5 Kuželosečky

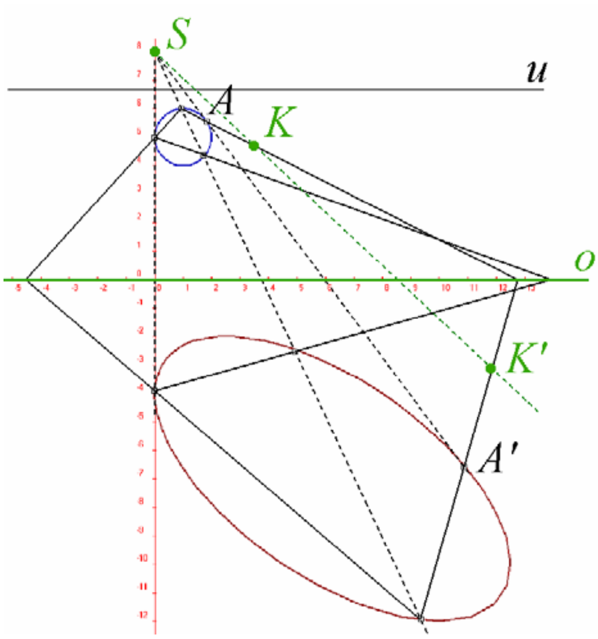
S kuželosečkami jsme se seznámili již na střední škole. Těchto středoškolských znalostí jsme již využili i v několika příkladech v předchozím textu. V této kapitole své znalosti prohloubíme a zobecníme.

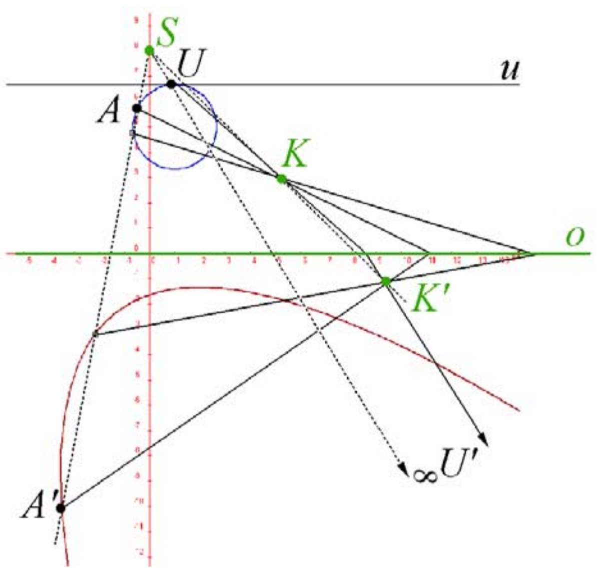
5. 1 Kružnice ve středové kolineaci

V úvodu této kapitoly připomeňme příklad 11 a 12 kpt 3. 3, kde jsme zobrazovali pravidelný n-úhelník ve středové kolineaci v rovině. Pro $n \to \infty$ přejde zřejmě n-úhelník v kružnici a jeho obrazy ve známé kuželosečky:

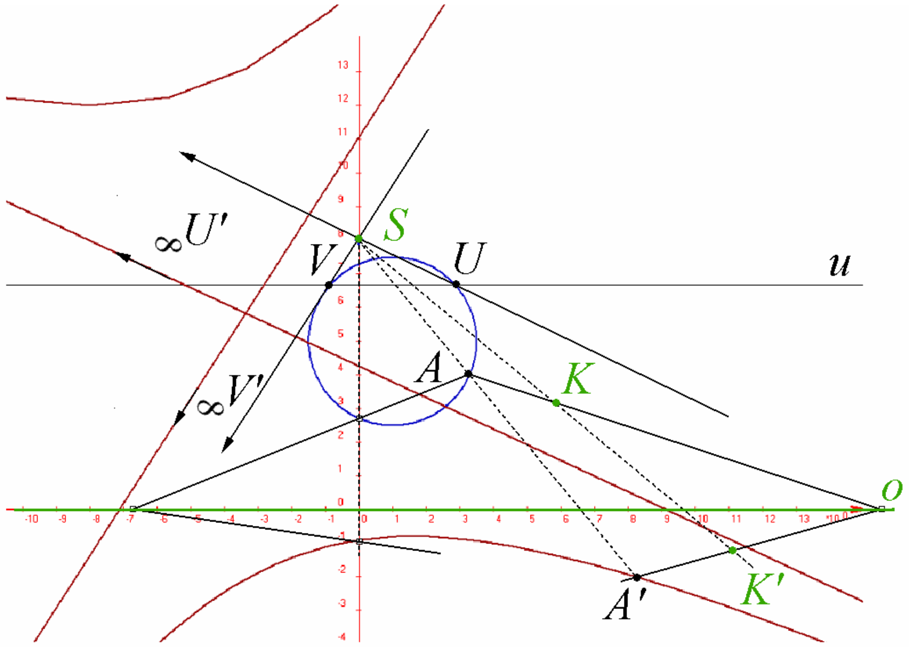
Ve středové kolineaci určené středem S, osou o a dvojicí odpovídajících si bodů K, K' je vyznačena úběžnice a zadána kružnice, která nemá s úběžnicí žádný společný bod. Obraz kružnice ve středové kolineaci lze sestrojit bodově – je možno sestrojit obrazy libovolného počtu bodů tak, jak je naznačeno na připojeném obrázku. Je zřejmé, že obrazem kružnice bude křivka, jejíž všechny body budou vlastní - **elipsa.**

Ve stejně určené kolineaci sestrojme obraz kružnice, která se dotýká úběžnice v bodě U. Obrazem bude opět křivka, kterou můžeme opět sestrojit bodově (zcela analogicky jako v předchozím případě). Protože však bod U leží na úběžnici, bude jeho obraz U' nevlastní (podrobně je tedy označen $_{\infty}U'$). Obraz kružnice, která se dotýká úběžnice, je křivka, která má jeden nevlastní bod - **parabola.**





Ve stejně určené kolineaci sestrojme obraz kružnice, která se protíná úběžnici v bodech $U;V$. Jejím obrazem je množina bodů, která je ve smyslu naší definice z odst 11 kapitoly 3.1 v euklidovské rovině dvojicí křivek. V projektivním prostoru je to však jedna křivka, která prochází dvěma nevlastními body. Celý obraz kružnice můžeme opět sestrojit bodově tak, jak je naznačeno na obrázku. Obraz kružnice, která se protíná úběžnici, je křivka, která má dva nevlastní bod – je to tedy **hyperbola.** Její dvě euklidovské části nazýváme větve.



1. Kuželosečka (projektivní definice): Obrazem kružnice ve středové kolineaci v rovině je křivka zvaná **kuželosečka.** Podle počtu nevlastních bodů to může být:

- **a) elipsa** (žádný nevlastní bod)
- **b) parabola** (jeden nevlastní bod)
- **c) hyperbola** (dva nevlastní body)

Všimněte si, že k definici elipsy, paraboly ani hyperboly jsme nepotřebovali pojem ohnisko, ani součty resp. rozdíly vzdáleností. Připomeňme i tyto známé (ohniskové) definice:

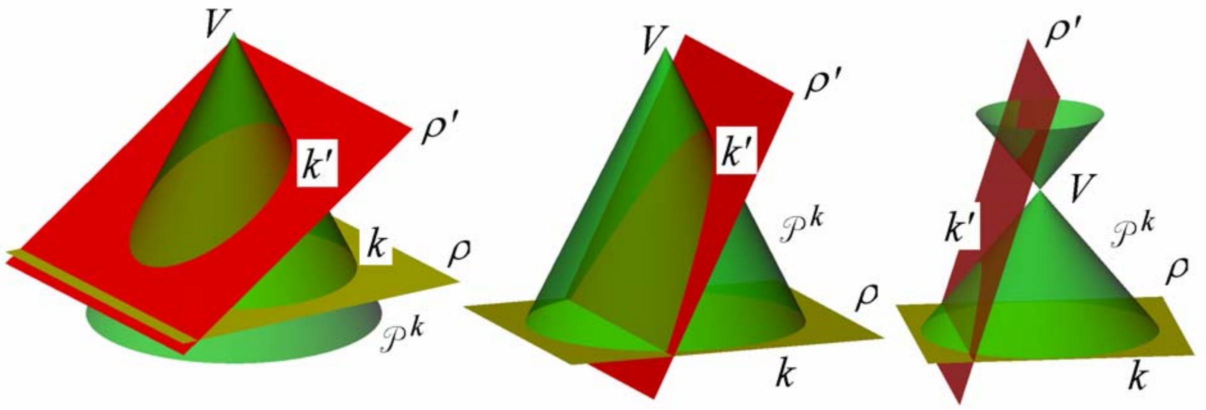
2. Elipsa: je množina všech bodů v rovině, které mají od daných dvou různých bodů $E;F$ (ohnisek) stálý součet vzdáleností

3. Parabola: je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od dané přímky d (řídicí přímky) je rovna vzdálenosti od daného bodu F (ohniska).

4. Hyperbola: je množina všech bodů v rovině, které mají od daných dvou různých bodů $E;F$ (ohnisek) stálý rozdíl vzdáleností

Souhrnný název kuželosečky je dán skutečností, že tyto křivky lze obdržet jako řez rotační kuželové plochy rovinou. I na tuto situaci se ovšem můžeme dívat jako na zobrazování kružnice ve středové kolineaci, tentokrát ve středové kolineaci mezi rovinami.

