádaná dvojice  $[u; v]$  hodnot parametrů jednoznačně určuje bod  $Q(u; v)$ . Vlastní bod  $Q(u; v) \in {}_{\infty}E^3$  budeme většinou reprezentovat euklidovským reprezentantem  $Q(u; v)$ , takže místo (2) budeme psát

$$Q(u; v) = (f_1(u; v); f_2(u; v); f_3(u; v); 1)$$

Obor hodnot bodové funkce (tj. množinu bodů, které jsou obrazem nějakého  $[u; v] \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ) budeme nazývat grafem bodové funkce

Lze ukázat, že pokud je definičním oborem souvislá podmnožina  $\mathbb{R}^2$ ) a všechny funkce  $f_1(u; v); f_2(u; v); f_3(u; v)$  - tzv. souřadnicové funkce - jsou spojité, pak grafem bodové funkce je plocha v prostoru  ${}_{\infty}E^3$ . Říkáme pak, že plocha je určena bodovou funkcí.

**2. Příklad:** Parametrickými rovnicemi

$$x = 2 \cdot \cos u \cdot \cos v$$

$$y = 2 \cdot \sin u \cdot \cos v; \quad u \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad v \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$z = 2 \cdot \sin v$$

je určena kulová plocha. Přepíšeme-li je do tvaru

$$K(u; v) = (2 \cos u \cos v; 2 \sin u \cos v; 2 \sin v; 1),$$

dostáváme bodovou funkci pro kulovou plochu.

Z čistě formálního pohledu tedy bodovou funkci dostaneme z parametrických rovnic plochy jejich „přepisem“ do jednoho řádku. To opět často usnadní vyjadřování.

Nyní budeme směřovat k pojmu tečna plochy, tečná rovina a normála. K tomu je třeba poněkud zobecnit pojem derivace.

**3. Derivace funkce dvou proměnných:** počítáme analogicky jako derivaci funkce jedné proměnné s tím, že podle jedné proměnné derivujeme, druhou považujeme za konstantu. Hovoříme pak o parciální derivaci funkce  $f(u; v)$  podle proměnné  $u$  (proměnná  $v$  je zde považována za konstantu), značíme  $f'_u(u; v)$  a o parciální derivaci funkce  $f(u; v)$  podle proměnné  $v$  (proměnná  $u$  je zde považována za konstantu), značíme  $f'_v(u; v)$ . Bodové funkce ploch pak (podobně jako bodové funkce křivek) derivujeme po složkách.

**4. Příklad:** Určeme parciální derivace bodových funkcí

a)  $K(u; v) = (v \cos u; v \sin u; 2v; 1)$

b)  $L(u; v) = (2 \cos u \cos v; 2 \sin u \cos v; 2 \sin v; 1)$

**Řešení:**

a)  $K'_u(u; v) = (-v \sin u; v \cos u; 0; 0); \quad K'_v(u; v) = (\cos u; \sin u; 2; 0)$

b)  $L'_u(u; v) = (-2 \sin u \cos v; 2 \cos u \cos v; 0; 0)$

$L'_v(u; v) = (-2 \cos u \sin v; -2 \sin u \sin v; 2 \cos v; 0)$

**5. Tečna a tečná rovina plochy, regulární bod, regulární plocha:** Podobně jako u křivek i u ploch technická praxe většinou požaduje „hladkost“, tj. v případě ploch alespoň diferencovatelnost souřadnicových funkcí. V případě ploch tyto požadavky „zakazují“ na ploše „hroty“ (vrcholy) a hrany. Derivace  $Q'_u(u; v)$  určuje směrový vektor tečny  $v$ -křivky  $Q(u_0; v)$ , derivace  $Q'_v(u; v)$  určuje směrový vektor tečny  $u$ -křivky  $Q(u; v_0)$ . Bod  $(u_0; v_0)$ , ve kterém oba tyto vektory existují a jsou lineárně nezávislé, nazýváme **regulárním bodem**. Bod, který není regulární, nazýváme **singulární**. Plochu, jejíž všechny body jsou regulární, nazýváme regulární plochou.

