

7 Úvod do kinematické geometrie v rovině

V této kapitole se budeme zabývat pohybem. Slovo „pohyb“, které jsme použili v minulé kapitole, používáme zcela běžně, známe ho i z fyziky. Zde jsme ho záměrně prozatím uváděli v úvozovkách, protože ho lze matematicky precizovat. Návod k tomu, jak to udělat dávají kapitoly 3.3 (pro pohyb v rovině) a 3.4 (pro pohyb v prostoru). Na rozdíl od fyziky se nebudeme zabývat příčinami pohybu, tj. silami, které pohyb způsobují. Nebudou nás tedy zajímat ani deformační účinky sil, budeme předpokládat, že pohybující se objekt nemění svůj tvar. Budeme se tedy zajímat jen o kinematiku objektů a svoji pozornost omezíme na pohyb v rovině.

7.1 Bodová funkce, pohyb

Pokusme se nyní přesněji specifikovat, co budeme rozumět rovinným objektem a jeho pohybem. „Pohyb“ probíhá v čase, jeho „výsledkem“ musí být nová „poloha“ objektu, kterou lze z té původní získat přímoú shodností.

1. Pohyb bodu v rovině: Podívejme se nejdříve na pohyb objektu, který fyzikové označují jako hmotný bod – tedy objektu zanedbatelných rozměrů. Pohyb probíhá v čase, který lze modelovat reálným číslem $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$. Pro každý časový okamžik musí být k dispozici přímá shodnost, která umožní ze znalosti počáteční polohy $\mathbf{X} = (x_1; x_2; 1) \in {}_\infty E^2$ získat aktuální polohu $\mathbf{X}' = (x'_1; x'_2; 1) \in {}_\infty E^2$. Pohybem \mathcal{P} tedy bude množina zobrazení

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \mathbf{X}'^T = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{X}^T \quad t \in \langle t_1; t_2 \rangle \quad (1)$$

kde prvky matice $\mathbf{M}(t)$ jsou spojité funkce a pro každé $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$ je $\det \mathbf{M}(t) = 1$. Tuto matici nazýváme maticí pohybu.

2. Příklad: Množina zobrazení

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad (2)$$

je množinou všech otočení bodu $\mathbf{X} = (x_1; x_2; 1)$ o úhel $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ kolem počátku. Popisuje tedy pohyb libovolného vlastního bodu po kružnici se středem v počátku (přesněji řečeno jeho jednu otáčku).

3. Neproměnná rovinná soustava a její pohyb: Neproměnnou rovinnou soustavou Σ rozumíme libovolný geometrický rovinný útvar. Pohybem tohoto útvaru rozumíme množinu přímých shodností, kterou lze obecně zapsat ve tvaru

$$\Sigma'^T = \mathbf{M} \cdot \Sigma^T$$

Pro každý bod \mathbf{X} útvaru Σ tak platí rovnice (1). Každý bod $\mathbf{X} \in \Sigma$ je tedy zobrazován na body jisté křivky. Tuto křivku nazýváme dráhou příslušného bodu.

4. Příklad: Podívejme se ještě jednou na rovnici (2) a vypočtěme dráhu bodu $\mathbf{X} = (r; 0; 1)$:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad (3)$$

To znamená, že

$$\begin{aligned} x'_1 &= r \cos t \\ x'_2 &= r \sin t \end{aligned} \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

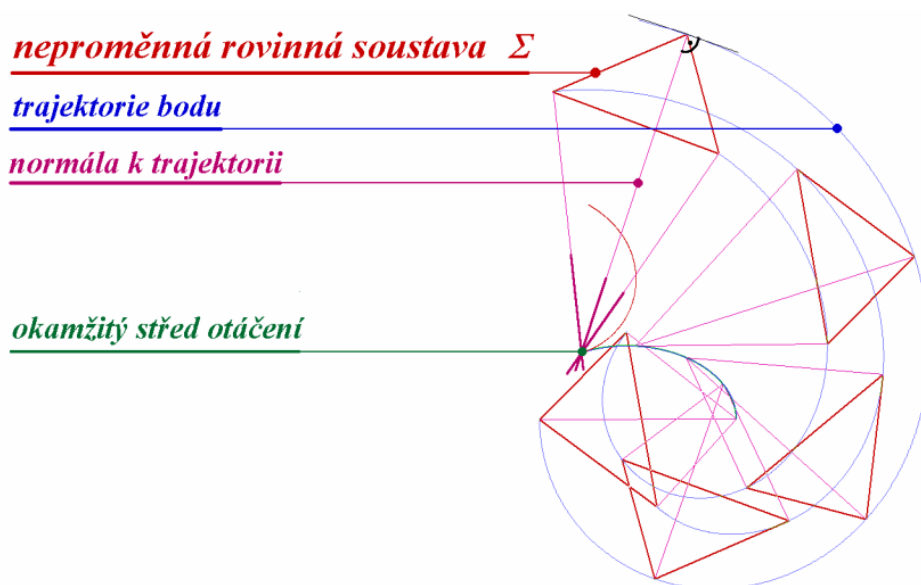
Asi nás nepřekvapí, že dostáváme známé parametrické rovnice kružnice.