Uvažujme středovou kolineaci mezi rovinami $\rho;\rho'$ se středem v bodě V. V této středové kolineaci zobrazme kružnici $k(S;r)\subset\rho$ takovou, že $SV\perp\rho$. Obrazem této kružnice bude křivka $k'\subset\rho'$. Na připojených obrázcích je nejdříve znázorněna situace, kdy bod V je vlastní. Promítacím útvarem $\mathscr{P}^k$ je rotační kuželová plocha, kterou rovina ρ' řeže v kuželosečce k'. Počet nevlastních bodů kuželosečky k' je dán počtem promítacích přímek, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ' tak, jak ilustruje připojený obrázek:

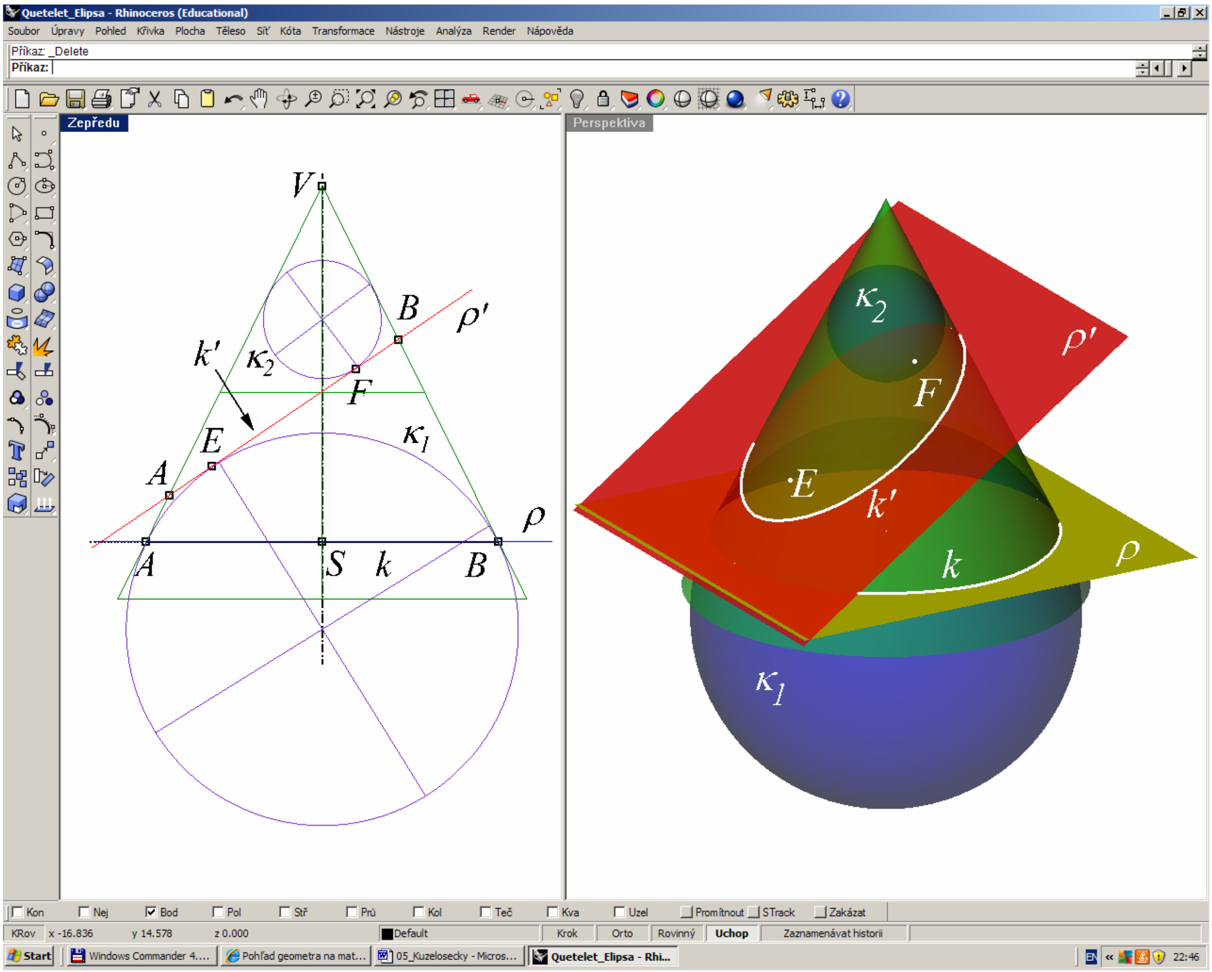


V případě, že bod V je nevlastní, je promítacím útvarem $\mathcal{P}^k$ válcová plocha a průmětem kružnice (řezem rotační válcové plochy) je pouze elipsa.

Rovinnými řezy na kuželové a válcové ploše se nezávisle na sobě zabývali **Lambert Adolphe Jacques Quételet** (1794 - 1847) a **Germinal Pierre Dandelin** (1796 - 1874). Věta, která dnes nese jejich jméno, uvádí do souvislosti projektivní a ohniskové definice:

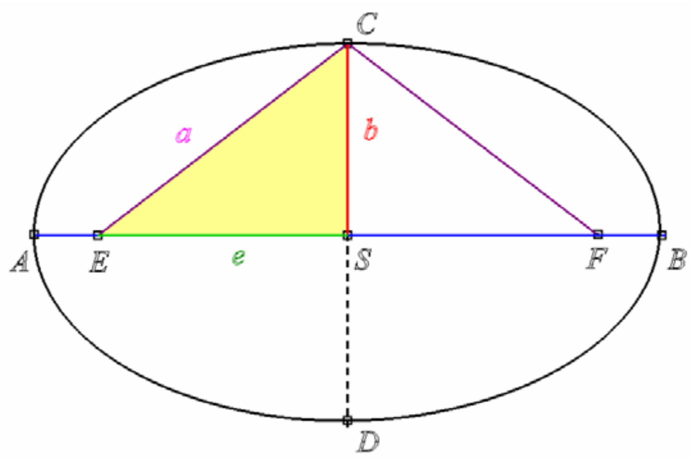
5. Quételetova – Dandelinova věta: Řezem rotační kuželové plochy rovinou je kuželosečka, jejíž ohniska jsou body dotyku této roviny a kulových ploch vepsaných do kuželové plochy.

Pro případ elipsy je tato věta ilustrována na připojeném obrázku.



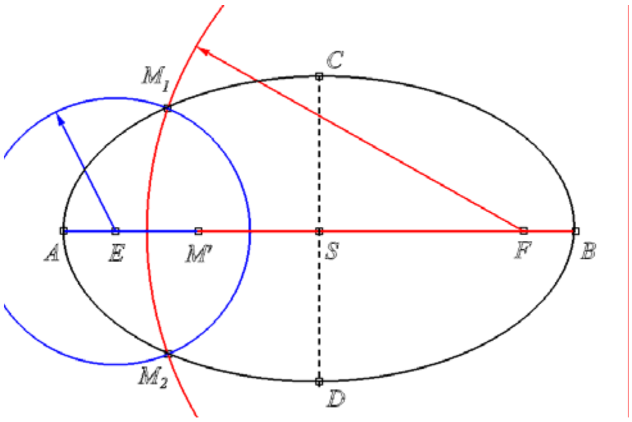
5. 2 Ohniskové vlastnosti elipsy

1. Základní pojmy vztahující se k elipse:



$A; B$ - hlavní vrcholy
$C; D$ - vedlejší vrcholy
$E; F$ - ohniska
S - střed
$AS; |AS| = a$ - hlavní poloosa a její velikost
$CS; |CS| = b$ - vedlejší poloosa a její velikost
$ES; |ES| = e$ - excentricita a její velikost
ΔESC - charakteristický trojúhelník
$a^2 = b^2 + e^2$

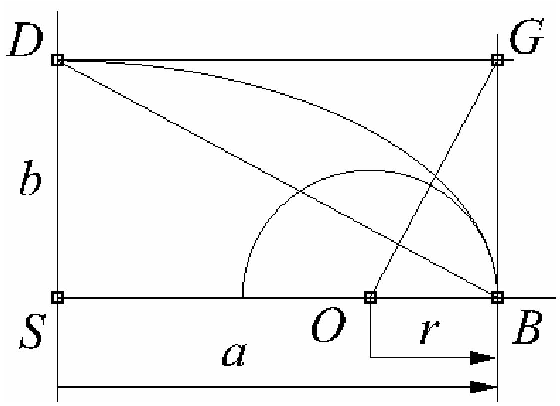
2. Bodová konstrukce elipsy: Předpokládejme, že máme dány hlavní vrcholy a ohniska elipsy. Na připojeném obrázku jsou vyznačeny i vrcholy vedlejší, které do tohoto zadání pravítkem a kružítkem snadno doplníme. Je zde rovněž vyznačena celá elipsa, kterou ovšem pravítkem a kružítkem sestrojit nelze. Je však možno sestrojit libovolný počet jejich jednotlivých bodů (odtud název bodová konstrukce):



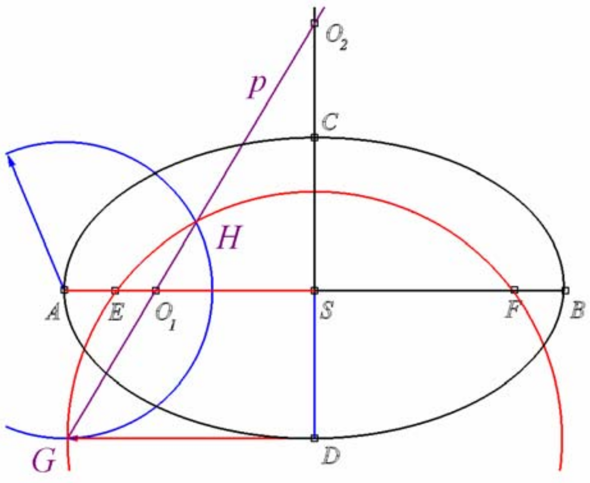
1. $M' \mu EF$
2. $k_1 \equiv (E; r = |AM'|)$
3. $k_2 \equiv (F; r = |BM'|)$
4. $M \in k_1 \cap k_2$