Tečnu  $u$ -křivky resp  $v$ -křivky v regulárním bodě  $T_0 = Q(u_0; v_0)$  lze psát ve tvaru

$$T_u(u) \equiv Q(u_0; v_0) + Q'_u(u_0; v_0) \cdot u \quad \text{resp.} \quad T_v(v) \equiv Q(u_0; v_0) + Q'_v(u_0; v_0) \cdot v \quad u, v \in \mathbb{R}$$

a díky předpokládané lineární nezávislosti tečných vektorů je rovnicí

$$\tau \equiv X = Q(u_0; v_0) + Q'_u(u_0; v_0) \cdot u + Q'_v(u_0; v_0) \cdot v; \quad u, v \in \mathbb{R}$$

určena rovina, kterou nazýváme **tečnou rovinou plochy** v bodě  $T_0 = Q(u_0; v_0)$ . Vektorový součin

$$N(u_0; v_0) = Q'_u(u_0; v_0) \times Q'_v(u_0; v_0)$$

je, jak známo, vektor kolmý na tečné vektory  $Q'_u(u_0; v_0)$   $Q'_v(u_0; v_0)$ , je to tedy normálový vektor roviny  $\tau$ , která se plochy dotýká v bodě  $(u_0; v_0)$ . Tento vektor nazýváme **normálový vektor plochy** v bodě  $(u_0; v_0)$ . Normála plochy v bodě  $T_0 = Q(u_0; v_0)$  je pak tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}(u_0; v_0) + \mathbf{N}(u_0; v_0) \cdot t$$

**6. Příklad:** Určeme tečné roviny a normály ploch  $\mathbf{K}(u; v)$ ;  $\mathbf{L}(u; v)$  z příkladu 4, a to v bodě  $\mathbf{Q}(0; 0)$ .

**Řešení:** a) Pro  $\mathbf{Q}(0; 0)$  je (viz př. 4 a)

$$\mathbf{K}_u'(0; 0) = (-0 \cdot \sin 0; 0 \cdot \cos 0; 0; 0) = (0; 0; 0; 0); \quad \mathbf{K}_v'(0; 0) = (\cos 0; \sin 0; 2; 0) = (1; 0; 2; 0)$$

Protože  $\mathbf{K}_u'(0; 0) = 0 \cdot \mathbf{K}_v'(0; 0)$ , jsou  $\mathbf{K}_u'$ ;  $\mathbf{K}_v'$  lineárně závislé, bod  $\mathbf{Q}(0; 0)$  plochy  $\mathbf{K}$  tedy není regulární. Plocha zde nemá tečnou rovinu, nemůže zde tedy mít ani normálu.

b) Pro  $\mathbf{Q}(0; 0)$  je (viz př. 4 b)

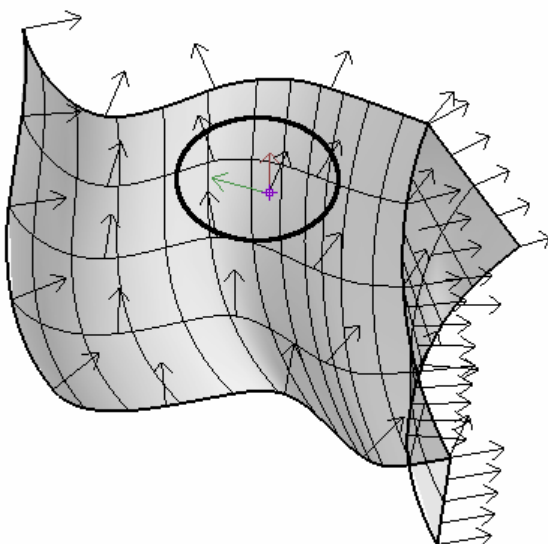
$$\mathbf{L}_u'(0; 0) = (-2 \sin 0 \cos 0; 2 \cos 0 \cos 0; 0; 0) = (0; 2; 0; 0)$$

$$\mathbf{L}_v'(0; 0) = (-2 \cos 0 \sin 0; -2 \sin 0 \sin 0; 2 \cos 0; 0) = (0; 0; 2; 0)$$

Tečná rovina je tedy

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}(0; 0) + \mathbf{K}'_u(0; 0)u + \mathbf{K}'_v(0; 0)v = (2; 0; 0; 1) + (0; 2; 0; 0)u + (0; 0; 2; 0)v = (2; 2u; 2v; 1)$$

a směrový vektor normály:



$$\mathbf{N}(0; 0) = \mathbf{Q}'_u(0; 0) \times \mathbf{Q}'_v(0; 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\mathbf{i} = (4; 0; 0; 0)$$

