

6 Re prezentace křivek v CAD systémech

Naprostá většina křivek a ploch, které se uživateli jeví jako velmi různorodé, je v moderních CAD systémech sestrojována zcela jednotným způsobem. Od úsečky přes kuželošerky až po složité ornamenty definované uživatelem, od čtverce přes kulovou plochu až po karoserii automobilu. V tomto textu se postupně nastíníme alespoň geometrické principy těchto konstrukcí.

6.1 Afinní kombinace bodů

V kapitole 1.3 jsme položili otázku, zda můžeme zápis $\mathbf{u} = X - A$ chápat jako rozdíl bodů, jehož „výsledkem“ je vektor. Pokusme se nyní na tuto otázku odpovědět.

Pokud bychom zápis $X - A$ chápali skutečně jako rozdíl bodů, měl by existovat především součet těchto bodů

$$X + A = [x_1; x_2; x_3] + [a_1; a_2; a_3] \stackrel{?}{=} \begin{cases} [x_1 + a_1; x_2 + a_2; x_3 + a_3] \\ (x_1 + a_1; x_2 + a_2; x_3 + a_3) \end{cases} \quad (1)$$

a také součet násobků (kombinace)

$$t_1 \cdot X + t_2 \cdot A = t_1 \cdot [x_1; x_2; x_3] + t_2 \cdot [a_1; a_2; a_3] \stackrel{?}{=} \begin{cases} [t_1 x_1 + t_2 a_1; t_1 x_2 + t_2 a_2; t_1 x_3 + t_2 a_3] \\ (t_1 x_1 + t_2 a_1; t_1 x_2 + t_2 a_2; t_1 x_3 + t_2 a_3) \end{cases} \quad (2)$$

Co by ovšem takovým součtem, popřípadě „kombinací“ bodů mělo být. Bod? Proč? Vektor? Z jakého důvodu? A jaký by to mělo geometrický smysl?

V kapitole 1.3 jsme definovali lineární kombinaci vektorů. V projektivním prostoru lze podobně definovat lineární kombinaci bodů

1. Projektivní kombinace bodů projektivního prostoru: Bod V prostoru ${}_{\infty}E^2$ resp. ${}_{\infty}E^3$ nazveme lineární kombinací bodů $U_0; U_1; \dots; U_n$ právě tehdy, když každý reprezentant \mathbf{v} bodu V je lineární kombinací reprezentantů $\mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n$ bodů $U_0; U_1; \dots; U_n$, tj. když existují $\omega_i \in \mathbb{R}$; $i = 0; 1; \dots; n$ taková, že $\mathbf{v} = \omega_0 \mathbf{u}_0 + \omega_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \omega_n \mathbf{u}_n$. Zapisujeme $V = \omega_0 U_0 + \omega_1 U_1 + \dots + \omega_n U_n$

2. Důležitá poznámka: Projektivní kombinace bodů je tedy v podstatě lineární kombinace jejich reprezentantů, ovšem s jedním omezením. Na rozdíl od koeficientů $c_0; c_1; \dots; c_n$ lineární kombinace vektorů musí být alespoň jeden z koeficientů $\omega_0; \omega_1; \dots; \omega_n$ projektivní kombinace nenulový. Pokud by totiž byly všechny nulové, pak by kombinací byl nulový vektor. To ovšem není možné, neboť nulový vektor nemůže být reprezentantem žádného projektivního bodu (viz kapitolu 1.4, odst. 3).

Projektivní kombinace bodů budeme používat k modelování geometrických útvarů v euklidovském prostoru, který lze chápat jako množinu všech vlastních bodů prostoru projektivního. Aby toto naše modelování bylo úspěšné, je třeba, abychom používali jen takové projektivní kombinace, kde kombinací euklidovských reprezentantů je euklidovský reprezentant. V ${}_{\infty}E^2$ tedy musí být

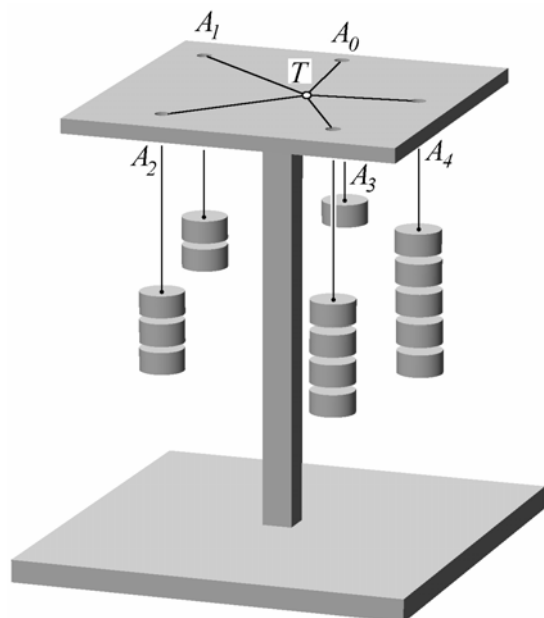
$$(v_1; v_2; 1) = c_0 (u_{01}; u_{02}; 1) + c_1 (u_{11}; u_{12}; 1) + \dots + c_n (u_{n1}; u_{n2}; 1) \quad (3)$$

v ${}_{\infty}E^3$ analogicky. Má-li ovšem být tato rovnice splněna, musí být

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1 \quad (4)$$

Operaci (3), která splňuje podmínku (4), budeme nazývat afinní kombinací bodů. Můžeme tedy definovat:

3. Afinní kombinace vlastních bodů projektivního prostoru: Lineární kombinaci



$$V = c_0U_0 + c_1U_1 + \dots + c_nU_n$$

bodů projektivního prostoru nazýváme afinní kombinací vlastních bodů právě tehdy, když $U_0; U_1; \dots; U_n$ jsou euklidovští reprezentanti vlastních bodů a $c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1$.

Díky podmínce (4) můžeme afinní kombinaci zcela analogicky definovat i v afinním prostoru:

4. Afinní kombinace bodů euklidovského prostoru: Bod

$$V = c_0U_0 + c_1U_1 + \dots + c_nU_n,$$

kde $V; U_0; U_1; \dots; U_n$ jsou body euklidovského prostoru a $c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1$, nazýváme afinní kombinací bodů $V; U_0; U_1; \dots; U_n$.

Afinní kombinace bodů má zcela jasný geometrický i fyzikální význam. V kapitole 1.3. jsme modelovali přímku resp. rovinu rovnicemi

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + t \cdot \mathbf{s} \quad (5)$$

resp.

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + c_0\mathbf{u}_0 + c_1\mathbf{u}_1$$

kde jsme vektor \mathbf{w} nemohli násobit skalárem. Jsou-li však $A; B$ dva různé body, pak afinní kombinace

$$X = c_0A + c_1B; c_0 + c_1 = 1,$$

neboli

$$X = t \cdot A + (1-t) \cdot B; t \in \langle 0; 1 \rangle \quad (6)$$

je rovnicí přímky procházející body $A; B$. Pro tři body $A; B; C$, které neleží na jedné přímce, je analogicky

$$X = c_0A + c_1B + c_2C; c_0 + c_1 + c_2 = 1 \quad (7)$$

Je-li v rovnici (6) resp. (7) navíc $0 \leq c_0; c_1 \leq 1$, resp. $0 \leq c_0; c_1; c_2 \leq 1$, jedná se o rovnici úsečky AB resp. trojúhelníka ABC . Pro konkrétní hodnoty čísel $0 \leq m_0; m_1; \dots; m_n \leq 1$ určuje afinní kombinace

$$T = m_0 U_0 + m_1 U_1 + \dots + m_n U_n \quad (8)$$

těžiště soustavy hmotných bodů o hmotnostech $m_0; m_1; \dots; m_n$. Je-li navíc $m_0 = m_1 = \dots = m_n$, lze afinní kombinací určovat geometrické těžiště mnohoúhelníků.

6.2 Řídící body

V grafických systémech se využívají křivky a plochy, které jsou sestrojovány na základě konečného počtu bodů zadávaných uživatelem – tzv. řídicích bodů. Křivka nebo plocha, kterou takto sestrojujeme, může těmito body procházet, anebo také nemusí. Podle toho dělíme křivky a plochy na:

- a) **interpolační** – procházejí všemi zadanými body $P_0; P_1; \dots; P_n$
- b) **aproximační** – neprocházejí všemi zadanými body $P_0; P_1; \dots; P_n$

Interpolační křivky jsou v systému **Rhinoceros** přístupné z menu **Křivka/Volný tvar/Intepolovat body**. Podrobněji se jimi budeme zabývat ve druhém semestru v numerické matematice. Zde se soustředíme na křivky aproximační, které jsou sestrojovány jako afinní kombinace řídicích bodů a v Rhinoceros najdeme v menu **Křivka/Volný tvar/Řídící body**.