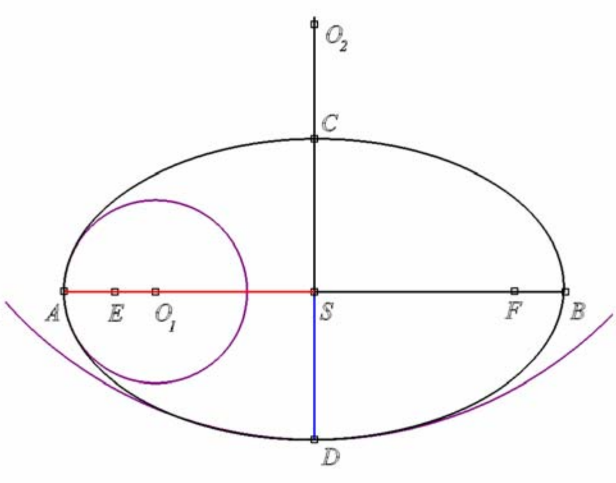
Úsečky EM; FM nazýváme průvodiče bodu M.

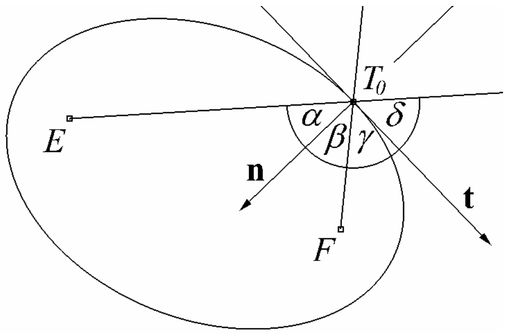
3. Hyperoskulační kružnice: V příkladu 3b) kapitoly 4. 4 jsme spočítali poloměry hyperoskulačních kružnic. Z tohoto výpočtu vyplývá následující syntetická konstrukce:



1. $k_1 \equiv (D; a)$
2. $k_2 \equiv (A; b)$
3. $G; H \in k_1 \cap k_2$
3. $p \equiv GH$
4. $O_1 \in p \cap CD$
5. $O_2 \in p \cap AB$
6. $o_1 \equiv (O_1; r = |O_1A|)$
7. $o_2 \equiv (O_2; r = |O_2D|)$

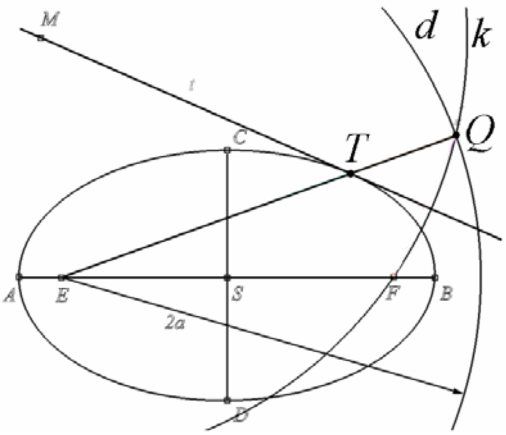






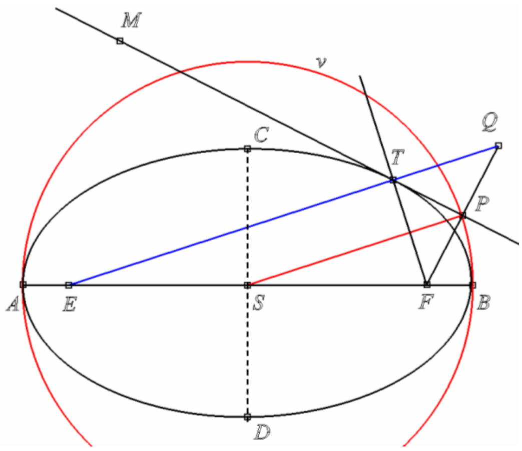
4. Tečna a normála elipsy: Lze dokázat, že normála elipsy v libovolném bodě T_0 půlí úhel $\sphericalangle ET_0F$ (vnitřní úhel průvodičů) a tečna úhel, který je k němu vedejší (vnější úhel průvodičů) – na připojeném obrázku je tedy $\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$.

Tečnu elipsy v daném bodě T tedy sestrojíme jako osu úhlu $\sphericalangle FTG$ (tzv. vnějšího úhlu průvodičů).



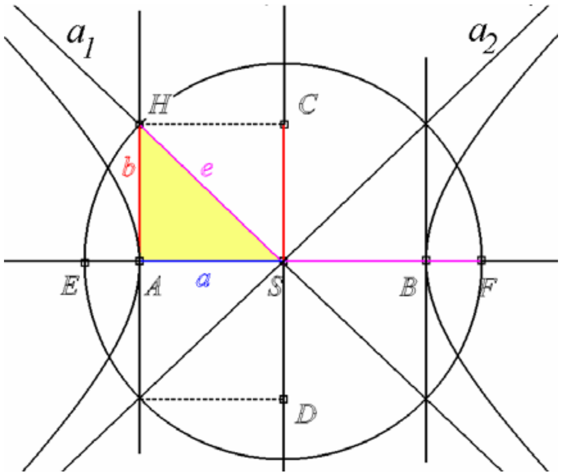
Známé délky úsečky $|EQ| = 2a$ můžeme s výhodou využít ke konstrukci tečny elipsy z daného bodu:

1. $d \equiv (E; 2a)$
2. $k \equiv (M; r = |MF|)$
3. $Q \in d \cap k$
4. t: osa $\sphericalangle QTF$ (nebo úsečky FQ)
5. $T \in t \cap EQ$



Kružnici d z prvního kroku konstrukce nazýváme **řídicí kružnicí.** K této konstrukci ovšem můžeme využít také průsečíku P úsečky FQ s hledanou tečnou t. Je zřejmě $FQ \perp t$ a $|SP| = a$ (neboť SP je střední příčkou ΔEFQ). Bod P tedy leží na kružnici $v = (S; a)$ (tzv. **vrcholové kružnici**) a Thaletově kružnici nad průměrem MF.

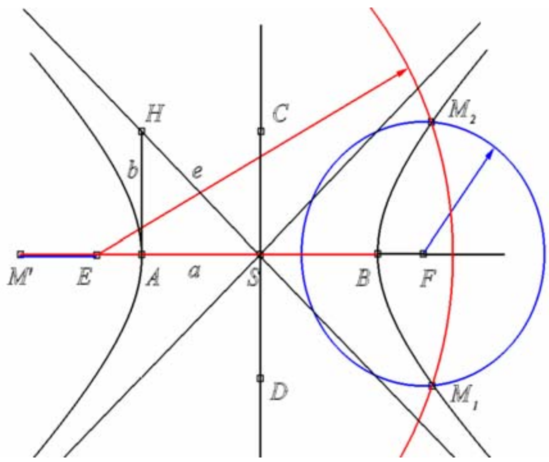
5. 3 Ohniskové vlastnosti hyperboly



1. Základní pojmy vztahující se k hyperbole: podobně jako u elipsy máme

$A;B$ - hlavní vrcholy
$E;F$ - ohniska
S - střed
$AS;|AS|=a$ - hlavní poloosa a její velikost
$CS;|CS|=b$ - vedlejší poloosa a její velikost
$ES;|ES|=e$ - excentricita a její velikost
ΔASH - charakteristický trojúhelník, na rozdíl od elipsy platí $a^2=b^2+e^2$
$a_1;a_2$ - asymptoty

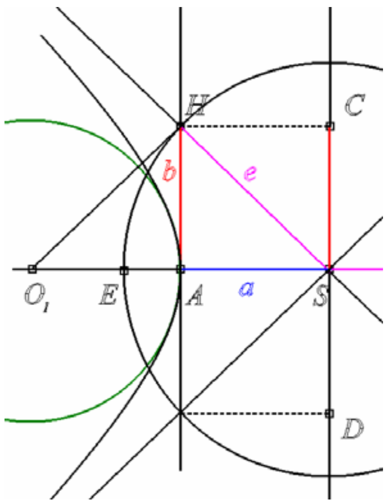
2. Bodová konstrukce hyperboly: Předpokládejme, že máme dány hlavní vrcholy a ohniska hyperboly. Na připojeném obrázku je vyznačena i vedlejší poloosa, kterou do tohoto zadání pravítkem a kružítkem snadno doplníme. Je zde rovněž vyznačena celá hyperbola, kterou ovšem pravítkem a kružítkem opět sestrojit nelze. Je však opět možno sestrojit libovolný počet jejich jednotlivých bodů:

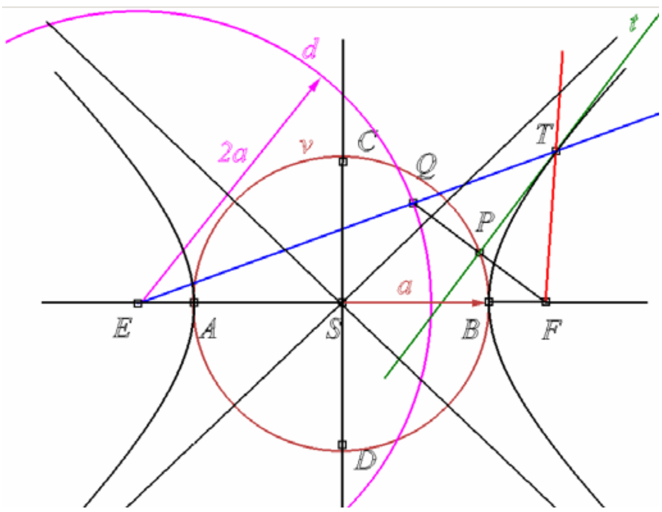


1. $M': E\mu FM'$ *nebo* $F\mu EM'$
2. $k_1\equiv(E;r=|AM'|)$
3. $k_2\equiv(F;r=|BM'|)$
4. $M\in k_1\cap k_2$

Úsečky EM; FM nazýváme průvodiče bodu M.