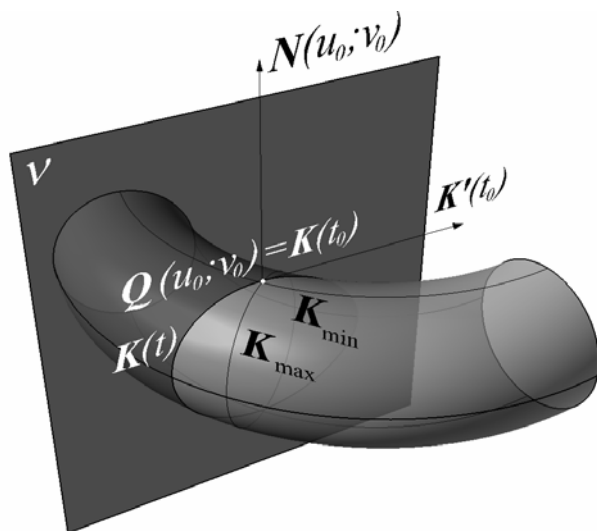
a normála tedy je

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{Q}(u_0; v_0) + \mathbf{N}(u_0; v_0) \cdot t = \\ &= (2; 0; 0; 1) + (4; 0; 0; 0)t = (2 + 4t; 0; 0; 1) \end{aligned}$$

V systému **Rhinoceros** je zobrazení normál v jednotlivých bodech plochy přístupné z menu **Analýza/Směr**. Na aktuální pozici kurzoru se rovněž zobrazují tečné vektory příslušných izochar.

## 4. 7 Křivosti plochy

**1. Křivosti na ploše:** Analytický popis křivosti ploch přesahuje rámec tohoto textu, proto jen objasníme jejich geometrický význam. Normálou  $\mathbf{N}(u_0; v_0)$  plochy  $\mathbf{Q}(u; v)$  v jejím regulárním bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0)$  proložíme libovolnou rovinu  $\nu$ . Ta protne plochu v křivce  $\mathbf{K}(t)$ . Označme  $\mathbf{K}'(t_0)$  směrový vektor tečny křivky  $\mathbf{K}(t)$  v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0) = \mathbf{K}(t_0)$ . Křivost  $\kappa$  křivky  $\mathbf{K}(t)$  v tomto bodě nazýváme **normálovou křivostí plochy**  $\mathbf{Q}(u; v)$  v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0)$  a směru  $\mathbf{K}'(t_0)$ . Normálová křivost závisí obecně na zvoleném směru. Pro každý regulární bod plochy existuje směr  $\mathbf{K}'_{\min}$ , ve kterém je normálová křivost  $\kappa_{\min}$  nejmenší, a směr  $\mathbf{K}'_{\max}$ , ve kterém je křivost  $\kappa_{\max}$  naopak největší. Tyto směry nazýváme **hlavní směry** a příslušné



křivosti **hlavní křivosti** plochy v bodě  $Q(u_0; v_0)$ . Na připojeném obrázku jsou křivky s minimální resp. maximální křivostí v bodě  $Q(u_0; v_0)$  označeny  $K_{\min}$  resp.  $K_{\max}$ .

Dále je definována **střední křivost** jako aritmetický průměr hlavních křivostí, tj.  $\bar{\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_{\max} + \kappa_{\min})$  a **křivost Gaussova**, jako součin hlavních křivostí, tj.  $\kappa_G = \kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min}$ .