Uživatel zadává

řídící body

$$P_0; P_1; \dots; P_n$$

koeficienty afinních kombinací jsou funkce

$$c_0(t); c_1(t); \dots; c_n(t); t \in \langle t_1; t_2 \rangle$$

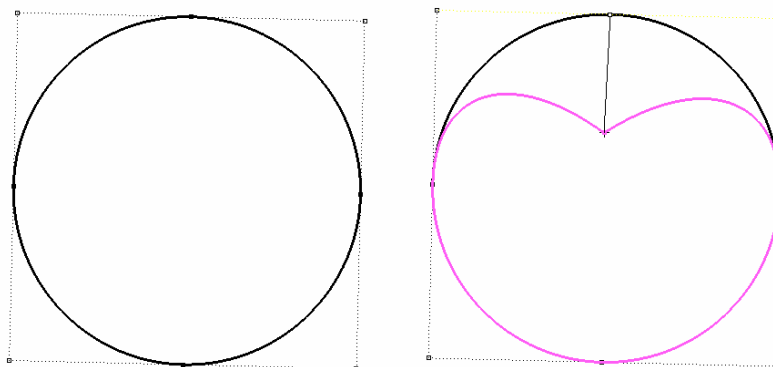
takové, že pro každé

$$t \in \langle t_1; t_2 \rangle$$

je

$$c_0(t) + c_1(t) + \dots + c_n(t) = 1$$

Těmito funkcemi jsou polynomy, jejichž stupeň může uživatel volit uvnitř příkazu, či speciální racionální funkce. Nepoučenému uživateli jsou tyto funkce skryty, v tomto textu o některých z nich pojednáme dále.



Každá křivka generovaná systémem Rhinoceros je pak afinní kombinací řídicích bodů. Tímto způsobem jsou sestrojovány i běžně známé křivky např. kružnice elipsa atd. (včetně úsečky) Například kružnice je afinní kombinací osmi řídicích bodů, které tvoří vrcholy a středy stran čtverce. Funkcemi $c_0(t); c_1(t); \dots; c_n(t)$ jsou funkce „schopné generovat kruhové oblouky“

(podrobněji o nich pojednáme dále). Změnou polohy jediného řídicího bodu je pak uživatel schopen „předvídatelně měnit tvar“ velké části modelované křivky.

Podobně plocha je afinní kombinací

řídících bodů

$$P_{00}; P_{01}; \dots; P_{0n}; P_{10}; P_{11}; \dots; P_{1n}; \dots; P_{m0}; P_{m1}; \dots; P_{mn},$$

koeficienty této kombinace jsou funkce

$$c_{00}(u; v); c_{01}(u; v); \dots; c_{0n}(u; v);$$

$$c_{10}(u; v); c_{11}(u; v); \dots; c_{1n}(u; v);$$

.....

$$c_{m0}(u; v); c_{m1}(u; v); \dots; c_{mn}(u; v);$$

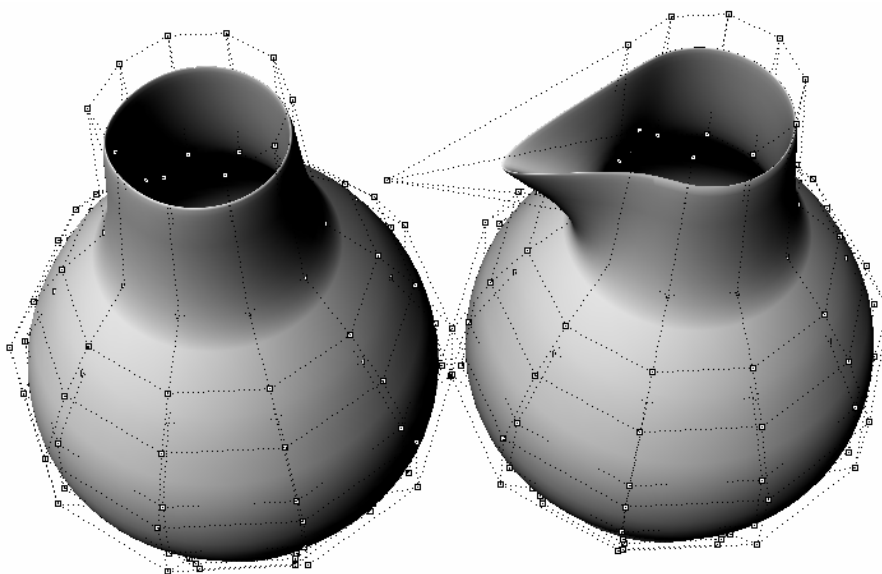
dvou proměnných takové, že pro každé

$$u \in \langle u_1; u_2 \rangle; v \in \langle v_1; v_2 \rangle$$

je

$$c_{00}(u; v) + c_{01}(u; v) + \dots + c_{mn}(u; v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}(u; v) = 1$$

I tyto funkce jsou polynomy či speciální racionální funkce (tentokrát dvou proměnných). Tímto způsobem jsou v Rhinoceros opět sestrojovány všechny plochy včetně „elementárních“ – např. kulová, válcová či kuželová plocha (včetně roviny). Změnou jednoho nebo několika málo řídicích bodů je pak možno dosáhnout požadované změny tvaru části plochy.



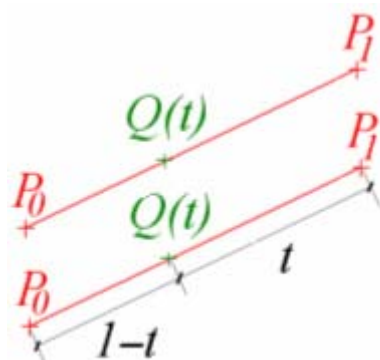
O některých takto generovaných plochách opět pojednáme dále v tomto textu.

6.3 Bézierovy křivky

Jak již bylo řečeno, drtivá většina křivek a ploch je v CAD systémech modelována jako afinní kombinace řídicích bodů. Liší se od sebe vlastně jen počtem těchto bodů a tzv. bázovými funkcemi – tj. funkcemi, které fungují jako koeficienty příslušné afinní kombinace.

První takové křivky navrhl **Pierre Étienne Bézier** (1910 - 1999) pro firmu Renault. Odvodíme je způsobem, který navrhl **Paul de Casteljau** (nar. 1930) pro firmu Citroën

1. Bézierova křivka 1. stupně: Úsečku „vytvoří“ bod Q , jehož souřadnice se mění v závislosti na parametru t :



$$Q(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t \quad t \in \langle 0;1 \rangle \quad (1)$$

Všimněte si, že tento zápis je tvaru

$$Q(t) = B_0^{(1)}(t) \cdot P_0 + B_1^{(1)}(t) \cdot P_1$$

kde $B_0^{(1)}(t) = 1-t$; $B_1^{(1)}(t) = t$

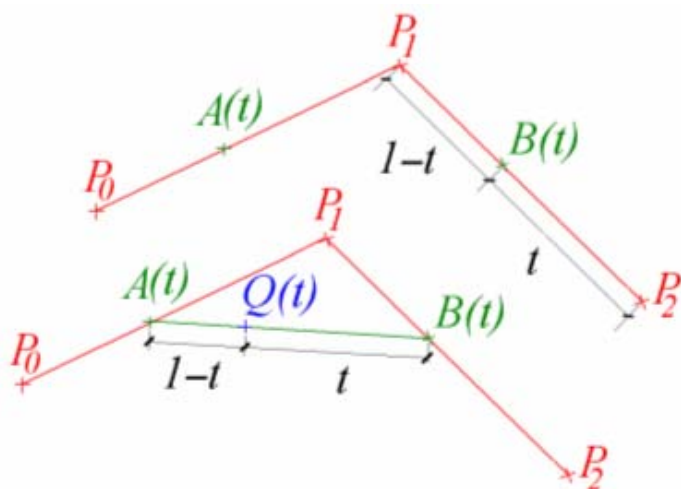
a dále

$$B_0^{(1)}(t) + B_1^{(1)}(t) = 1-t+t=1.$$

Úsečka (1) je tedy afinní kombinací svých krajních bodů. Poznamenejme ještě, že zápisy křivek ve tvaru afinní kombinace vlastních řídicích bodů jsou jen jinou formou zápisu bodové funkce - rovnici (1) lze totiž v ${}_{\infty}E^2$ přepsat do tvaru

$$Q(t) = (p_{01} \cdot (1-t) + p_{11} \cdot t; p_{02} \cdot (1-t) + p_{12} \cdot t; 1)$$

kde p_{ij} značí j -tou souřadnici bodu P_i (v ${}_{\infty}E^3$ analogicky). Je vidět, že „afinní“ zápisy jsou podstatně úspornější a přehlednější, proto je u aproximačních křivek upřednostňujeme.



2. Bézierova křivka 2. stupně:

Přidejme další řídicí bod a sestrojme tutéž afinní kombinaci bodů $P_1; P_2$. Při značení dle připojeného obrázku obdržíme

$$A(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$B(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

Do třetice sestrojme tutéž kombinaci bodů $A(t); B(t)$. Dostaneme

$$Q(t) = A(t) \cdot (1-t) + B(t) \cdot t$$

Po dosazení
a úpravě

$$Q(t) = [P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t] \cdot (1-t) + [P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t] \cdot t$$

$$Q(t) = P_0 \cdot (1-t)^2 + P_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + P_2 \cdot t^2 \quad (2)$$

Označme

$$B_0^{(2)}(t) = (1-t)^2; B_1^{(2)}(t) = 2t(1-t); B_2^{(2)}(t) = t^2 \quad (3)$$

dostaneme zápis tvaru

$$Q(t) = B_0^{(2)}(t) \cdot P_0 + B_1^{(2)}(t) \cdot P_1 + B_2^{(2)}(t) \cdot P_2$$

Lze ukázat, že se jedná o oblouk paraboly (pro rovinný případ dokážeme v kpt. 7. 5). Všimněte si ještě geometrického významu řídicích bodů. Dosazením $t=0$ zjistíme, že

křivka má počáteční bod v bodě P_0 , pro $t=1$ dostáváme koncový bod v P_2 . Je tedy $P_0 = Q(0)$; $P_2 = Q(1)$ Směrové vektory tečen v těchto bodech jsou dány derivacemi $Q'_+(0)$ resp. $Q'_-(1)$.