Pohyby v rovině lze, jak již bylo řečeno, sestavovat pomocí přímých shodností. Protože každá přímá shodnost se skládá z posunutí a otočení (viz kpt. 2.5. odst. 2), znamená to, že každou následující polohu pohybujícího se útvaru lze nalézt pomocí posunutí a otočení:

5. Okamžitý střed otáčení: Normály trajektorií všech bodů soustavy v dané poloze procházejí jediným bodem – okamžitým středem otáčení.

Toto tvrzení platí i v případě, že se jedná o přímočarý pohyb. Trajektorie bodů soustavy jsou v tomto případě totiž vzájemně rovnoběžné přímky. Normály k nim jsou kolmice, které jsou rovněž vzájemně rovnoběžné – střed otáčení je v tomto případě nevlastní.

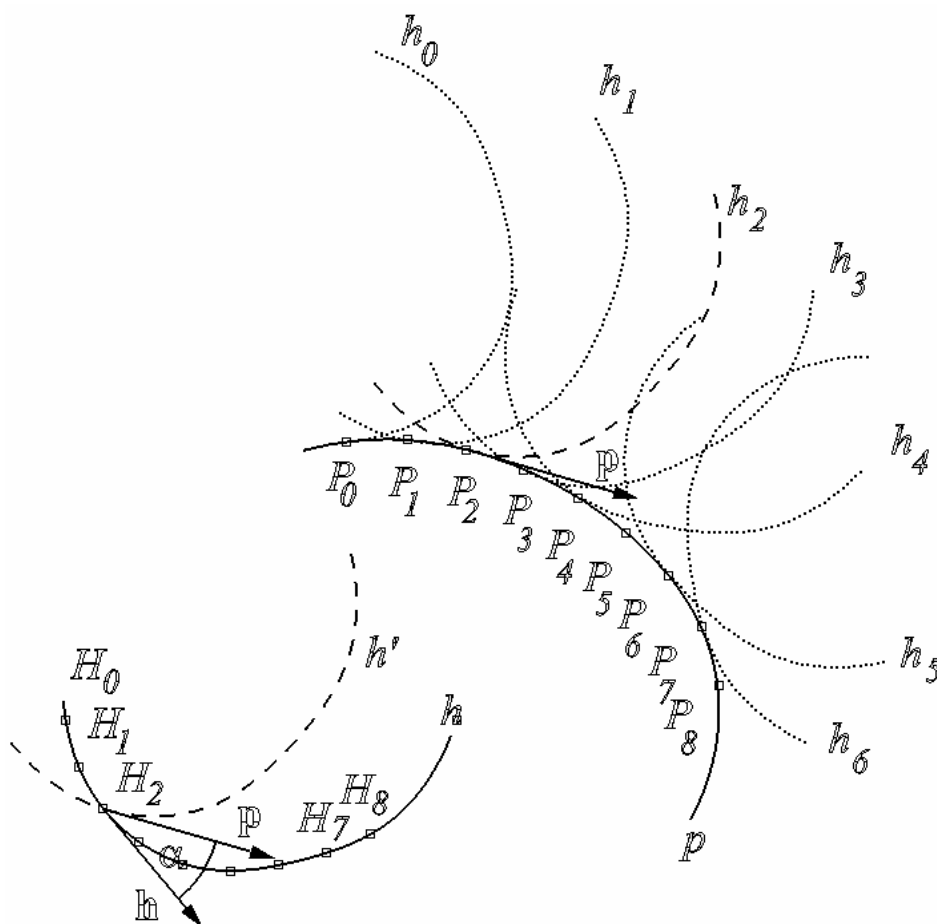
Známe-li tedy dráhy alespoň dvou bodů pohybujícího se útvaru, lze najít okamžitý střed otáčení, a to jako průsečík normál drah pohybujících se bodů. Na připojeném obrázku je tato skutečnost ilustrována pro pohybující se trojúhelník.