## 2. Eliptický, parabolický a hyperbolický bod: Bod $P$ plochy nazýváme

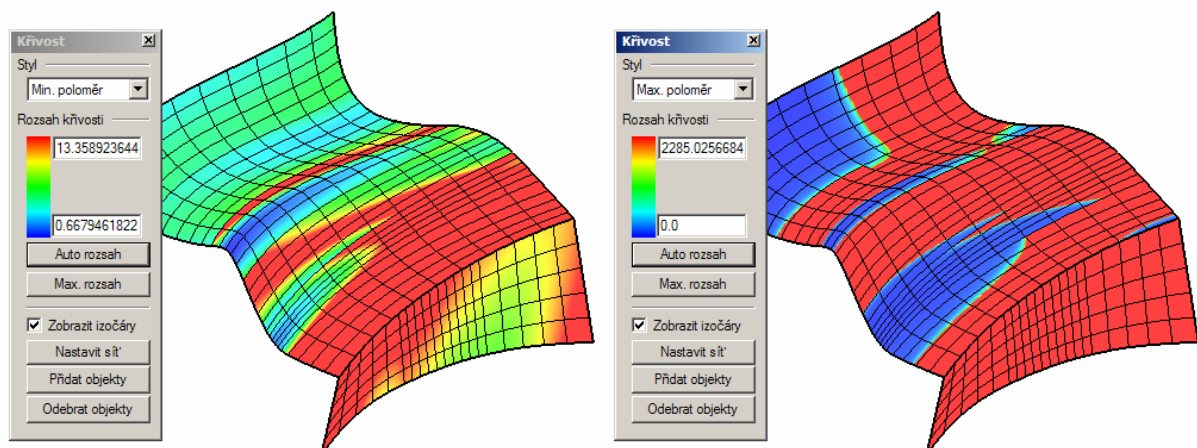
a) eliptický      b) parabolický      c) hyperbolický

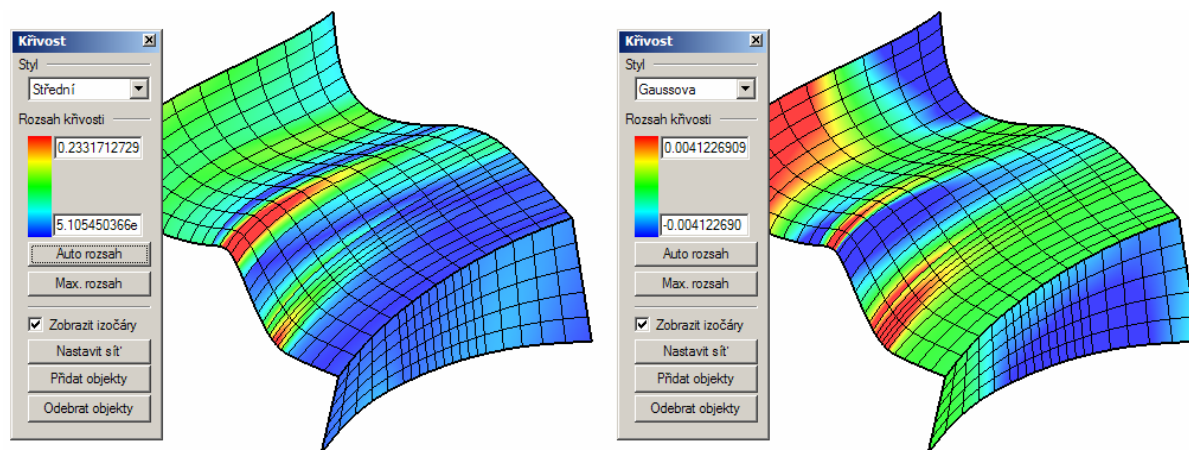
právě tehdy, když existuje jeho okolí  $O_\varepsilon(P)$  tak, že tečná rovina  $\tau$  v bodě  $P$

- a) v tomto okolí neprochází již žádným dalším bodem plochy
- b) v tomto okolí má s plochou společnou křivku
- c) v tomto okolí má s plochou společné dvě různé křivky, které se protínají v bodě  $P$

Na připojeném obrázku je bod 1 eliptický, bod 2 parabolický a bod 3 hyperbolický. Pokud na ploše leží body eliptické i hyperbolické, pak tam leží i body parabolické.

**3. Křivosti v Rhinoceros:** Analýza křivosti plochy je v systému **Rhinoceros** přístupná z menu **Analýza/Plocha/Analýza křivosti**. Křivost plochy v jednotlivých bodech je vizualizována barevnou škálou. Křivost, kterou chceme vizualizovat, vybíráme v roletě **Styl**. Volba **Min. poloměr** resp. **Max poloměr** vizualizuje velikost poloměrů oskulačních kružnic v hlavních směrech, volba **Střední** resp. **Gaussova** pak střední resp. Gaussovu křivost. Zde je třeba si uvědomit, že poloměry oskulačních kružnic jsou nepřímo úměrné křivostem, tj. čím větší poloměr, tím menší křivost a naopak.