$$Q'(t) = P_0 \cdot (-2)(1-t) + P_1 \cdot (2-4t) + P_2 \cdot 2t$$

$$Q'_+(0) = -2P_0 + 2P_1 = 2(P_1 - P_0);$$

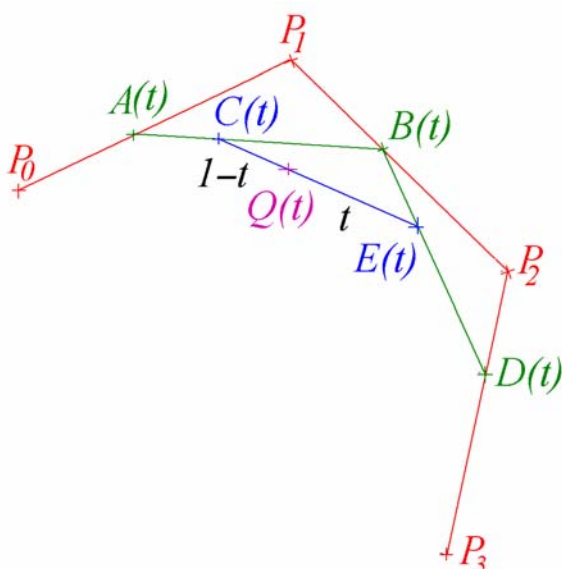
$$Q'_-(1) = -2P_1 + 2P_2 = 2(P_2 - P_1)$$

Směrové vektory tečen v krajních bodech jsou tedy určeny reprezentanty $\overline{P_0P_1}$; $\overline{P_2P_1}$.

Protože platí

$$B_0^{(2)}(t) + B_1^{(2)}(t) + B_2^{(2)}(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1$$

je každý bod takto získané křivky opět afinní kombinací řídicích bodů.



3. Bézierova křivka 3. stupně: Přidáním dalšího bodu a zopakováním předchozího postupu dostaneme:

$$A(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$B(t) = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

$$C(t) = A(t) \cdot (1-t) + B(t) \cdot t$$

$$D(t) = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$

$$E(t) = B(t) \cdot (1-t) + D(t) \cdot t$$

$$Q(t) = C(t) \cdot (1-t) + E(t) \cdot t$$

Po postupném dosazení a úpravě dostaneme křivku ve tvaru

$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^{(3)}(t) \cdot P_i,$$

kde

$$B_0^{(3)}(t) = (1-t)^3; B_1^{(3)}(t) = 3t(1-t)^2; B_2^{(3)}(t) = 3t^2(1-t); B_3^{(3)}(t) = t^3 \quad (4)$$

Jedná se o křivku, která je určena dvojicí resp. trojicí parametrických rovnic, z nichž každá je třetího stupně. Pracujeme-li v prostoru, je křivka určena trojicí parametrických rovnic je třetího stupně. Křivka již nemusí být rovinná. Zcela analogicky jako v předchozím případě lze dokázat, že prochází řídicími body $P_0; P_3$ a vektory $\overline{P_0P_1}$; $\overline{P_3P_2}$ jsou směrové vektory tečen v bodech $P_0; P_3$. Rovněž se lze přesvědčit, že opět platí

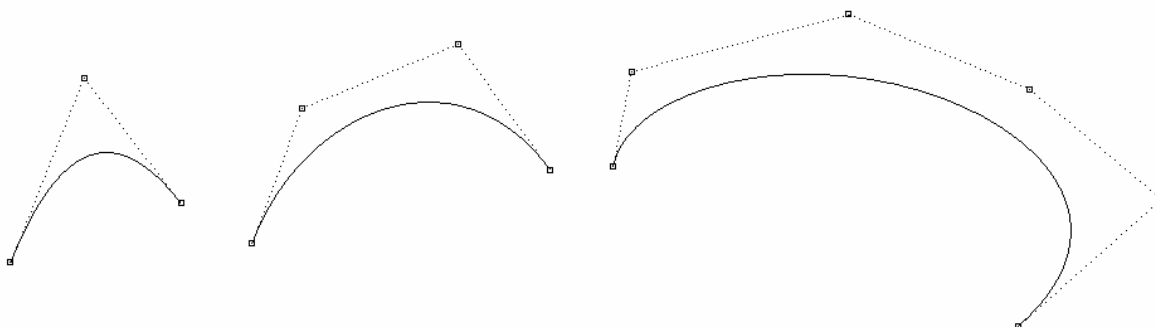
$$B_0^{(3)}(t) + B_1^{(3)}(t) + B_2^{(3)}(t) + B_3^{(3)}(t) = 1$$

4. Bézierova křivka n tého stupně: Výše uvedeným způsobem lze pokračovat dále. Pro řídicí body $P_0; P_1; \dots; P_n$ bychom dostali křivku tvaru

$$Q^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^{(n)}(t), \quad \text{kde} \quad B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

jsou tzv. Bernsteinovy polynomy.

Bézierovy křivky jsou v systému Rhinoceros dostupné z menu **Křivka/Volný tvar/Řídící body**. V příkazovém řádku je možno zadat stupeň křivky. Jak vyplývá z rovnice (3), při volbě stupně n je třeba zadat nejméně $n+1$ řídicích bodů. Vyzkoušejte si, že tímto způsobem lze obdržet i úsečku jako křivku zadanou dvěma řídicími body, které jsou pak krajní body úsečky (viz odst. 1). Na připojeném obrázku je znázorněn jeden oblouk Bézierovy křivky stupně 2, 3, a 5. Zobrazení řídicích bodů je možné zapnout v panelu hlavních nástrojů.



6. 4 Některé další křivky

K sestavení křivky ve tvaru afinní kombinace řídicích bodů, tj. ve tvaru

$$Q(t) = c_0(t) \cdot P_0 + c_1(t) \cdot P_1 + \dots + c_n(t) \cdot P_n$$

lze použít libovolné funkce, které jsou diferencovatelné a splňují podmínku

$$c_0(t) + c_1(t) + \dots + c_n(t) = 1$$

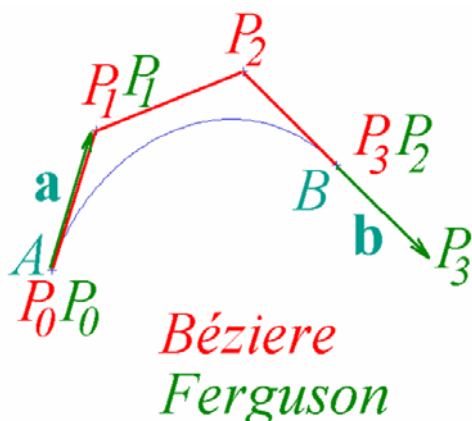
1. Fergusonovy křivky jsou kubické křivky, které se v CAD systémech zadávají dvěma řídicími body $A; B$ a dvěma tečnými vektory $\mathbf{a}; \mathbf{b}$ v těchto bodech. Mezi Fergusonovými a Bézierovými křivkami existuje těsná souvislost, kterou naznačuje připojený obrázek. Je-li Bézierova křivka určena body $P_0; P_1; P_2; P_3$, pak Fergusonova křivka je tvaru

$$Q(t) = F_0(t) \cdot P_0 + 3F_2(t) \cdot (P_1 - P_0) + F_1(t) \cdot P_3 + 3F_3(t) \cdot (P_3 - P_2)$$

kde

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$F_2(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad F_3(t) = t^3 - t^2$$



Z geometrického hlediska je Fergusonova křivka afinní kombinací bodů $P_0; P_3$. Vzhledem k tomu, že všechny řídicí body jsou vlastní, jsou body $\mathbf{a} = P_1 - P_0$ a

$\mathbf{b} = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$ nevlastní. V prostorech E^2 resp E^3 můžeme tedy položit $P_0 = A$; $P_3 = B$; $\overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{P_3P_2} = \mathbf{b}$ a psát

$$Q(t) = F_0(t) \cdot A + F_1(t) \cdot B + 3F_2(t) \cdot \mathbf{a} + 3F_3(t) \cdot \mathbf{b}$$

Fergusonovy křivky jsou v **Rhinoceros** dostupné z menu **Křivka/Volný tvar/Křivka s tečnami**. I zde je patrná těsná souvislost s Bézierovými křivkami: Křivku zadáváme jako Fergusonovu v pořadí $A; \mathbf{a}; B; \mathbf{b}$. Jestliže si však po této konstrukci necháme zobrazit řídicí body, zobrazí se stejná křivka jaké Bézierův oblouk 3. stupně s řídicími body $P_0; P_1; P_2; P_3$.

2. Coonsovy křivky jsou opět afinní kombinací čtyř řídicích bodů. Její vyjádření dostaneme opět vhodnou úpravou Bézierovy křivky, kterou tentokrát nebudeme podrobněji rozebírat.. Coonsovy křivky jsou tvaru

$$Q(t) = \frac{1}{6} \cdot [C_0(t) \cdot P_0 + C_1(t) \cdot P_1 + C_2(t) \cdot P_2 + C_3(t) \cdot P_3] \quad (1)$$

kde

$$C_0(t) = (1-t)^3; C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4; C_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1; C_3(t) = t^3$$

Pro každé t opět platí $C_0(t) + C_1(t) + C_2(t) + C_3(t) = 1$ (přesvědčte se o tom), funkce $C_0(t); C_1(t); C_2(t); C_3(t)$ jsou lineárně nezávislé (proved'te potřebný výpočet), Coonsova křivka je tedy opět afinní kombinací svých řídicích bodů a lineárně nezávislých funkcí.