V následujícím textu budeme potřebovat pojem délka oblouku křivky, který jsme doposud nedefinovali. K této definici je totiž potřeba znalostí diferenciálního a integrálního počtu, s jehož základy se teprve budete seznamovat. V několika následujících odstavcích se tedy spolehne na intuitivní zřejmost tohoto pojmu. V příkladech pak budeme potřebovat jen délku úsečky a kruhového oblouku, tedy délku speciálních křivek, které jsou dostatečně známy.

6. Odvalování křivky po křivce: Uvažujme dvě rovinné křivky $p(t)$; $h(t)$. Sestrojme posloupnost křivek $h_0; h_1; \dots; h_n$ (pro stručnost vynecháváme označení parametru), a to následujícím způsobem: Na křivce p sestrojme posloupnost bodů $P_0; P_1; \dots; P_n$ a na křivce h posloupnost $H_0; H_1; \dots; H_n$ tak, aby pro každé $i = 0; 1; \dots; n-1$ platilo $|\widehat{P_i P_{i+1}}| = |\widehat{H_i H_{i+1}}|$. Křivku h_i pak sestrojíme následujícím způsobem: Křivku h zobrazíme v rotaci \mathcal{R}_i se středem H_i a úhlem α_i , který je roven úhlu směrových vektorů ${}_{\infty}\mathbf{P}(P_i) = \mathbf{p}(P_i)$; ${}_{\infty}\mathbf{H}(H_i) = \mathbf{h}(H_i)$ křivek p ; h v bodech T_i ; H_i (na připojeném obrázku provedeno pro $i = 2$). Křivku h' , kterou takto obdržíme, posuneme o vektor $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{H_i P_i}$. Pro $i = 0; 1; \dots; n$ je tedy

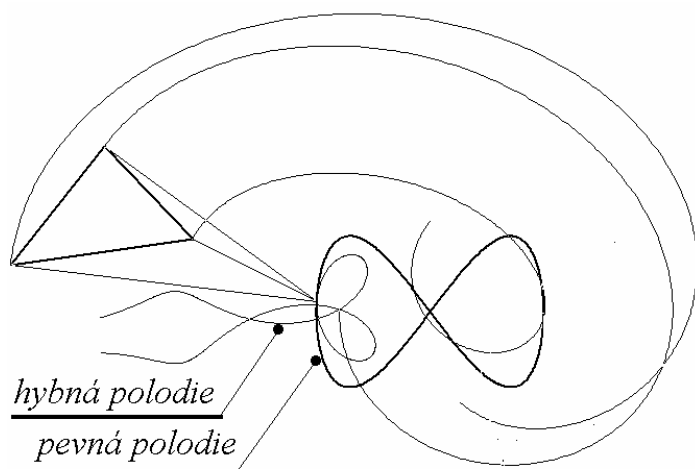
$$\begin{aligned}\mathcal{I}_i &= \mathcal{I}_i(\mathbf{v}_i) \circ \mathcal{R}_i(H_i; \alpha_i); \\ \mathbf{v}_i &= \overrightarrow{H_i P_i}; \alpha_i = \sphericalangle[\mathbf{p}(P_i); \mathbf{h}(H_i)] \\ \mathcal{I}_i : h &\rightarrow h_i\end{aligned}$$



Křivky $h; h_i$ se nyní dotýkají (tj. mají společnou tečnu) v bodě P_i . Takto sestrojenou posloupnost křivek $h_1; h_2; \dots; h_n$ nazýváme odvalováním křivky h po křivce p .

7. Pevná a hybná polodie: Předpokládejme nyní, že známe dráhy dvou bodů pohybující se soustavy Σ . Podle odstavce 5 můžeme pro každou polohu soustavy sestrojit okamžitý střed otáčení. Množinou všech okamžitých středů otáčení soustavy při jejím rovinném pohybu je

rovinná křivka p , kterou nazýváme **pevná polodie**. Sestrojíme soustavu $\Sigma' = \Sigma \cup h$ tak, že h je množina všech bodů H_i , které se v jistém okamžiku stanou středem otáčení. Množina h je křivka, kterou nazýváme **hybná polodie**.



Platí následující důležitá věta:

8. Věta o popisu rovinného pohybu, vratný pohyb: Každý pohyb v rovině lze popsat odvalováním hybné polodie po polodii pevné. Pohyb $\bar{\mathcal{P}}$, který vznikne z pohybu \mathcal{P} záměnou polodií, nazýváme vratným pohybem k pohybu \mathcal{P} .