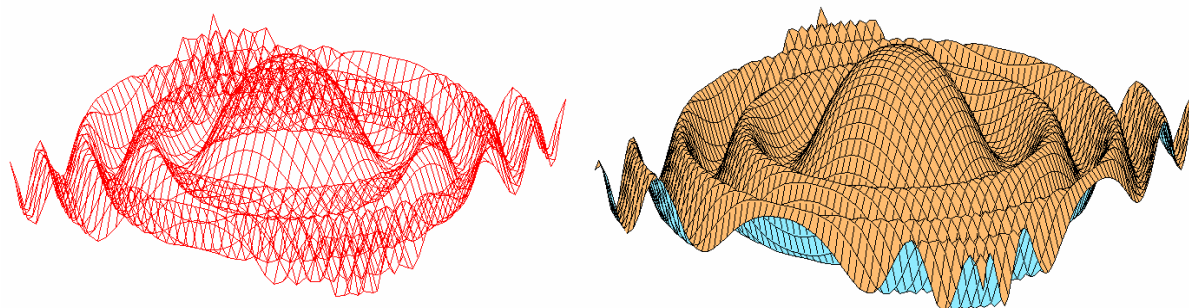




## 4. 8 Grafické algoritmy konstrukce ploch

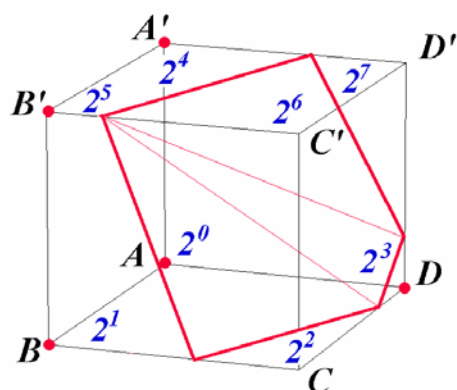
**1. Konstrukce pomocí křivek:** Nejjednodušší algoritmy sestavují plochy  $z = f(x, y)$  a plochy zadané parametrickými rovnicemi resp. bodovou funkcí  $Q(u; v) = [f_1(u; v); f_2(u; v); f_3(u; v)] \in E^3$  pomocí dvou osnov křivek. V prvním případě se jedná o prostorové křivky  $z = f(c_1; y)$ ;  $z = f(x; c_2)$ , které představují řezy plochy  $z = f(x; y)$  rovinami  $x = c_1$ ; resp.  $y = c_2$ . Ve druhém případě se jedná o křivky  $Q(u_0; v)$ ;  $Q(u; v_0)$ , což jsou  $u$ -křivky resp.  $v$ -křivky plochy  $Q(u; v)$ . Tyto algoritmy jsou sice jednoduché, většinou však neposkytují příliš dobré výstupy. Neposkytují rovněž návod na sestavování ploch zadaných obecnými rovnicemi  $f(x; y; z) = 0$ .

**2. Řešení viditelnosti:** Podstatného zlepšení vzhledu sestavovaných ploch lze docílit řešením viditelnosti. Algoritmů řešících viditelnost je celá řada. Jeden z nejrozšířenějších je tzv. malířův algoritmus (Painter's algorithm, Priority list). Princip spočívá v rozdělení plochy na malé segmenty a v jejich přímém vykreslování na výstupní zařízení, a to v pořadí od nejvzdálenějších po nejbližší vzhledem k pozorovateli. Bližší plochy překryjí vzdálenější a viditelnost je tak vyřešena přirozeným způsobem. Na připojeném obrázku vidíme t graf funkce  $z = e^{-x^2-y^2} + 0,4 \cdot \cos 2(x^2 + y^2)$  sestrojený pomocí křivek (vlevo) a s viditelností (vpravo).



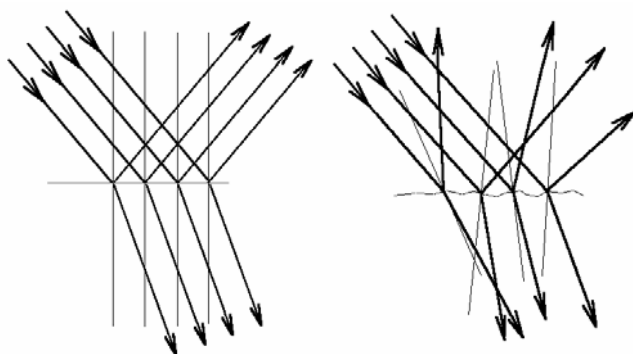
**3. Plochy zadané rovnicí  $f(x; y; z) = 0$ :** Konstrukci plochy po malých segmentech s vyřešenou viditelností je možno použít již i k sestavování ploch daných obecnou rovnicí. Základní princip je analogický dvojrozměrnému případu, tj. vykreslování křivek tvaru  $f(x; y) = 0$  pomocí pixelů (viz kapitolu 9. 2.). Konstrukce v prostorovém případě spočívá