Pro počáteční bod Coonsova oblouku, tj. pro $t=0$ je $C_0(0)=1$; $C_1(0)=4$; $C_2(0)=1$; $C_3(0)=0$; pro koncový bod ($t=1$) máme $C_0(1)=0$; $C_1(1)=1$; $C_2(1)=4$; $C_3(1)=1$.

Pro počáteční bod Coonsovy kubiky tedy dostaneme

$$Q(0) = \frac{1}{6}(\mathbf{P}_0 + 4\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \frac{1}{6}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) + \mathbf{P}_1 \right] = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{P}_1) \quad (2)$$

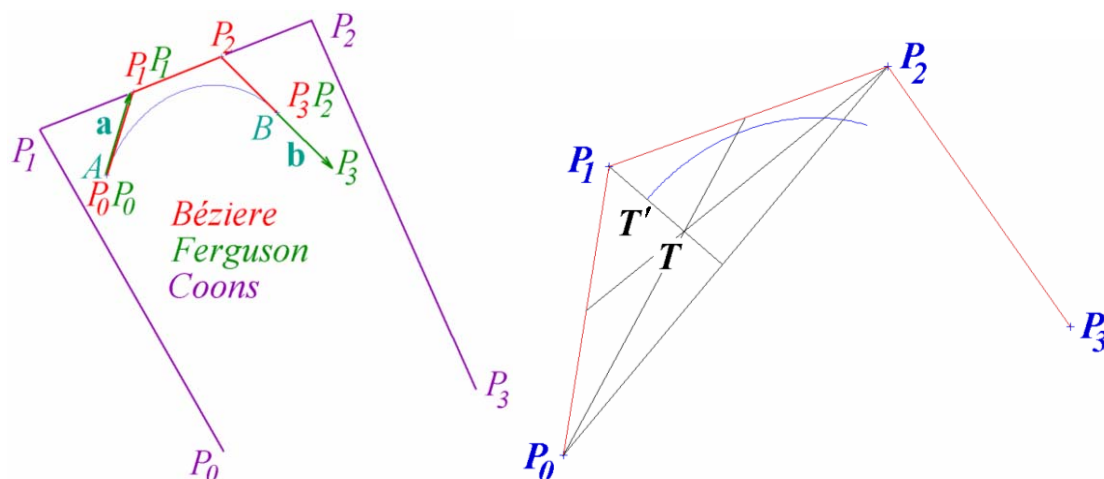
Pro koncový bod pak

$$Q(1) = \frac{1}{6}(\mathbf{P}_1 + 4\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) = \frac{1}{6}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) + \mathbf{P}_2 \right] = \frac{1}{2}(\mathbf{T}' + \mathbf{P}_2) \quad (3)$$

Bod T resp. T' je těžištěm trojúhelníka $\Delta P_0P_1P_2$ resp. $\Delta P_1P_2P_3$, bod $Q(0)$ resp. $Q(1)$ středem úsečky TP_1 resp. $T'P_2$. Tyto body se nazývají antitěžiště $\Delta P_0P_1P_2$ resp. $\Delta P_1P_2P_3$.

Vztah mezi Bézierovým, Fergusonovým a Coonsovým obloukem je znázorněn na připojeném obrázku.

Coonsovy křivky nejsou v Rhinoceros uživateli přímo k dispozici, jsou však zřejmě skrytě používány při napojování křivek např. v nabídce **Křivka/Nástroje pro úpravu křivek/Navázat**. Umožňují totiž snadné navazování s hladkostí $G^{(2)}$ (viz následující kapitola).

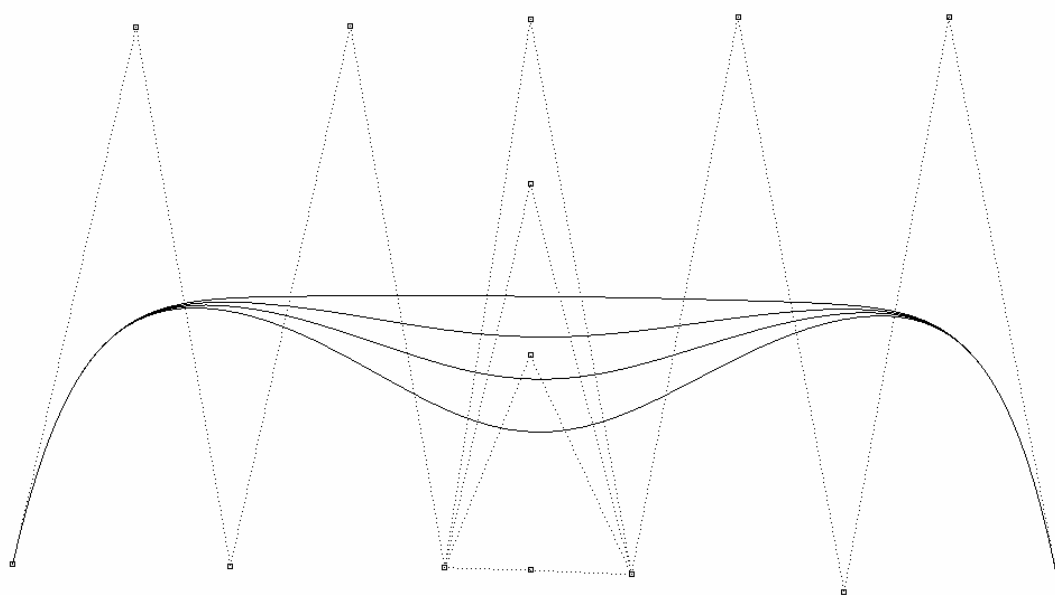


6. 5 Aproximace po částech, B splajny

V kapitole 4. 3. jsme vyjádřili Bézierovy křivky zcela obecného stupně $n \in \mathbb{N}$. Aproximační křivky vyšších stupňů se však používají zřídka.

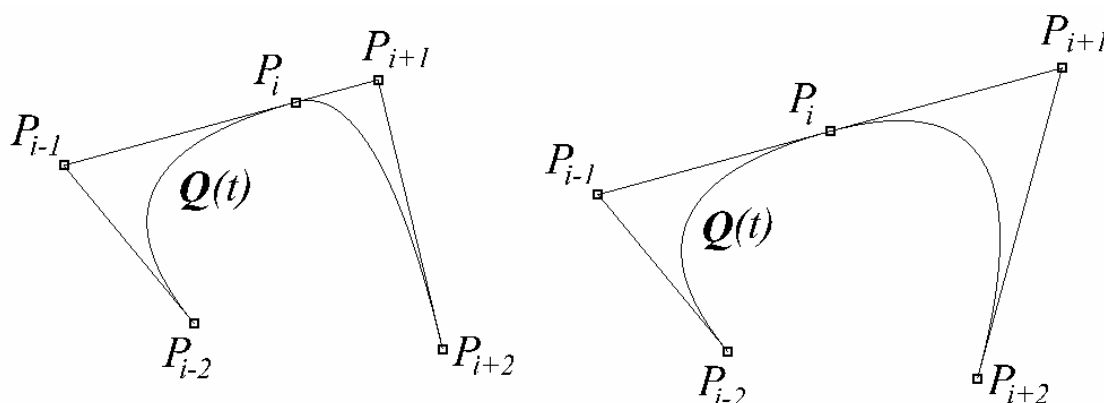
Vezměme kupříkladu Bézierovu křivku 8. stupně. Je určena řídicími body $P_0; P_1; \dots; P_8$ a při změně byť jen jednoho jediného z nich se změní celá křivka – viz připojený obrázek.. Pro každé $0 < t < 1$ je tedy $Q(t) \neq \bar{Q}(t)$, kde Q je bodová funkce křivky před a \bar{Q} je bodová funkce po změně řídicího bodu. Říkáme, že tato křivka není lokálně kontrolovatelná.

Při konstrukci křivek tvarovaných pomocí většího počtu řídicích bodů se proto používá většinou **aproximace po částech**. Znamená to, že pro řídicí body $P_0; P_1; \dots; P_m$ nebudeme sestavovat jeden Bézierův oblouk stupně m , ale raději např. dva oblouky stupně n a $m-n-1$, první určený body $P_0; P_1; \dots; P_n$; druhý určený body $P_{n+1}; P_{n+2}; \dots; P_m$. K tomu je ovšem třeba tyto dva oblouky na sebe vhodně napojit.



1. Spojité napojení: Vhodným napojením rozumíme především to, aby toto napojení bylo spojité, tj. aby počáteční bod navazujícího oblouku byl roven koncovému bodu oblouku předchozího. V předchozí úvaze je tedy třeba především položit $P_n = P_{n+1}$. V dalším textu budeme tedy předpokládat, že výsledná křivka je určena body $P_0; P_1; \dots; P_n$, přičemž bod P_i ; $0 < i < m$ je bod, ve kterém na sebe navazují dva oblouky.

2. Hladké spojení: Pro křivky nejméně 2. stupně je dalším přirozeným požadavkem, aby v bodě napojení existovala společná tečna. To znamená, že pro derivace $Q'(P_i)$; $\overline{Q}'(P_i)$ oblouků Q ; \overline{Q} v bodě napojení P_i by mělo platit $Q'(P_i) = k \cdot \overline{Q}'(P_i)$; $k \neq 0$ (viz připojený obrázek vlevo). V případě, že $k = 1$, tj. $Q'(P_i) = \overline{Q}'(P_i)$, hovoříme o **geometricky hladkém spojení** (vpravo).