3. Hyperoskulační kružnice: Střed hyperoskulační kružnice najdeme jako průsečík kolmice na asymptotu vztyčené ve vrcholu H charakteristického trojúhelníka s hlavní osou. Poloměr je $r=|O_1H|$. Pro druhou větev zcela analogicky.

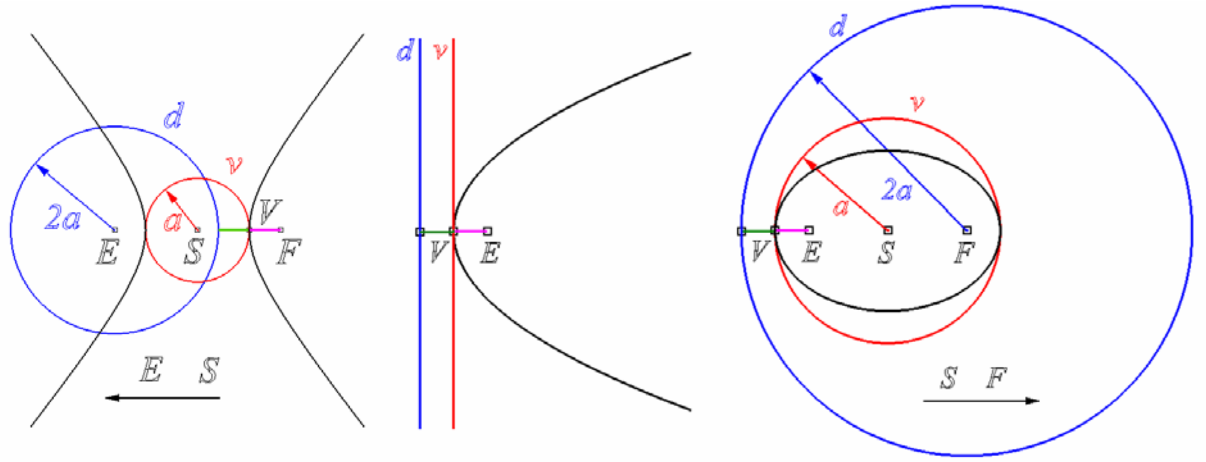




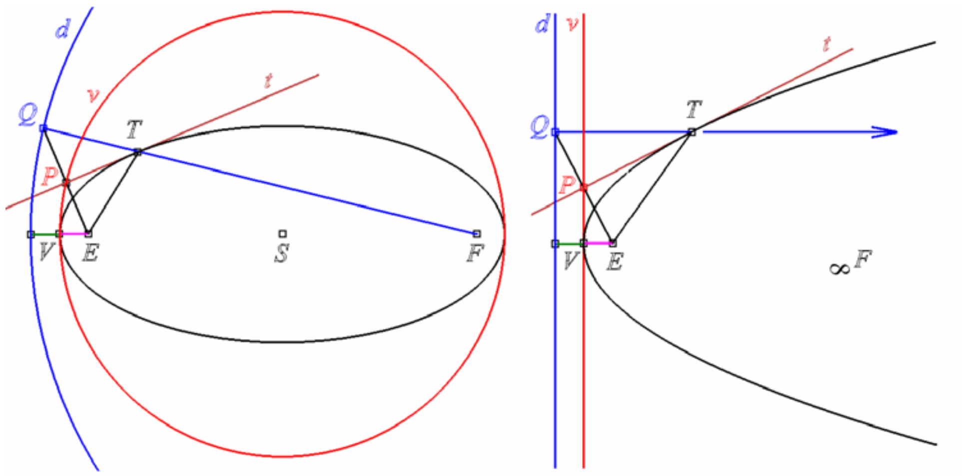
4. Tečna hyperboly: Podobně jako u elipsy lze dokázat, že tečna hyperboly půlí úhel průvodičů, tentokrát ovšem vnitřní. Ke konstrukci tečny z daného bodu lze zcela analogicky využít řídicí či vrcholové kružnice. Situaci již nebudeme podrobně popisovat, pouze ilustrujeme připojeným obrázkem.

5. 4 Ohniskové vlastnosti paraboly

Na následujícím obrázku vlevo je znázorněna hyperbola s vyznačeným středem, ohnisky a jedním vrcholem, který je poněkud netradičně označen V, a dále je zde řídicí a vrcholová kružnice. Na obrázku vpravo je stejným způsobem znázorněna elipsa. Představme si nyní, že vrchol V těchto kuželoseček spolu s bližším ohniskem zůstane na místě a střed kuželosečky spolu s druhým ohniskem se začne vzdalovat. Poloměry obou kružnic v obou případech začnou narůstat. Pokud by střed s ohniskem „utekly až do nekonečna", řídicí a vrcholové kružnice se stanou „kružnicemi s nekonečným poloměrem"- přejdou v řídicí a vrcholovou přímku (ty je tečnou nově vzniklé křivky, mluvíme proto o vrcholové tečně).



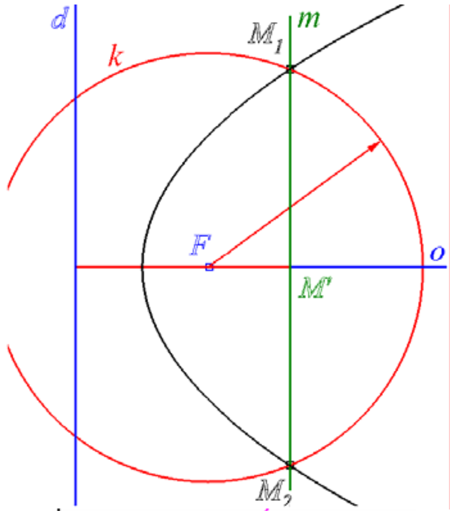
Sestrojme hyperbole a elipse tečnu s příslušnými průvodiči (na následujícím obrázku je kvůli přehlednosti pouze elipsa). U elipsy i hyperboly platí $|ET| = |QT|$, totéž lze tedy očekávat i ve třetím případě. Zde je $|ET|$ vzdálenost bodu T od ohniska a $|QT|$ vzdálenost tohoto bodu od řídicí přímky. Vzniklou křivkou je tedy parabola, kterou lze tedy v tomto smyslu chápat jako elipsu nebo hyperbolu s nevlastním středem (tuto intuitivní představu v následující kapitole upřesníme). Při pohledu na tento obrázek nás zároveň nepřekvapí skutečnost, že tečna paraboly půlí úhel $\sphericalangle ETQ$.



Parabolu většinou určujeme řídicí přímkou a ohniskem, vzdálenost ohniska od řídicí přímky nazýváme parametr paraboly a značíme ho p. Přímku $o \equiv VE$ nazýváme osa paraboly.

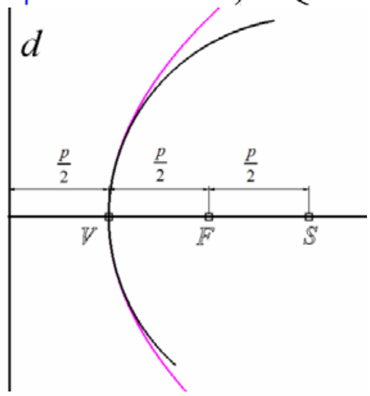
1. Bodová konstrukce paraboly:

1. Zvolíme $M' \in o$
2. $m : M' \in m; m \parallel d$
3. $k \equiv \left(F; r = |dM'|\right)$
4. $M_1; M_2 \in k \cap d$



2. Oskulační kružnice: střed oskulační kružnice leží na ose paraboly ve vzdálenosti p od vrcholu.

3. Subtangenta a subnormála paraboly: V libovolném bodě $T \neq V$ paraboly sestrojme tečnu, normálu a kolmici k ose paraboly. Průsečíky těchto přímek s osou paraboly označme pořadě $O; N; M$. Úsečku OM nazýváme **subtangenta**; úsečku MN **subnormála**.