v rozdělení prostoru na krychlové elementy (voxely) a testování znamének funkce



$w = f(x; y; z)$  v jejích vrcholech. Jsou-li všechna znaménka stejná, plocha krychli neprotíná. Jestliže se liší, plocha krychli protíná a příslušný(é) segment(y) je třeba sestrojit. Na rozdíl od dvojrozměrného případu však nesestrojujeme celou krychli, ale je třeba rozlišit celkem 127 případů, jak může plocha krychli protínat. Na připojeném obrázku je znázorněn případ, kdy byla záporná znaménka zjištěna ve vrcholech  $C; C'; D'$  a kladná ve zbývajících (popř. naopak). V těchto případech je třeba sestrojit celkem tři trojúhelníkové segmenty.

**4. Vlastní stín:** Dalším krokem ke zlepšení vzhledu zobrazovaného objektu je stínování. Reálné předměty jsou vyrobeny z různého materiálu a jejich povrchy mají různý vzhled. Hovoříme-li o vzhledu povrchu, říkáme, že je červený, lesklý, drsný, průhledný atd. Tyto vlastnosti se vztahují vesměs k optickým vlastnostem povrchu, popř. celého tělesa.

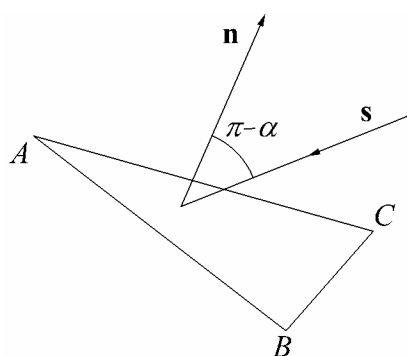


Dopadne-li světlo na povrch tělesa, je částečně pohlceno a částečně odraženo. Předpokládejme nejjednodušší případ, kdy je těleso přímo osvětleno jedním plošným zdrojem bílého světla.

Pokud by reálné rovinné optické rozhraní mělo mikroskopicky dokonale hladký (zrcadlový) povrch, pak by optický odraz a lom zachovával rovnoběžnost. Jinými slovy - pokud by na takové rozhraní dopadal rovnoběžný svazek paprsků, pak

by odražený i lomený svazek byl opět rovnoběžný (viz připojený obrázek vlevo).

Dokonale hladký povrch však žádný reálný přemět nemá. Není-li povrch dokonale hladký, pak normály tohoto povrchu mají různý směr, různé směry mají tedy i odražené a lomené paprsky. Dochází k tzv. difuzi tak, jak naznačuje situace vpravo. Vlastnosti odraženého i lomeného svazku lze popsat jen velmi přibližně. Funkci, která se tento charakter snaží popsat, nazýváme odrazovou resp. lomovou funkcí. Aplikaci této funkce v konkrétní situaci pak nazýváme osvětlovacím modelem.