Obecně můžeme u křivek n -tého stupně požadovat hladkost popř. geometrickou hladkost až do stupně $n-1$, tj. žádat, aby v bodě P_i platilo

$$Q^{(j)}(P_i) = k \cdot \overline{Q}^{(j)}(P_i); k \neq 0 \quad \text{popř.} \quad Q^{(j)}(P_i) = \overline{Q}^{(j)}(P_i)$$

pro každé $j = 0; 1; \dots; n-1$ (hladkostí nultého stupně se rozumí spojitost). O křivce, která v každém svém bodě splňuje tyto podmínky, říkáme, že má hladkost $C^{(n-1)}$, resp. geometrickou hladkost $G^{(n-1)}$. Dospíváme tak k pojmu splajn křivky.

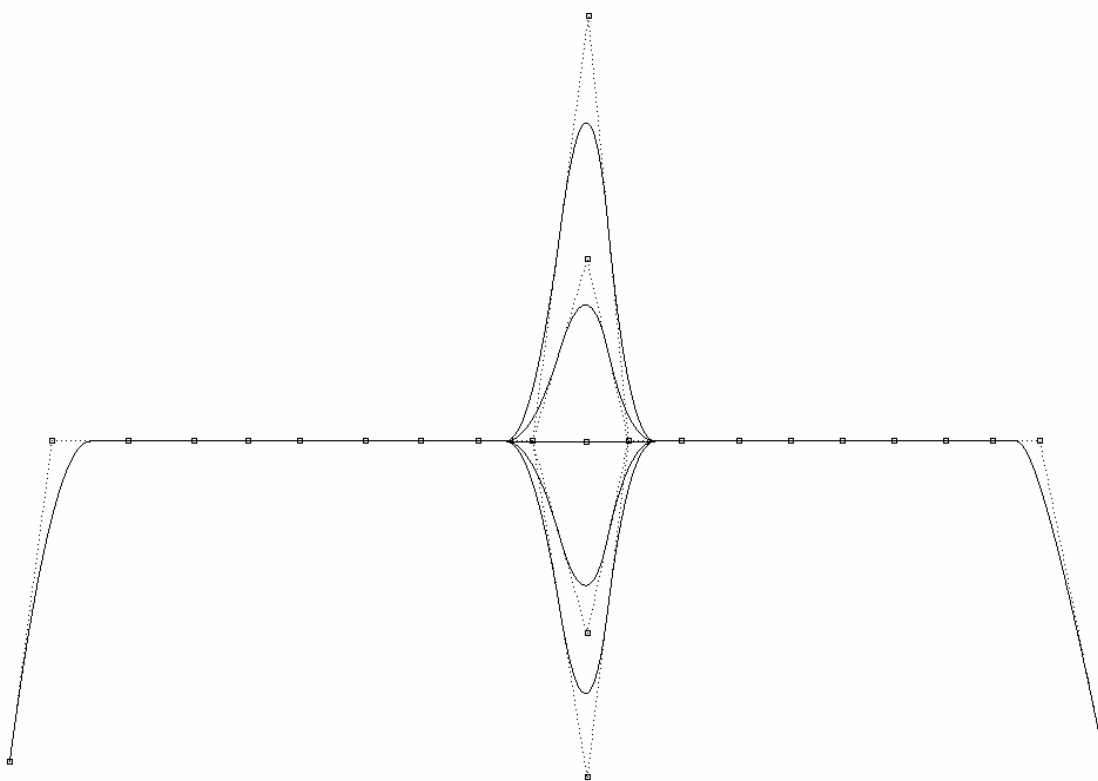
3. Splajn křivka: Splajn křivkou n -tého stupně rozumíme křivku, která vznikla spojením konečného počtu aproximačních popř. interpolačních oblouků n -tého stupně tak, že výsledná křivka má ve všech bodech geometrickou hladkost $G^{(n-1)}$. „Konečným počtem oblouků“ je samozřejmě i jeden oblouk, znamená to, že i jednotlivé oblouky (např. Beziérový, Fergusonovy, Coonsovy atd.) budeme považovat za splajn křivky.

V **Rhinoceros** jsou k dispozici splajny do hladkosti $G^{(2)}$. Jsou dostupné z menu **Křivka/Volný tvar/Rídicí body**. Jak bylo řečeno v závěru kapitoly 5. 2., při volbě stupně n Je třeba zadat nejméně $n+1$ bodů. Je-li zadáno bodů méně, příkaz se sice vykoná, výsledný stupeň křivky všem bude nižší. Jsou-li například zadány pouze tři body, bude výsledná křivka pouze stupně dvě, přestože jsme požadovali např. čtyři. Je-li zadáno bodů více než je potřeba pro konstrukci křivky požadovaného stupně, je sestrojována splajn křivka navázaná z oblouků nižších stupňů. Lze se o tom přesvědčit ve vlastnostech kliknutím na tlačítko **Podrobnosti**.

Splajn křivky dále systém využívá při navazování izolovaných oblouků z menu **Křivka/Nástroje pro úpravu křivek/Navázat**. V tomto příkazu jsou k dispozici volby **Pozice** – zaručuje spojitost výsledné křivky, tedy hladkost $G^{(0)}$, **Tečnost** – v bodě spojení zaručuje společnou tečnu, tj. hladkost $G^{(1)}$ a **Křivost** – v bodě spojení zaručuje společnou oskulační kružnici, zaručuje tedy hladkost $G^{(2)}$.

Rhinoceros umožňuje rovněž změnu tvaru již sestavené křivky, a to nejen změnou souřadnic řídicích bodů, ale umožňuje rovněž řídicí body vkládat či odebírat, dodatečně lze také změnit stupeň sestavené křivky, a to příkazem **Rekonstruovat**.

4. Lokální kontrolovatelnost: Křivka, která vznikla aproximací po částech, tj. napojením několika oblouků nižších stupňů, se oproti křivkám vyšších stupňů vyznačuje tzv. lokální kontrolovatelností. Změna jednoho řídicího bodu takové křivky totiž nemusí mít vliv na konstrukci celé křivky. U těchto křivek ovlivňuje maximálně tři její sousední oblouky.



5. Bázové funkce: V odst. 1 kapitoly 2. 3 jsme hovořili o lineárních kombinacích vektorů a bázových vektorech. Tyto pojmy mají smysl rovněž u funkcí. Lineární kombinací funkcí $f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t)$ rozumíme libovolnou funkci $f(t)$, pro kterou existují reálná čísla $c_1; c_2; \dots; c_n$ tak, že platí

$$f(t) = c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) + \dots + c_n \cdot f_n(t)$$

Například funkce $f(t) = 5e^{t+1} \sin t$ je lineární kombinací funkcí $f_1(t) = e^{t+1} \sin t$; $f_2(t) = e^t \sin t$, protože pro $c_1 = 4$; $c_2 = e$ máme

$$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) = 4 \cdot e^{t+1} \sin t + e \cdot e^t \sin t = 4 \cdot e^{t+1} \sin t + e^{t+1} \sin t = 5 \cdot e^{t+1} \sin t = f(t)$$

Naopak funkce $B_2^{(2)}(t) = t^2$ není lineární kombinací funkcí $B_0^{(2)}(t) = (1-t)^2$; $B_1^{(2)}(t) = 2t(1-t)$; neboť pro každá dvě čísla $c_1; c_2$ je $t^2 \neq c_1 \cdot (1-t)^2 + c_2 \cdot 2t(1-t)$.

Funkce $f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t)$, z nichž ani jedna není lineární kombinací ostatních, nazýváme **lineárně nezávislé**, nebo též **bázové funkce**.

Ke konstrukci aproximačních křivek tvaru

$$Q(t) = f_0(t) \cdot P_0 + f_1(t) \cdot P_1 + \dots + f_i(t) \cdot P_i + \dots + f_n(t) \cdot P_n \quad (1)$$

nemá smysl použít funkci funkce, která by byla lineární kombinací ostatních. Pokud by totiž funkce $f_i(t)$ v zápisu (4) byla lineární kombinací ostatních funkcí, byl by bod P_i afinní kombinací ostatních řídicích bodů a konstrukce křivky by se bez něj mohla obejít.

6. Uniformní a neuniformní B-splajny: Splajny, k jejichž konstrukci je použito výhradně bázových funkcí nazýváme **bázové splajny**, krátce **B-splajny**. Tyto B-splajny lze dále dělit podle tvaru tzv. uzlového vektoru (ten určuje, jakým způsobem jsou konstruovány bázové funkce) na uniformní a neuniformní. Obecnější informace o těchto splajnech a způsobu jejich konstrukce překračují rámec tohoto textu, a proto je nebudeme uvádět. Dodejme pouze, že Bernsteinovy polynomy – viz vztah (3) kpt. 7. 3. – jsou bázové a jednotlivé oblouky Bézierových křivek jsou neuniformní. V dalším textu je ještě poněkud zobecníme.