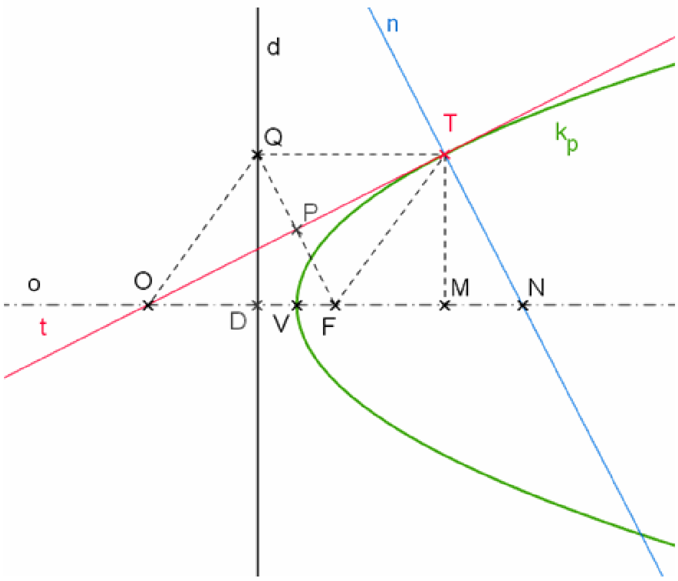
a) Délka subtangenty je rovna parametru

b) Ohnisko půlí součet subnormály a subtangenty (tj. dle značení obrázku úsečku ON)

c) Vrchol půlí subtangentu

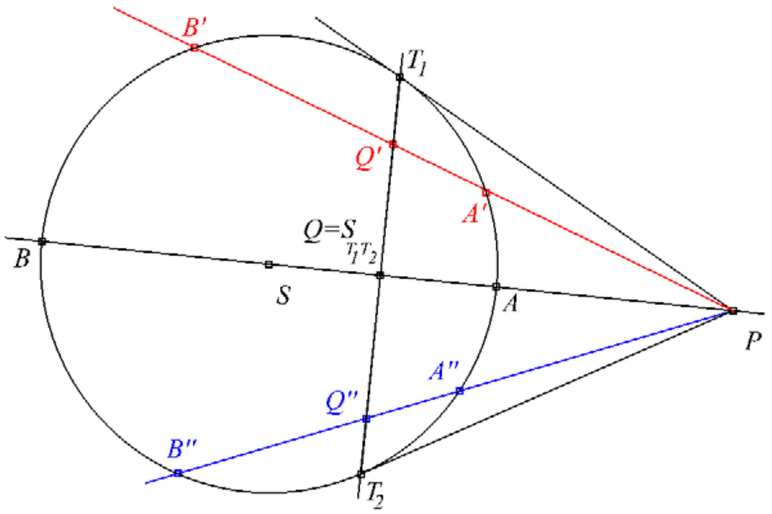
Tvrzení c) v příští kapitole poněkud zobecníme, proto uveďme i důkaz:

Důkaz:
a) Podle konstrukce je $n \parallel QF$; $DQ \cong TN$; $o \parallel QT$ a úhly s vrcholy D resp M jsou pravé. Je tedy $\Delta QFD \cong \Delta TNM$ (usu), takže $|MN| = |DF| = p$.
b) $\Delta QPT \cong \Delta FPO$ (usu), tedy $OP \cong PT$, zároveň $TN \parallel QF$, takže PF je střední příčka ΔOTN, takže $|OF| = |FN|$
c) $OP \cong PT$ a zároveň $PV \parallel TM$, takže PV je střední příčka ΔOTM, takže $|OV| = |VM|$



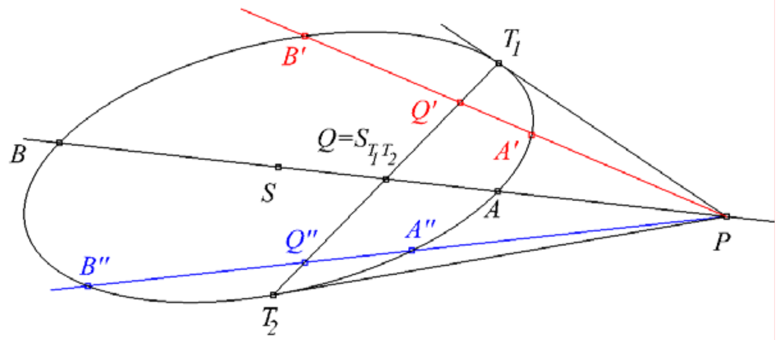
5. 5 Projektivní vlastnosti kuželoseček

V této kapitole se budeme věnovat některým pojmům a vlastnostem, které jsou společné všem kuželosečkám.

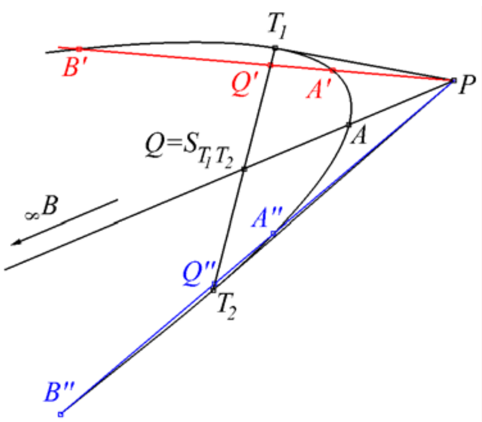


1. Polára a pól kružnice: Uvažujme libovolnou kružnici, ke které z libovolného bodu P sestrojíme tečny, body dotyku označme $T_1;T_2$. Přímku $p \equiv T_1T_2$ **nazýváme polárou kružnice vzkledem k bodu** P, bod P nazýváme **pólem** vzhledem k poláře p.

Sestrojme libovolnou sečnu kružnice, která prochází pólem a označme $A;B$ její průsečíky s kružnicí a Q průsečík polárou. Lze dokázat, že bod Q je harmonicky sdružený s P vzhledem k bodům $A;B$, tj. že $(A;B;Q;P) = -1$. Tuto skutečnost jsme již ilustrovali ve speciálním případě (viz kpt. 3.2. př. 6).



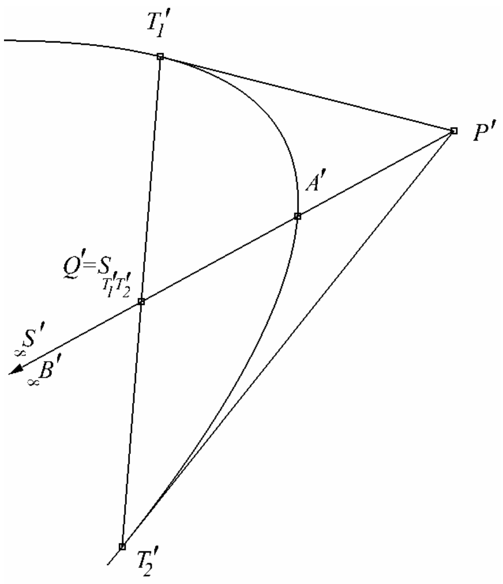
2. Obraz poláry kružnice ve středové kolineaci: Situaci z předchozí úlohy zobrazme v libovolné středové kolineaci, jejíž úběžnice neprochází ani jedním z bodů $T_1;T_2$. V závislosti na poloze této úběžnice zobrazí kolineace kružnici na elipsu, parabolu, nebo hyperbolu. Protože však zachovává dvojpoměr, je stále $(P;Q;A;B) = -1$.



Tato skutečnost nás vede ke zobecnění pojmů, které běžně používáme u kružnice

3. Sečna a tětiva kuželosečky: **Sečna kuželosečky** je přímka, která protíná kuželosečku ve dvou různých bodech. Úsečku ohraničenou těmito dvěma body nazýváme **tětiva kuželosečky**.

4. Polára a pól kuželosečky: Nechť $T_1;T_2$ jsou dva libovolné různé body kuželosečky, $t_1;t_2$ tečny v těchto bodech. Pak přímku $p \equiv T_1T_2$ nazýváme **polárou kuželosečky vzhledem k bodu** P, bod $P \in t_1 \cap t_2$ nazýváme pól kuželosečky vzhledem k poláře. Je-li bod Q středem poláry $T_1;T_2$, říkáme, že je polárně sdružený s bodem P.



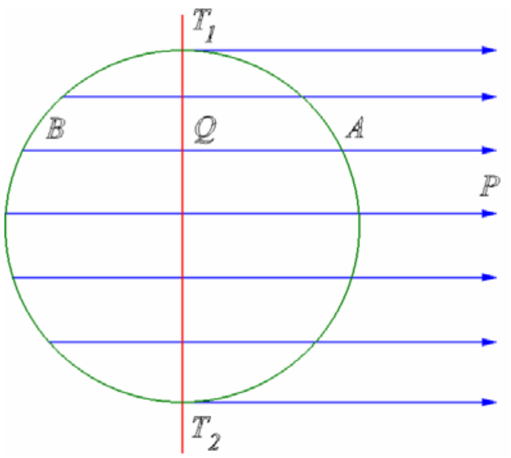
Uvažujme kružnici k s pólem P, polárně sdruženým bodem Q a průsečíky $A;B \in k \cap PQ$. Pro body $P;Q;A;B$ platí $(P;Q;A;B) = -1$. Zobrazme tuto situaci ve středové kolineaci, jejíž úběžnice se dotýká kružnice k v bodě B. Obrazem k' této kružnice bude parabola (viz připojený obrázek). Protože středová kolineace zachovává dvojpoměr, bude i pro parabolu platit $(P';Q';A';B') = -1$. Obraz B' bodu B je však nevlastní, takže $(P';Q';B') = 1$. Je tedy