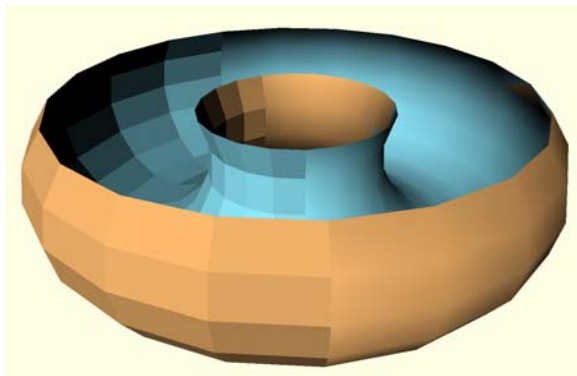


složkami

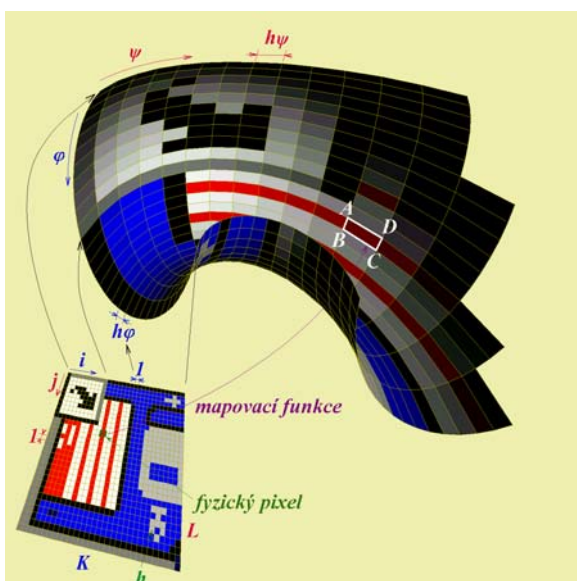
V nejjednodušším případě, kdy povrch pokládáme za dokonale difuzní, je světlo rozptylováno rovnoměrně do všech směrů nezávisle na směru jeho dopadu. Intenzita světla, kterou z daného segmentu vnímá pozorovatel, je tak přímo úměrná intenzitě, která na segment dopadá. Dopadající intenzita je úměrná průmětu segmentu do roviny kolmé ke směru světla, je tedy závislá na kosinu úhlu  $\alpha$ , který svírá normála  $\mathbf{n}$  segmentu  $ABC$  se směrem  $\mathbf{s}$  dopadajícího světla. Jsou-li tedy  $R; G; B$  barevné složky plně osvětleného segmentu, je třeba segment obarvit



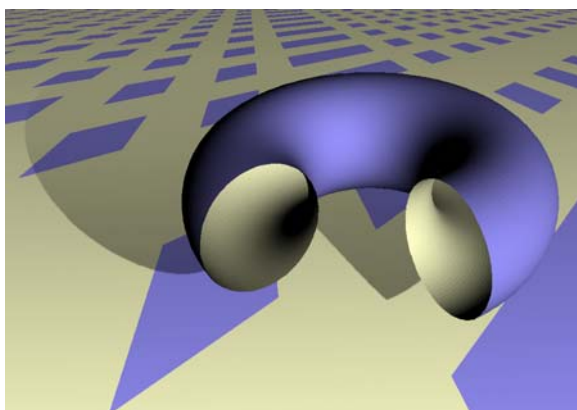
$$(R; G; B) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -(R; G; B) \cdot \cos \alpha, \text{ kde } \cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{s}\|}; \mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$



Jestliže je rovinnými segmenty plátována obecná plocha a celý segment je obarven toutéž barvou (tzv. metoda konstantního stínování), pak tato metoda zdůrazňuje „hrany“, které plocha ve skutečnosti nemá (viz připojený obrázek vlevo). Tomu se dá předejít buď interpolací normálových vektorů (Phongovo stínování) nebo interpolací barvy (Gouraudovo stínování). Tyto metody do značné míry nežádoucí hrany zhlazují - viz obrázek vpravo.



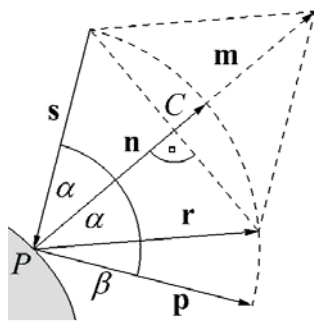
**5. Nanášení textur:** Povrch reálných předmětů má málokdy konstantní barvu. Různobarevnost plochy vyjádříme nejlépe nanесním textury. Texturou je obraz, skládající se z pixelů. Plocha musí být rozdělena na prostorové segmenty, které odpovídají jednotlivým pixelům textury. Barvu každého pixelu textury pak přeneseme na sestrojovanou plochu pomocí tzv. mapovací funkce tak, jak naznačuje připojený obrázek.



**6. Vržený stín:** Kromě vlastního stínu, který vzniká v důsledku různého úhlu normál segmentů plochy a dopadajícího světla, existuje stín vržený. Nachází-li se těleso mezi zdrojem světla a zbytkem scény, pak tuto část scény zastíní. Řešení vržených stínů může být dosti komplikované (těleso může např. zastíňovat i část sebe sama). Uvedme nejjednodušší případ, kdy těleso osvětlené jedním bodovým zdrojem vrhá stín na vodorovné pozadí. V tom případě získáme vržený stín jako rovnoběžný popř. středový průmět (v případě plošného resp. bodového světelného zdroje) zobrazovaného objektu na tuto podložku. Průmět (stín) pak sestrojíme přiměřeným ztmavením příslušných bodů

podložky. Podobně jako na připojeném obrázku lze započítat např. úbytek světla s rostoucí vzdáleností apod.