19. B-splajn křivky v euklidovském prostoru: Pokusme se nyní zapsat B-splajn křivku jako euklidovskou bodovou funkci. Víme, že B-splajn křivku je možné zapsat ve tvaru afinní kombinace řídicích bodů (viz vztah 1), kde $P_0; P_1; \dots; P_n$ jsou **euklidovští reprezentanti bodů projektivního prostoru** a $f_0(t); f_1(t); \dots; f_n(t)$ jsou bázové funkce, pro které je

$$\forall t \in D: f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t) = 1 \quad (2)$$

Rozepíšeme-li rovnici (1) do souřadnic v ${}_{\infty}E^3$, dostaneme

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} & p_{11} & \dots & p_{n1} \\ p_{02} & p_{12} & \dots & p_{n2} \\ p_{03} & p_{13} & \dots & p_{n3} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Z toho vyplývá, že $q_4 = f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t)$ a díky podmínce (2) tedy $q_4 = 1$. V zápisu (3) lze tedy čtvrté souřadnice bodů vynechat a psát

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} & p_{11} & \dots & p_{n1} \\ p_{02} & p_{12} & \dots & p_{n2} \\ p_{03} & p_{13} & \dots & p_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Díky tomu lze tyto křivky zapsat ve tvaru afinní kombinace i v euklidovském prostoru:

$$Q(t) = f_0(t)P_0 + f_1(t)P_1 + \dots + f_n(t)P_n \quad (4)$$

kde $Q(t); P_i \in E^3; i = 0; 1; \dots; n$. Vidíme, že v případě B-splajn křivek je rovnice (4) formálně shodná s rovnicí (1).

6.6 NURBS křivky

Vážným nedostatkem neuniformních B-splajn křivek je nemožnost přesného modelování kuželosečkových oblouků a dále skutečnost, že tyto křivky nejsou invariantní vůči projektivním transformacím, což je nepříjemné v případě, je-li v geometrickém modeláři použito středové promítání. Tyto nedostatky překonávají tzv. NURBS křivky (Non Uniform Rational B-Spline)

NURBS křivky mají tyto vlastnosti:

1. Lze je vždy zadat tak, aby procházely prvním a posledním bodem řídicího polygonu.
2. Jsou lokálně kontrolovatelné, tj. změna polohy, resp. váhy jednoho bodu má tedy vliv pouze na část křivky.
3. Jsou invariantní vůči projektivním transformacím
4. Umožňují přesné vyjádření kuželoseček.

1. Definice NURBS křivky: Necht' $P_0; P_1; \dots; P_n$ jsou euklidovští reprezentanti bodů projektivního prostoru, $f_0(t); f_1(t); \dots; f_n(t)$ jsou bázové funkce takové, že

$$\forall t \in D: f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t) = 1 \quad (1)$$

NURBS křivkou rozumíme množinu všech bodů lineárních kombinací reprezentantů $f_i(t)P_i$, tj.

$$\forall t \in D: Q(t) = \omega_0 f_0(t) \cdot P_0 + \omega_1 f_1(t) \cdot P_1 + \dots + \omega_n f_n(t) \cdot P_n = \sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t) \cdot P_i \quad (2)$$

Koeficienty $\omega_0; \omega_1; \dots; \omega_n$ této kombinace nazýváme váhy bodů $P_0; P_1; \dots; P_n$. Vektor $\omega = (\omega_0; \omega_1; \dots; \omega_n)$ nazýváme váhovým vektorem.

Připomínáme, že alespoň jedna váha musí být nenulová (nulový vektor totiž nemůže být reprezentantem bodu v projektivním prostoru).

2. Příklad: Pomocí Bernsteinových polynomů sestrojme NURBS křivku 2. stupně s váhami

- | | |
|---|--|
| a) $\omega_0 = 1; \omega_1 = \frac{1}{2}; \omega_2 = 1$ | d) $\omega_0 = 2; \omega_1 = 4; \omega_2 = 2$ |
| b) $\omega_0 = 1; \omega_1 = 1; \omega_2 = 1$ | e) $\omega_0 = 10; \omega_1 = 20; \omega_2 = 10$ |
| c) $\omega_0 = 1; \omega_1 = 2; \omega_2 = 1$ | f) $\omega_0 = -1; \omega_1 = -2; \omega_2 = -1$ |

Řešení: Bernsteinovy polynomy 2. stupně jsme sestrojili – viz vztah (2) v kpt. 9. 9

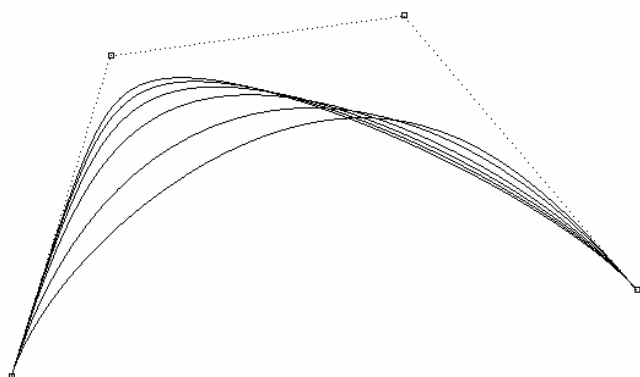
a) $Q_a(t) = \omega_0 f_0(t) \cdot P_0 + \omega_1 f_1(t) \cdot P_1 + \omega_2 f_2(t) \cdot P_2 = 1 \cdot (1-t)^2 \cdot P_0 + \frac{1}{2} [2t \cdot (1-t)] P_1 + 1 \cdot t^2 P_2$

b) $Q_b(t) = \omega_0 f_0(t) \cdot P_0 + \omega_1 f_1(t) \cdot P_1 + \omega_2 f_2(t) \cdot P_2 = 1 \cdot (1-t)^2 \cdot P_0 + 1 \cdot [2t \cdot (1-t)] P_1 + 1 \cdot t^2 P_2$

c) $Q_c(t) = \omega_0 f_0(t) \cdot P_0 + \omega_1 f_1(t) \cdot P_1 + \omega_2 f_2(t) \cdot P_2 = 1 \cdot (1-t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot [2t \cdot (1-t)] P_1 + 1 \cdot t^2 P_2$

Křivky $Q_d(t); Q_e(t); Q_f(t)$ ze zadání d) e) f) analogicky (přenecháváme čtenáři)

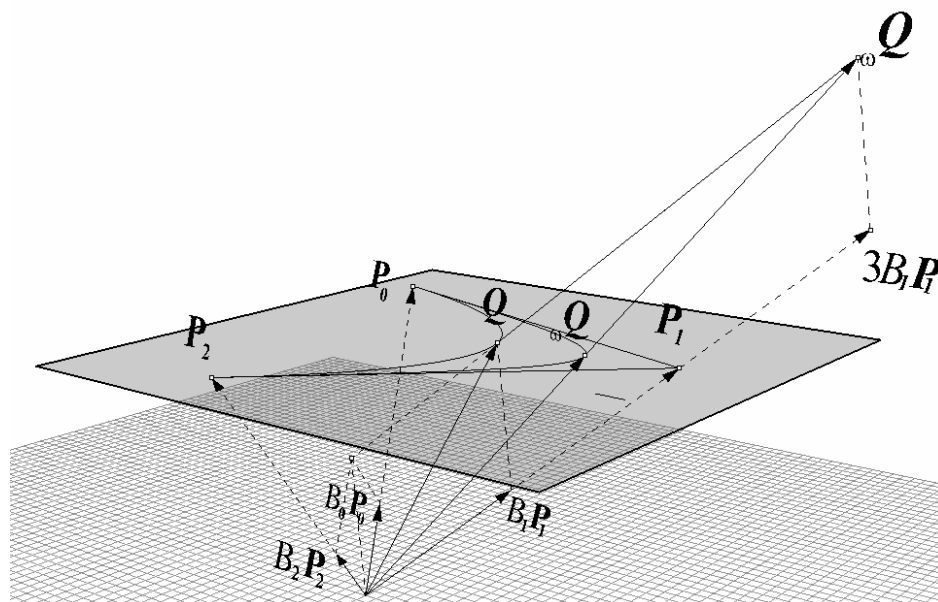
Všimněte si, že pro $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$ dostáváme Bézierovu křivku 2. stupně. Proč se tyto křivky označují jako racionální, když v našem zápisu žádné lomené výrazy nejsou, vysvětlíme v následujícím textu.



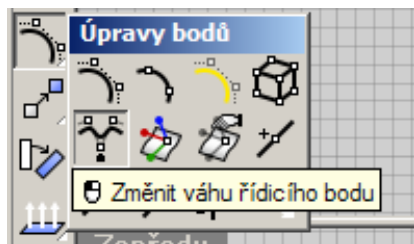
3. Geometrický význam váhového vektoru objasníme na případu rovinné B-splajn křivky 2. stupně. Každý bod B-splajn křivky vzniká jako kombinace $B_0P_0 + B_1P_1 + B_2P_2$ euklidovských reprezentantů řídicích bodů.

Díky tomu, že tato kombinace je afinní - tj. díky podmínce (2) - je výsledkem euklidovský reprezentant, tj. reprezentant, kterého lze rovněž považovat za bod v euklidovské

rovině. Váhy přiřazené jednotlivým řídicím bodům způsobí, že se z původní afinní kombinace reprezentantů stane pouze kombinace lineární, tj. výslední reprezentanti křivky „opustí“ euklidovskou rovinu. Na obrázku máme další křivku, kde jsme bodům $P_0; P_2$ přiřadili váhy $\omega_0 = \omega_2 = 1$ a bodu P_1 jsme přiřadili váhu $\omega_1 = 3$. Díky ní není součet $B_0P_0 + \omega_1B_1P_1 + B_2P_2$ euklidovským reprezentantem a opustil euklidovskou rovinu. Bod ${}^{\omega}Q$, který tento součet reprezentuje, se v projektivním prostoru zřejmě bude se vzrůstajícím ω_1 blížit bodu P_1 . To znamená, že i jeho euklidovský reprezentant ${}^{\omega}Q$ se bude blížit k euklidovskému reprezentantovi P_1 bodu P_1 .