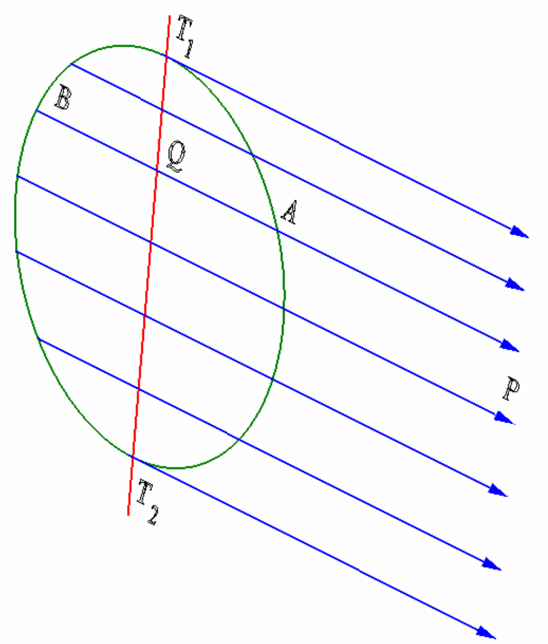
$$-1 = (P';Q';A';B') = \frac{(P';Q';A')}{(P';Q';B')} = \frac{(P';Q';A')}{1} \Rightarrow$$

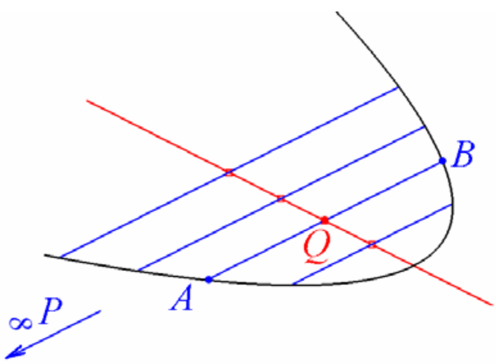
$$(P';Q';A') = -1$$

To ovšem znamená, že bod A' je středem úsečky $P'Q'$. Toho lze využít jak v mnohých konstrukčních úlohách, tak při modelování paraboly v CAD systémech, jak ukážeme dále.

Poznámka: V předchozí kapitole jsme dokázali tvrzení, že subtangenta paraboly je půlena vrcholem (viz kpt. 5.4 odst. 3c). Toto tvrzení je speciálním případem předchozí úvahy – leží-li totiž pól P' na ose paraboly, je přímka ${}_{\infty}B'P'$ osou paraboly, bod A' jejím vrcholem a úsečka $P'Q'$ subtangentou.







Předpokládejme, že v situaci popsané v odst. 1. je bod P nevlastní. I zde bude dvojpoměr $({}_{\infty}P;Q;A;B) = -1$. Zobrazíme-li tuto situaci ve středové kolineaci, tento dvojpoměr se zachová, bude tedy rovněž

$$\left({}_{\infty}P;Q;A;B\right)=\left(Q;A;B;{}_{\infty}P\right)=\frac{\left(Q;A;B\right)}{\left(Q;A;{}_{\infty}P\right)}=-1$$

Protože je však bod ${}_{\infty}P$ nevlastní, je jmenovatel zlomku roven jedné, takže musí tedy být $\left(Q;A;B\right)=-1$. To ovšem znamená, že bod Q je i u ostatních kuželoseček středem úsečky AB (u kružnice je tato skutečnost zřejmá). Středy všech vzájemně rovnoběžných tětiv tedy leží na přímce. Tuto přímku můžeme považovat za průměr nejen u kružnice, ale i u ostatních kuželoseček.

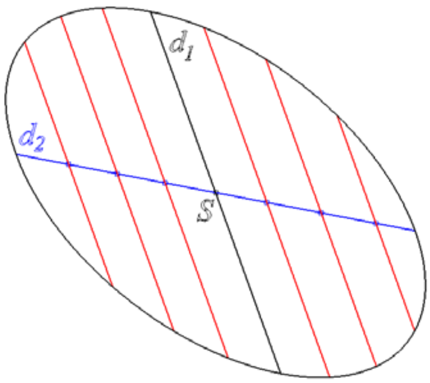
5. Průměr kuželosečky: je přímka procházející středy navzájem rovnoběžných tětiv. Říkáme, že průměr je sdružený s těmto tětivami.

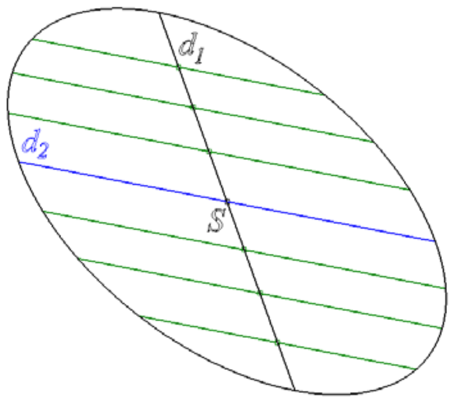
Dva průměry kružnice se, jak známo, protnou v jejím středu. Tato skutečnost umožňuje definovat střed i u ostatních kuželoseček

6. Střed kuželosečky: je průsečík dvou jejích průměrů.

Asi nás nepřekvapí, že takto definovaný střed splývá u elipsy a hyperboly s dosud známými definicemi. Podle této definice má však střed i parabola. Střed paraboly je nevlastní a je to směr její osy

7. Sdružené průměry: Množinu d_2 všech středů tětiv rovnoběžných s daným průměrem d_1 nazýváme průměrem sdruženým s d_1. Je-li d_2 sdružený s d_1, je také d_1 sdružený s d_2. Průměry d_1, d_2 proto nazýváme vzájemně sdružené. V dalším textu využijeme jen sdružené průměry elipsy.





8. Konstrukční úloha: Sestrojme parabolu, jsou-li dány její tečny $t_1: y=30-\frac{x}{3}$; $t_2: y=\frac{x}{2}-50$ a na nich body dotyku $T_1=\left[-30;?\right]$; $T_2=\left[?;-30\right]$.

Řešení: Jedná se o konstrukční úlohu, jejímž úkolem je sestrojit neznámý útvar (v tomto případě parabolu), který má zadané vlastnosti. Řešení takové úlohy by mělo obsahovat tyto kroky:

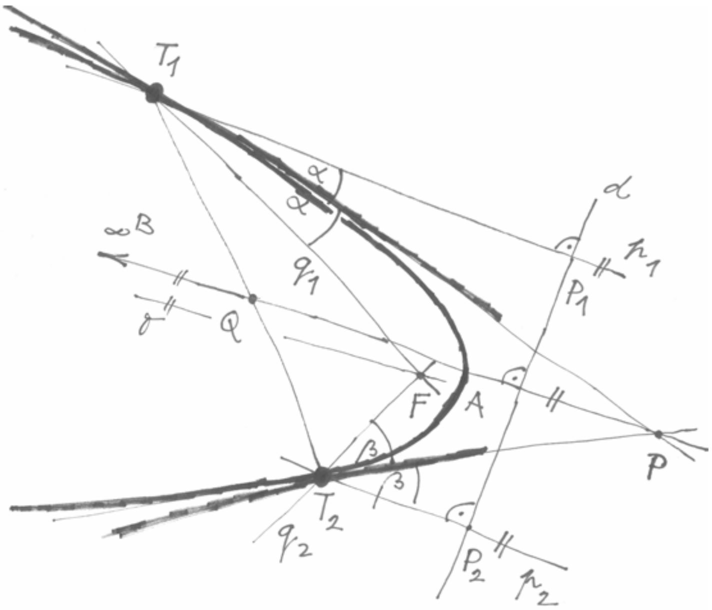
a) Rozbor: Jeho úkolem je nalézt vlastnosti hledaného útvaru, které umožní jeho konstrukci. Součástí rozboru je náčrtek, kde jsou nalezené vlastnosti vhodně zachyceny.

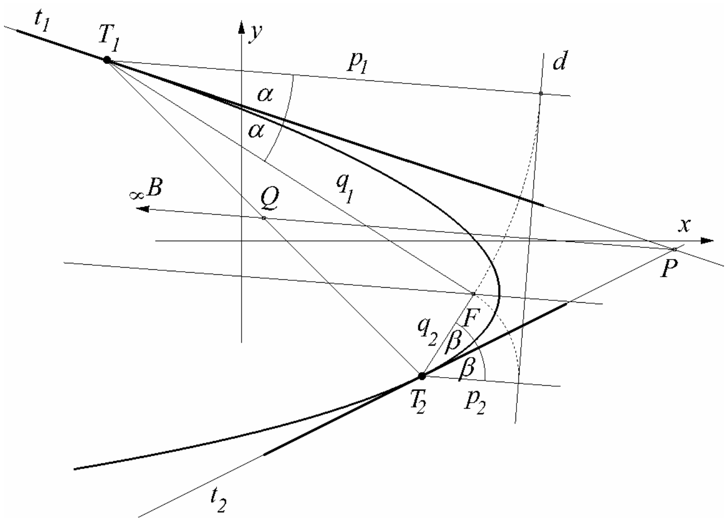
b) Konstrukce, tj. zápis jednotlivých kroků, geometrický postup, jak úrvar sestrojit. Součástí konstrukce je i vyrýsování obrázku pravítkem a kružítkem (v našem případě i křivítkem).

c) Důkaz, který ověří, že každý útvar sestrojený konstrukcí z předchozího bodu, má požadované vlastnosti, a naopak žádný jiný už tyto vlastnosti nemá. Je to logická obdoba zkoušky při řešení rovnic. Většinou se však neuvádí samostatně – důkaz totiž velmi často

vyplývá přímo z rozboru (podobně jako při řešení rovnic ekvivalentními úpravami, kde zkouška není součástí řešení).
d) Diskuse: jejím úkolem je zjistit, kolik řešení úloha za zadaných podmínek má.