**7. Phongův osvětlovací model:** Nejjednodušší osvětlovací model, který bere v úvahu zrcadlovou i difuzní složku světla, navrhl v r. 1977 **Bui-Tuong Phong**. Jedná se o model empirický, tj. model, který nepopisuje složité chování světla na nerovném povrchu fyzikálně, ale napodobuje ho jednoduchými funkcemi na základě pozorování. K výpočtu osvětlení bodu  $P$  plochy na připojeném obrázku budeme potřebovat vektory  $\mathbf{s}$  (směr dopadajícího světla),  $\mathbf{n}$  (normálu),  $\mathbf{p}$  (směr pozorovatele), které v okamžiku výpočtu modelu známe, a  $\mathbf{r}$  (směr



odraženého paprsku), který spočítáme pomocí vektorů  $\mathbf{s}; \mathbf{n}$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že vektory  $\mathbf{s}; \mathbf{n}; \mathbf{r}; \mathbf{p}$  jsou normalizované, tj. že jejich velikost je rovna jedné. Za tohoto předpokladu je  $|PC| = \cos \alpha$  a  $\|\mathbf{m}\| = 2|PC| = 2 \cos \alpha$ . Protože  $\mathbf{m} = \|\mathbf{m}\| \cdot \mathbf{n}$ , dostáváme po dosazení z předchozího vztahu  $\mathbf{m} = (2 \cos \alpha) \cdot \mathbf{n}$ . Protože však  $\mathbf{m} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$ , je  $\mathbf{r} - \mathbf{s} = (2 \cos \alpha) \cdot \mathbf{n}$ , odkud dostáváme  $\mathbf{r} = (2 \cos \alpha) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{s}$ . Konečně je  $\cos \alpha = -(\mathbf{s}; \mathbf{n})$ ,

takže směr odraženého paprsku je  $\mathbf{r} = \mathbf{s} - 2 \cdot (\mathbf{s}; \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ . Celkovou intenzitu  $I$  osvětlení bodu  $P$  pak spočítáme jako součet

$$I = I_A + \Sigma(I_M + I_D)$$

kde  $I_A$  je intenzita rozptýleného (ambientního) světla,  $I_M$  je intenzita zrcadlové a  $I_D$  difuzní složky světla. Rozptýlené světlo se počítá jen jednou, zrcadlovou a difuzní složku je třeba případně sečíst přes více světelných zdrojů. Pro danou plochu je třeba stanovit koeficienty zrcadlového a difuzního odrazu  $c_M; c_D$ , podle toho, nakolik má být plocha „zrcadlová“ a nakolik „matná“, přičemž by mělo platit  $c_M + c_D = 1$ . Intenzita příspěvku každého zdroje se pak stanoví jako

$$I_M + I_D = I_s \left[ c_M \cdot (\mathbf{r}; \mathbf{p})^h + c_D \cdot (\mathbf{s}; \mathbf{n}) \right]$$

kde  $I_s$  je uživatelem definovaná intenzita zdroje a  $h$  je tzv. ostrost zrcadlového odrazu - další empirický parametr, který definuje „směrovost“ odraženého světla.

**8. Sledování paprsku:** Všechny výše uvedené metody předpokládají, že zobrazované objekty se neovlivňují. V reálném světě tak tomu však není. Metoda sledování paprsku patří mezi tzv. globální metody, tj. metody, které se snaží postihnout světelné jevy komplexně. Bodem, ve kterém se nachází pozorovatel, a každým pixelem výstupního okna je určen světelný paprsek, který pošleme do scény a sledujeme rekurzivní procedurou. Jestliže nedopadne na žádný objekt ve scéně, je pixelu přiřazena barva pozadí a zpracovává se další bod. Při dopadu na objekt se v bodě dopadu testuje, zda je bod přímo osvětlen některými světelnými zdroji. Pokud ano, přičteme jejich příspěvky dle použitého osvětlovacího modelu a vyšleme odražený a popř. i lomený paprsek, který necháme rekurzivně zpracovávat toutéž procedurou. Algoritmus pro daný pixel končí v okamžiku, kdy všechny sledované paprsky opustily scénu, anebo bylo dosaženo předem stanovené úrovně rekurze.