NURBS křivky tak lze tvarovat nejen změnou řídicích bodů, ale i změnou jejich vah. V euklidovské rovině se to projeví tak, že se vzrůstající vahou se budou body křivky více blížit příslušnému řídicímu bodu. Naopak bude-li váha menší, křivka se od řídicího bodu vzdálí. Změnu tvaru NURBS křivky pomocí vah ovšem nelze chápat jen takto intuitivně. Jak uvidíme v dalším textu, mají tyto změny hlubší geometrické souvislosti.



4. NURBS křivky v Rhinoceros: Váhu řídicích bodů můžeme měnit příkazem **Váha**, a to v rozmezí 0.1–10. Na připojeném obrázku je původně kubická Bézierova křivka, u níž byla změněna váha jednoho řídicího bodu postupně na 0.5; 2; 3; 4; 5.

5. Poznámka: Je zřejmé, že vynásobíme-li váhy libovolným číslem různým od nuly, křivka se nezmění (Přesvědčte se o tom v Rhinoceros!). Vektory $(\omega p_1; \omega p_2; \omega p_3; \omega p_4)$; $(k\omega p_1; k\omega p_2; k\omega p_3; k\omega p_4)$; $k \neq 0$ jsou totiž reprezentanty téhož bodu. V příkladu 2 je tedy $Q_c(t) = Q_d(t) = Q_e(t) = Q_f(t)$.

6. NURBS křivka v euklidovském prostoru: Přepíšeme-li rovnici (2) do souřadnic v ${}_{\infty}E^2$, máme

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} & p_{11} & \dots & p_{n1} \\ p_{02} & p_{12} & \dots & p_{n2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 f_0(t) \\ \omega_1 f_1(t) \\ \dots \\ \omega_n f_n(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Tedy

$$q_1 = p_{01}\omega_0 f_0(t) + p_{11}\omega_1 f_1(t) + \dots + p_{n1}\omega_n f_n(t) = \sum_{i=0}^n p_{i1}\omega_i f_i(t)$$

$$q_2 = p_{02}\omega_0 f_0(t) + p_{12}\omega_1 f_1(t) + \dots + p_{n2}\omega_n f_n(t) = \sum_{i=0}^n p_{i2}\omega_i f_i(t)$$

$$q_3 = \omega_0 f_0(t) + \omega_1 f_1(t) + \dots + \omega_n f_n(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)$$

Abychom obdrželi kartézské souřadnice bodu Q v euklidovském prostoru je třeba, abychom bod $Q = (q_1; q_2; q_3) \in {}_{\infty}E^2$ reprezentovali euklidovským reprezentantem $Q = \left(\frac{q_1}{q_3}; \frac{q_2}{q_3}; 1 \right)$, tedy

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{\sum_{i=0}^n p_{i1}\omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)}; \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{\sum_{i=0}^n p_{i2}\omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)}$$

Vyjádření NURBS křivky v euklidovském prostoru je tedy tvaru

$$Q(t) = \left[\frac{q_1}{q_3}; \frac{q_2}{q_3} \right] = \left[\frac{\sum_{i=0}^n p_{i1}\omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)}; \frac{\sum_{i=0}^n p_{i2}\omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)} \right] = \frac{\sum_{i=0}^n [p_{i1}; p_{i2}] \omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)}$$

takže

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^n P_i \omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)}; \quad Q(t) \in E^2 \quad (4)$$

Ve srovnání s vyjádřením v projektivní rovině „přibývá“ jmenovatel – odtud neuniformní **racionální** B-splajn křivky. Jsou-li funkce $f_i(t)$ ve výrazu (4) Bernsteinovy polynomy, nazýváme křivku **racionální Bézierovou křivkou**. Výraz (4) se v literatuře často uvádí ve tvaru

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot R_i(t) \quad (5)$$

kde

$$R_i(t) = \frac{\omega_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i f_i(t)} \quad (6)$$

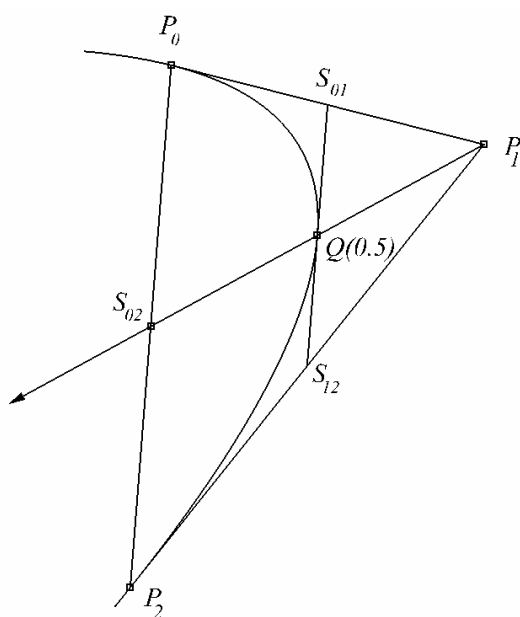
je tzv. racionální báze. I v euklidovském prostoru samozřejmě platí poznámka 5 – použijeme-li ve výrazu (4) resp. (5) a (6) místo vah ω_i jejich nenulové násobky $k\omega_i$, výrazy se nezmění.

7. Kuželosečkové oblouky jako NURBS:

a) Uvažujme nejdříve Bézierovu křivku 2. stupně, která má tvar

$$Q(t) = P_0 \cdot (1-t)^2 + P_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + P_2 \cdot t^2$$

(viz kpt. 7. 2., výraz 2). Označme S_{02} střed úsečky P_0P_2 a určíme bod $Q(\frac{1}{2})$. Podle algoritmu de Casteljau (viz kpt. 7.2) to bude střed úsečky $S_{01}S_{12}$, kde S_{01} je střed P_0P_1 , S_{12} střed P_1P_2 . Úsečky P_0P_1 ; P_1P_2 jsou však tečny oblouku v bodech P_0 ; P_2 . Bod P_1 je tedy pól a bod M je k němu polárně sdružený. Úsečka $S_{01}S_{12}$ je střední příčkou $\Delta P_0P_1P_2$, z čehož vyplývá, že $Q(\frac{1}{2})$ je středem úsečky P_1S_{02} . Je tedy $(P_1; S_{02}; Q) = -1$, z toho už ovšem plyne, že vyšetřovaným obloukem je oblouk paraboly (viz kpt. 5.4. odst. 6)



b) Podívejme se nyní na NURBS křivku 2. stupně s váhami $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega$. Podle poznámky 4 a příkladu 2b) dostáváme

$$Q(t) = P_0 \cdot (1-t)^2 + P_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + P_2 \cdot t^2$$

tedy opět Bézierovu křivku 2. stupně, o které již víme, že je to parabola.

c) **Uvažujme nyní váhy** $\omega_0 = \omega_2 \neq \omega_1$. Z poznámky 5 je opět zřejmé, že v tom případě můžeme položit $\omega_0 = \omega_2 = 1$; $\omega_1 \neq 1$. Zamysleme se ještě jednou nad geometrickým významem váhy $\omega_1 \neq 1$. Vážením přejde bod Q projektivního bodu prostoru do bodu Q' , jehož euklidovským reprezentantem je Q' . V syntetickém modelu projektivní roviny dostaneme bod Q' jako obraz

bodu Q ve středové kolineaci $kol_1(S_1; P_0P_2; Q \rightarrow Q')$ a bod Q jako obraz bodu Q' ve středové kolineaci $kol_2(S_2; P_0P_2; Q' \rightarrow Q)$. Protože kol_1 i kol_2 zachovávají dvojpoměr, jejich

složení opět zachovává dvojpoměr, je to tedy rovněž kolineace. NURBS křivka k s vahami $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$ je parabola (viz předchozí odstavec), podle kpt. 4.4. odst. 3 je tedy křivka s vahami $\omega_0 = \omega_2 = 1$; $\omega_1 \neq 1$ kuželosečka. Zbývá rozhodnout, která. Uvažujme tedy NURBS křivku tvaru

$$\mathbf{K}(t) = \frac{(1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + 2\omega t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}$$

a spočtěme bod $\mathbf{Q}(\frac{1}{2})$:

$$\mathbf{Q}(\frac{1}{2}) = \frac{(1-\frac{1}{2})^2 \cdot \mathbf{P}_0 + 2\omega \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})\mathbf{P}_1 + (\frac{1}{2})^2 \mathbf{P}_2}{(1-\frac{1}{2})^2 + 2\omega \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \mathbf{P}_0 + \frac{1}{2} \omega \mathbf{P}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{P}_2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \omega}$$

Zapsáno pomocí polohových vektorů $\overrightarrow{OQ}; \overrightarrow{OP}_0; \overrightarrow{OP}_1; \overrightarrow{OP}_2$ bodů $Q; P_0; P_1; P_2$:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OP}_0 + \frac{1}{2} \omega \cdot \overrightarrow{OP}_1 + \frac{1}{4} \overrightarrow{OP}_2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \omega}$$

Využijme afinní invariantnosti, tj. skutečnosti, že volbou jiných řídicích bodů (pokud zůstanou vlastní) nezměníme počet nevlastních bodů kuželosečky (tj. eliptický oblouk zůstane eliptickým a hyperbolický hyperbolickým). Položme tedy $\overrightarrow{OP}_0 = (-1; 0)$; $\overrightarrow{OP}_2 = (1; 0)$.