Demonstrujme tento postup na naší konkrétní úloze:





a) Rozbor: Náčrtek provedeme, jako kdyby byla úloha vyřešená. Zadání i hledaný útvar vyznačíme pro odlišení silně a „užitečné“ vlastnosti hledáme v obrázku „zpětně“. V našem případě je rozhodující pól P paraboly (průsečík zadaných tečen) a bod Q k němu polárně sdružený, který najdeme jako střed tětivy T_1T_2. Z odst. 4 plyne, že přímka PQ prochází nevlastním bodem $_{\infty}B$ paraboly - určuje tedy směr její osy i směr řídicí přímky d, která je na tento směr kolmá. Lze tedy sestrojit průvodiče $p_1; p_2$ bodů $T_1; T_2$, ke konstrukci zbývajících průvodičů $q_1; q_2$ využijeme skutečnosti, že tečna půlí úhel průvodičů. Průsečík průvodičů $q_1; q_2$ je ohniskem paraboly a další postup konstrukce už je zřejmý.

b) Konstrukce:

α) $Q : Q \in T_1T_2; QT_1 \cong T_2Q$ °

β) $p_1 : T_1 \in p_1; p_1 \parallel PQ$

γ) $q_1 : T_1 \in q_1; \sphericalangle q_1t_1 \cong \sphericalangle p_1t_1$

δ) $p_2 : T_2 \in p_2; p_2 \parallel PQ$

ε) $q_2 : T_2 \in q_2; \sphericalangle q_2t_2 \cong \sphericalangle p_2t_2$

ζ) $F : F \in q_1 \cap q_2$

c) Důkaz v tomto případě vyplývá přímo z rozboru.
d) Diskuse: Počet řešení je dán počtem bodů, které lze získat popsanou konstrukcí. Všechny sestrojované přímky jsou určeny jednoznačně. Ohnisko je průsečíkem dvou přímek a je tedy jediné, jednoznačná je rovněž řídicí přímka. Úloha má jedno řešení.

5. 6 Osová afinita mezi kružnicí a elipsou

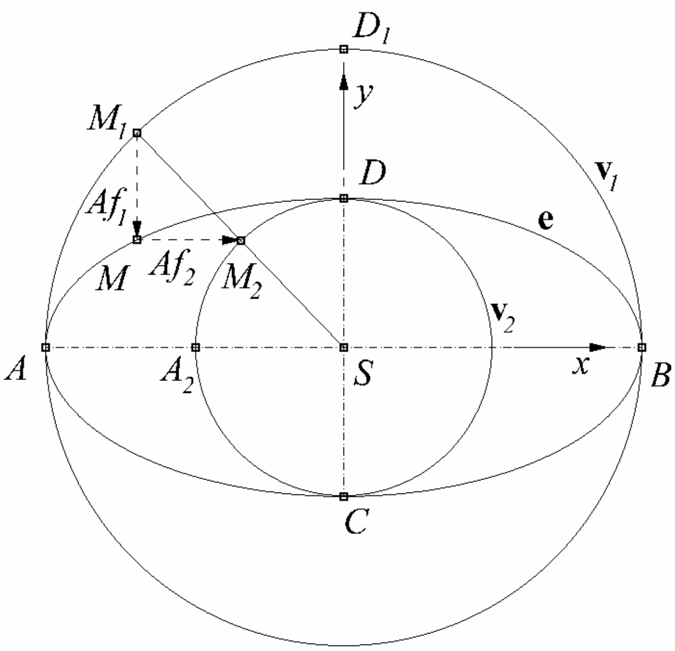
Věnujme se nyní speciálně osové afinitě mezi kružnicí a elipsou. Afinním obrazem kružnice elipsa. Zaměníme-li v takové afinitě vzor a obraz (použijeme afinitu inverzní), je naopak obrazem elipsy kružnice.

Podívejme se tedy na některé afinity, které danou elipsu zobrazují jako kružnici. S každou elipsou $\mathbf{e}$ je osově afinní především kružnice $\mathbf{v}_1$ sestrojená nad její hlavní osou (vrchlová kružnice) a kružnice $\mathbf{v}_2$ sestrojená nad vedlejší osou elipsy.

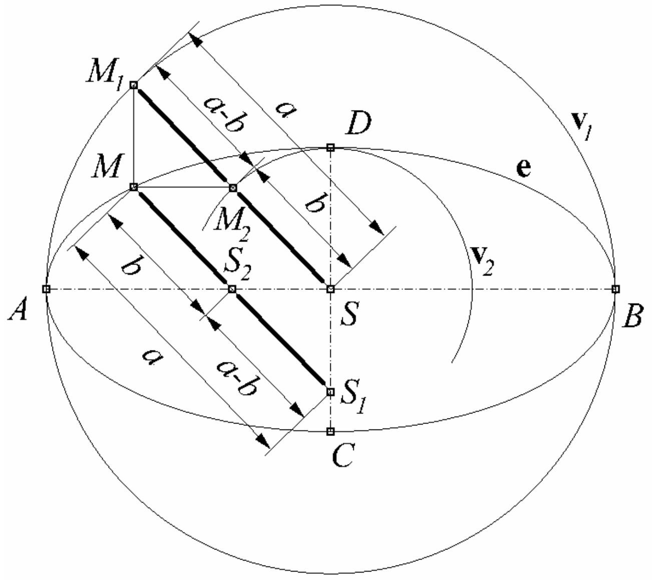
1. Trojúhelníková konstrukce elipsy: Na kružnici $\mathbf{v}_1$ zvolme libovolný bod M_1 a zobrazme ho v afinitě $Af_1(AB): D_1 \to D$, která zobrazuje kružnici $\mathbf{v}_1$ na elipsu $\mathbf{e}$. Obrazem bodu $M_1 \in \mathbf{v}_1$ je bod $M \in \mathbf{e}$. Bod $M \in \mathbf{e}$ zobrazme dále v afinitě $Af_2(CD): A \to A_2$. Obrazem bodu $M \in \mathbf{e}$ je bod. $M_2 \in \mathbf{v}_2$. Zajímejme se o zobrazení $\mathscr{I} = Af_2 \circ Af_1$. Zvolme souřadnou soustavu $\langle S;\mathbf{i};\mathbf{j}\rangle$ tak, že $\langle S;\mathbf{i}\rangle = x = SB$; $\langle S;\mathbf{j}\rangle = y = SD$. Pak matice $\mathbf{A}_{x,\mathbf{D}_1;\mathbf{D}}$; $\mathbf{A}_{y,\mathbf{A};\mathbf{A}_2}$ afinit $Af_1; Af_2$ sestavíme dle (7), (8) kpt. 2. 3 a matici $\mathbf{Z}$ složeného zobrazení zjistíme jako součin

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_{x,\mathbf{D}_1;\mathbf{D}} \cdot \mathbf{A}_{y,\mathbf{A};\mathbf{A}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

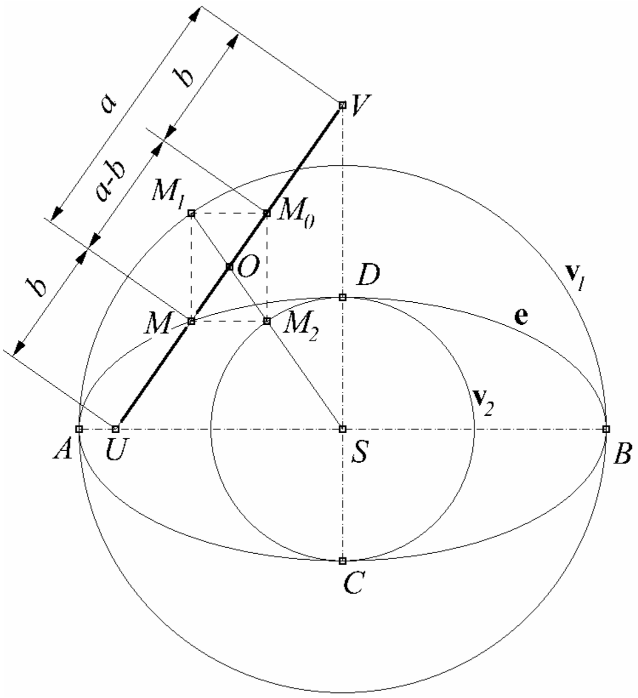
Složené zobrazení, které zobrazuje bod M_1 na bod M_2 je tedy stejnolehlost se středem v počátku (tj. v bodě S), což znamená, že body M_1; M_2; S leží na jedné přímce. Tato skutečnost umožňuje velmi jednoduchou konstrukci libovolného bodu M elipsy, známe-li hlavní a vedlejší osu. Podle trojúhelníka M_1M_2M se tato konstrukce nazývá trojúhelníková:



a) $v_1(S;a)$; $v_2(S;b)$
b) p: $S \in p$ (jinak libovolná)
c) $M_1;M_2$: $M_1 \in v_1 \cap p$; $M_2 \in v_2 \cap p$
d) r : $r \parallel CD$; $M_1 \in r$
e) s : $s \parallel AB$; $M_2 \in s$
f) M : $M \in r \cap s$.



2. Proužkové konstrukce elipsy: Na dalším obrázku vlevo máme ještě jednou sestrojen pravoúhlý ΔM_1MM_2. Úsečku M_1S posuňme o vektor $\overrightarrow{M_1M}$. Bod S se tímto posunutím zobrazí do S_1, na obrázku jsme ještě označili $S_2 \in MS_1 \cap AB$. Snadno dokážeme, že $\Delta M_1MM_2 \cong \Delta S_1SS_2$ (usu). Protože $|M_1S| = |MS_1| = a$ a $|M_2S| = b$, je $|M_1M_2| = |S_1S_2| = a - b$ a hlavně $|MS_2| = |SM_2| = b$. Tyto skutečnosti jsou podstatou proužkové konstrukce elipsy: Bude-li se trojice kolineárních bodů $S_1;S_2;M$, kde $|MS_1| = a$, $|M_2S| = b$ a $|S_1S_2| = a - b$, pohybovat tak, že S_1 se pohybuje po vedlejší ose, S_2 po ose hlavní, bod M se bude pohybovat po elipse. Tato konstrukce bývala v minulosti realizována pohybujícím se proužkem papíru s vyznačenými body $S_1;S_2;M$, odtud název **proužková konstrukce**. A protože $|S_1S_2| = a - b$, nazývá se tato **konstrukce rozdílová**.



Podobným způsobem lze realizovat i konstrukci součtovou. Trojúhelník ΔM_1MM_2 z předchozího obrázku doplňme bodem M_0 na obdélník se středem O a dále setrojme body $U;V$ dle připojeného obrázku. Trojúhelníky ΔUSO, ΔVSO jsou zřejmě rovnoramenné a platí $|UV| = |SM_2| = |VM_0|$. Protože $|SM_2| = b$, je rovněž $|UM| = |VM_0| = b$. Konečně je $|MM_0| = |M_1M_2| = a - b$, takže

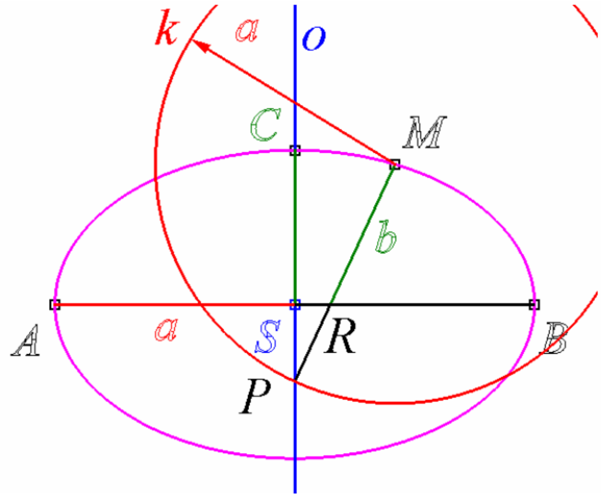
$$|MV| = |MM_0| + |M_0V| = a - b + b = a.$$

Pro bod $M \mu UV$ je $|MV| = a$, $|MU| = b$. Pohybujeme-li proužkem UV tak, že bod U se pohybuje po hlavní ose a bod V po ose vedlejší, pak bod M opisuje elipsu. Proužek UV má tentokrát velikost $a+b$, tato konstrukce se proto nazývá konstrukce součtová

Proužkové konstrukce se dnes většinou nepoužívají k bodovým konstrukcím elipsy při známých osách, ale v situacích, kdy známe jednu osu a bod, který na elipse leží.

3. Příklad: Sestrojme elipsu, známe-li její hlavní vrcholy a bod, který na ní leží.

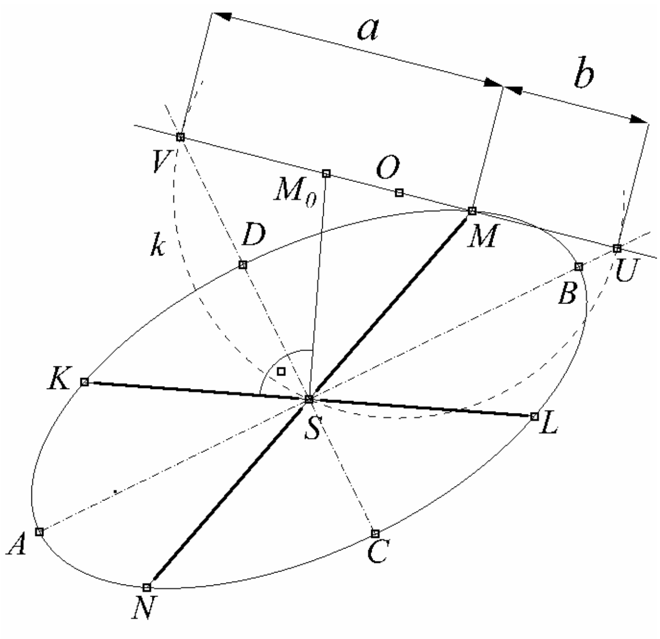
Řešení: Využijeme rozdílové proužkové konstrukce



1. o - *osa* AB
2. $k \equiv (M;a)$
3. $P \in k \cap o$
4. $R \in PM \cap AB$
5. $b = |MR|$

4. Rytzova konstrukce elipsy: Tato konstrukce pochází od švýcarského geometra **D. Rytze** (1801-1868). Umožňuje sestrojení hlavní a vedlejší osy elipsy z jejich sdružených průměrů. Popis této konstrukce je následující:

Mějme dány úsečky KL; MN; se společným středem S, které jsou sdruženými průměry hledané elipsy. Bodem S veďme kolmici k delšímu z průměrů, na kterou přeneseme jeho

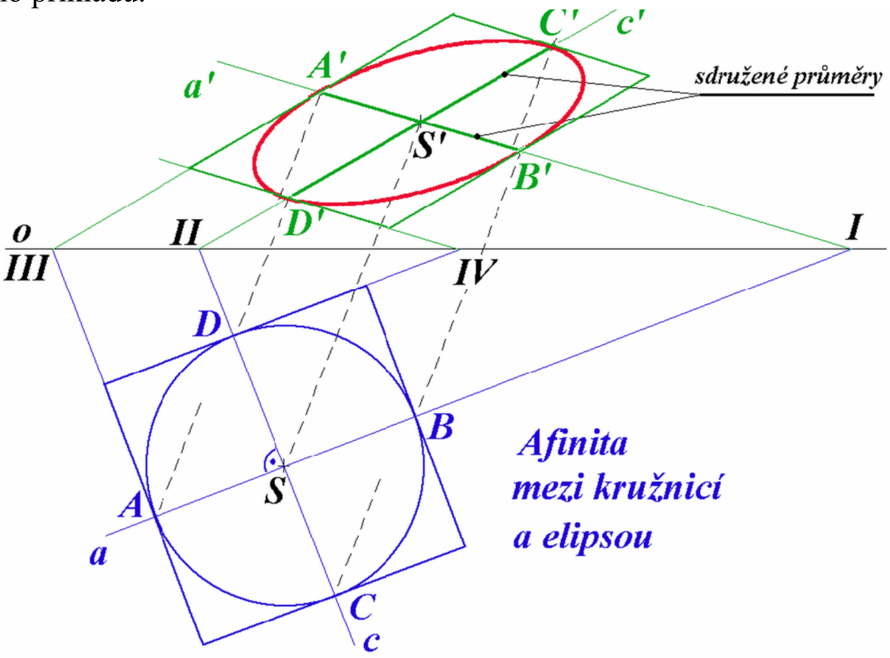


velikost. Získáme tak bod, který jsme na našem obrázku označili M_0. Dále sestrojíme kružnici $k \equiv (O; r = |SO|)$, kde O je střed úsečky M_0M. Průsečík této kružnice s přímkou určenou body $M_0; M$ označme $U; V$. Přímka procházející body $S; U$ určuje hlavní osu, přímka procházející body $S; V$ určuje vedlejší osu hledané elipsy. Velikost os je rovna velikostem $|VM|$, $|MU|$ úseček VM, MU.

Důkaz této konstrukce využívá proužkové konstrukce a otočení o 90º kolem středu elipsy. Technicky je poněkud náročnější, a proto ho nebudeme uvádět.

5. Příklad: Je dán čtverec $ABCD$, do kterého je vepsána kružnice $k(S, r)$. Sestrojme jeho obraz $A'B'C'D'$ i obraz k' vepsané kružnice k v osové afinitě, která je dána osou o; $S \notin o$ a dvojicí odpovídajících si bodů $P; P'$.

Řešení: Čtverec se zobrazí jako rovnoběžník, jeho konstrukce je zřejmá z předchozího textu. Z předchozího textu rovněž víme, že obrazem k' kružnice k bude elipsa. Její bodovou konstrukci lze provést tak, že sestrojíme obrazy dostatečného počtu bodů, ležících na kružnici k. Tímto způsobem však obecně nezjistíme hlavní a vedlejší vrcholy, ani ohniska sestrojované elipsy, což je u těchto konstrukcí velmi žádoucí. Můžeme postupovat tak, jak je naznačeno na připojeném obrázku. Sestrojíme dva libovolné kolmé průměry kružnice. Jejich afinní obrazy budou sdružené průměry hledané elipsy. Tu pak sestrojíme Rytzovou konstrukcí z předchozího příkladu.



Při konstrukci afinního obrazu k' kružnice k však ani v nejobecnějším případě není Rytzova konstrukce nutná. Kolmé průměry kružnice, jejíž pomocí sestrojujeme sdružené průměry elipsy, lze totiž vždy volit tak, že i sdružené průměry elipsy jsou na sebe kolmé, a jsou tedy přímo její hlavní resp. vedlejší osou. Má-li se pravý úhel mezi průměry kružnice zobrazit do pravého úhlu mezi sdruženými průměry elipsy, musejí vrcholy obou těchto úhlů ležet na Thaletově kružnici k'' nad průměrem ohraničeným „vhodnými“ body $I;II$ na ose afinity. Střed O této kružnice musí tedy ležet na ose afinity a dále ležet na ose p tětivy SS', její poloměr je $r=|OS|$. V případě kolmé afinity průsečík O osy p s osou afinity neexistuje. V tom případě je ale hlavní osa hledané elipsy rovnoběžná s osou afinity a celá konstrukce je podstatně jednodušší.