Dostáváme

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\omega}{1+\omega} \overrightarrow{OP}_1, \quad \text{neboli} \quad \frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{\omega}{1+\omega} \quad (7)$$

Bod P_1 je pólou kuželosečky, přímka $p = P_0P_2$ její polárou (při naší volbě je polárou osa x). Bodem polárně sdruženým s P_1 je počátek O souřadné soustavy. Označme B další průsečík sečny OP_1 s kuželosečkou. Protože $(P_1; O; Q; B) = -1$, je

$$\frac{(P_1; O; A)}{(P_1; O; Q)} = \frac{(P_1; A)}{(O; A)} \cdot \frac{(O; Q)}{(P_1; Q)} = -1$$

a

$$\frac{(O; Q)}{(O; P_1)} = \frac{(O; Q)}{(O; Q) + (P_1; Q)} = \frac{1}{1 + \frac{(P_1; Q)}{(O; Q)}} = \frac{1}{1 + \frac{(P_1; B)}{(O; B)}} \stackrel{(7)}{=} \frac{\omega}{1+\omega}$$

Je-li $\omega < 1$, je $\frac{\omega}{1+\omega} = \frac{1}{1 + \frac{|PB|}{|OB|}} < \frac{1}{2}$, takže $\frac{|PB|}{|OB|} = (P_1; O; B) > 1$. To ovšem znamená, že v případě

$\omega < 1$ je uvažovaná křivka elipsou (viz první obrázek v kpt. 5.4.). Je-li $\omega > 1$, je $\frac{\omega}{1+\omega} = \frac{1}{1 + \frac{|PB|}{|OB|}} > \frac{1}{2}$, takže $\frac{|PB|}{|OB|} = (P_1; O; B) < 1$. To znamená, že pro $\omega > 1$ dostáváme

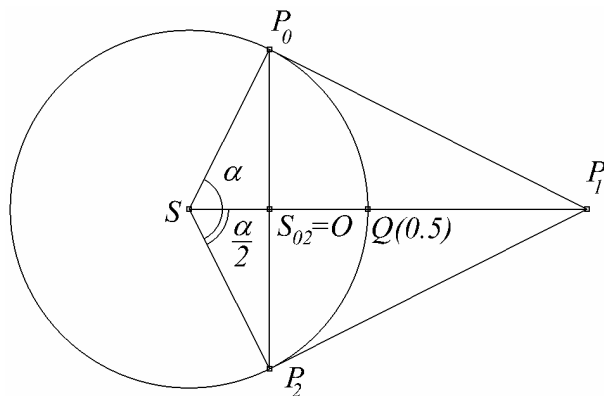
hyperbolu (viz tentýž obrázek). Můžeme tedy shrnout: Racionální Bézierova křivka 2. stupně s vahami $\omega_0 = \omega_2$ je:

pro $\omega_1 < \omega_0 = \omega_2$ eliptický oblouk;

pro $\omega_1 = \omega_0 = \omega_2$ parabolický oblouk

pro $\omega_1 > \omega_0 = \omega_2$ hyperbolický oblouk

8. Kruhový oblouk a kružnice jako NURBS: Kružnice je důležitý speciální případ elipsy. V CAD systémech je hojně používána, a to nejen sama o sobě, ale slouží k modelování celé řady těles. Podívejme se tedy na podmínky, za kterých eliptický oblouk z předchozího odstavce přejde v oblouk kruhový. V případě kruhového oblouku musí především být



$|P_1P_0| = |P_1P_2|$. Umístíme počátek do středu S_{02} úsečky P_0P_2 . A dále předpokládejme $\omega_0 = \omega_2 = 1$. Zbývá tedy najít ω_1 . Podle (7)

má být $\frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{\omega}{1 + \omega}$. Je-li kuželosečka

kružnicí, lze délky $|OQ|$, $|OP_1|$ vyjádřit pomocí jejího poloměru a příslušného středového úhlu:

$$|OS| = r \cos \frac{\alpha}{2}; |SP_1| = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \text{ Dále je}$$

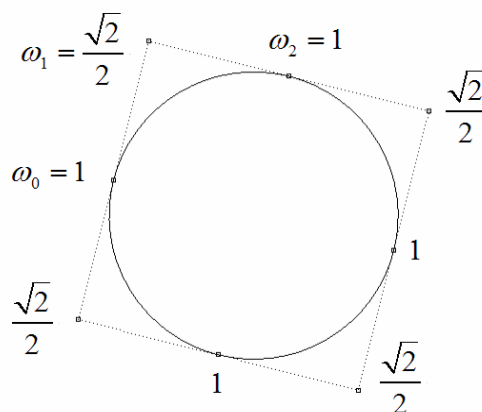
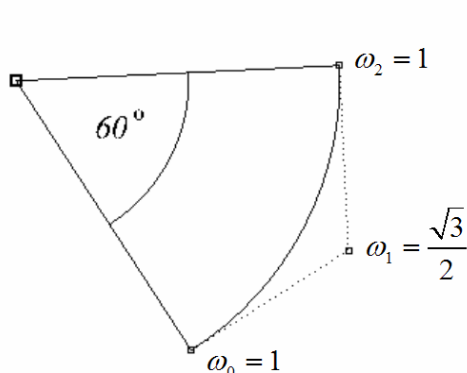
$$|OQ| = |SK| - |OS| = r - r \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$|OP_1| = |SP_1| - |OS| = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} - r \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Pro poměr těchto vzdáleností tedy dostáváme:

$$\frac{\omega}{1 + \omega} = \frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{(r - r \cos \frac{\alpha}{2}) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{r(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2})} = \frac{r(1 - \cos \frac{\alpha}{2}) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{r(1 - \cos \frac{\alpha}{2})(1 + \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \omega = \cos \frac{\alpha}{2}$$

Kruhový oblouk se středovým úhlem α tedy dostaneme volbou řídicích bodů $P_0; P_1; P_2$ tak, aby $|P_1P_0| = |P_1P_2|$, $\angle P_0P_1P_2 = \pi - \alpha$ (proč?) a váhového vektoru $\omega = (1; \cos \frac{\alpha}{2}; 1)$. Speciálně pro čtvrtkružnici tedy musí být $\omega = (1; \cos \frac{\pi}{4}; 1) = (1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$ a řídicí body tvoří vrcholy rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka. Celou kružnici pak obdržíme hladkým spojením čtyř takových oblouků, tj. použijeme celkem osm řídicích bodů, z nichž krajní body každého segmentu tvoří středy stran a prostřední body jeho vrcholy. Středy mají váhu $\omega = 1$, vrcholy váhu $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (popřípadě násobky těchto hodnot – viz opět poznámku 5). Snadno s o tom můžeme přesvědčit v **Rhinoceros**. Sestrojme kruhový oblouk s libovolným středovým úhlem, zobrazme jeho řídicí body a zkonteolujme jejich váhy. Dále sestrojíme kružnici (jakýmkoli způsobem), opět zobrazme její řídicí body a zkontrolujme jejich váhy.



V CAD systémech je kružnice sestrojována spojením čtyř čtvrtkružnic, (viz kpt. 6. 5, odst. 3), přičemž toto spojení je stupně $G^{(1)}$.

9. Eliptický oblouk a elipsa jako NURBS: NURBS křivky jsou invariantní vůči projektivním transformacím. Znamená to následující: Pro každé dvě NURBS křivky $\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2$ stupně n s týmiž bázovými funkcemi existuje projektivní zobrazení \mathcal{F} takové, že $\mathcal{F} : \mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2$, tj. obrazem křivky \mathbf{k}_1 je křivka \mathbf{k}_2 , a to bez ohledu na použité váhy, či řídicí body. Vezmeme-li libovolnou racionální Bézierovu křivku druhého stupně, jedná se vždy o oblouk kuželosečky. Použijeme-li váhy $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$, je křivka \mathbf{k}_1 obloukem paraboly. Použijeme-li $\omega_0 = \omega_2; \omega_1 \neq \omega_0$, je křivka obloukem eliptickým nebo hyperbolickým. Přitom jak eliptický, tak hyperbolický oblouk lze obdržet jako obraz oblouku parabolického ve vhodném projektivním zobrazení.

Dále lze ukázat, že dvě NURBS křivky stupně n s týmiž bázovými funkcemi a navíc stejným váhovým vektorem ω , jsou afinně invariantní, tj. pro dvě takové křivky $\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2$ vždy existuje afinní zobrazení \mathcal{A} takové, že $\mathcal{A} : \mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2$, a to bez ohledu na použité řídicí body.

10. „Rytzova“ konstrukce elipsy v Rhinoceros. Máme-li pravítkem a kružítkem sestrojít osy elipsy, známe-li její sdružené průměry, je možné použít Rytzovou konstrukci (viz odst. 4. kpt. 5. 6.). Ocítíme-li se ve stejné situaci v Rhinoceros, máme k dispozici jednodušší cestu.

Pomocí příkazu **Kopírovat** aplikované na zadané sdružené průměry opíšeme hledané elipse rovnoběžník, jehož vrcholy spolu s koncovými body zadaných průměrů poslouží jako řídicí body čtyř Bézierových oblouků druhého stupně. Po sestrojení těchto oblouků změníme váhy ve vrcholech rovnoběžníka na hodnotu $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Takto vzniklé čtyři eliptické oblouky v případě potřeby sjednotíme příkazem **Spojit**.