Pohyb $\bar{\mathcal{P}}$ vratný k pohybu \mathcal{P} tedy získáme tak, že pevnou polodii pohybu \mathcal{P} necháme odvalovat po

polodii hybné (zaměníme pevnou a hybnou polodii).

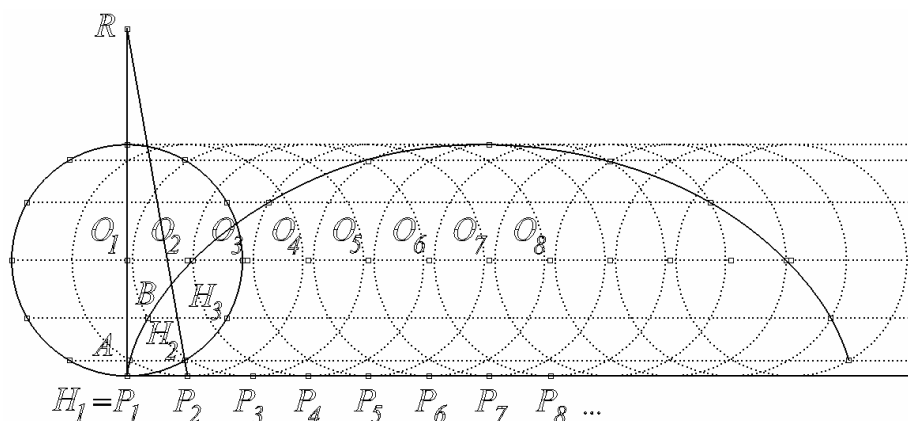
7.2 Cykloidy a evolventy

Nejdůležitějšími rovinnými pohyby jsou **pohyby cyklické**. Jsou to pohyby, kdy obě polodie jsou kružnice, nebo jedna je kružnice a druhá přímka.

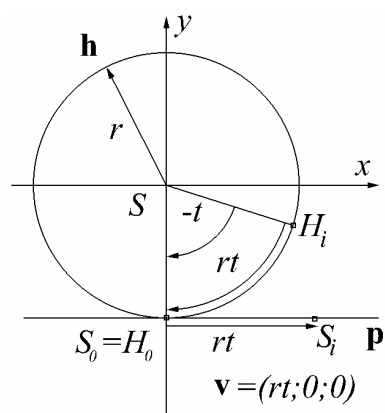
1. Cykloidální pohyb je pohyb, jehož hybnou polodii h je kružnice, pevnou polodii p může být libovolná křivka. Trajektoriemi bodů pohybující se soustavy jsou křivky, které se nazývají **cykloidy**. Trajektorií bodu $A \in h$ je prostá cykloida, trajektorií vnitřního (vnějšího) bodu kružnice je zkrácená (prodloužená) cykloida. Zde ukážeme speciální případ, kdy pevnou polodii je přímka.

Syntetické konstrukce:

Prostá cykloida: Sestrojíme hybnou a pevnou polodii - kružnici $k(O, r)$ a její tečnu p . Na kružnici zvolíme dostatečný počet bodů - na připojeném obrázku body $H_1; H_2; H_3; \dots$ vymezují oblouky příslušné středovým úhlům $\frac{\pi}{6}$. Tyto oblouky nanese po rektifikaci na rovnoběžku s přímkou p jdoucí středem kružnice - body $O_1; O_2; O_3; \dots$ - středy valící se kružnice. Sestrojíme kružnice $k_i(O_i, r)$ - valící se kružnice. Jejich průsečíky s příslušnými rovnoběžkami s p jdoucími body $H_0; \dots; H_{12}$ jsou body $A; B; C; \dots$ hledané cykloidy.



Prodloužená a zkrácená cykloida: Konstrukce středů $O_0; \dots; O_{12}$ je stejná jako v předchozím případě, body však hledáme pomocí kružnice soustředné s k , která má poloměr větší (prodloužená cykloida) či menší (zkrácená cykloida) než r .



Analytická konstrukce: Hybnou polodii (kružnici) a pevnou polodii (přímku) zvolíme tak, aby složení translace a rotace bylo co nejjednodušší. Tedy

$$\mathbf{h} \equiv x^2 + y^2 = r^2 \equiv (r \cos t; r \sin t; 1)$$

$\mathbf{p} \equiv y = -r$, bod S v počátku (viz obrázek). Valivý pohyb se skládá z rotace o úhel $-t$ a posunutí o vektor $\mathbf{v} = (rt; 0; 0)$ (neboť délka příslušného oblouku je $r \cdot t$).

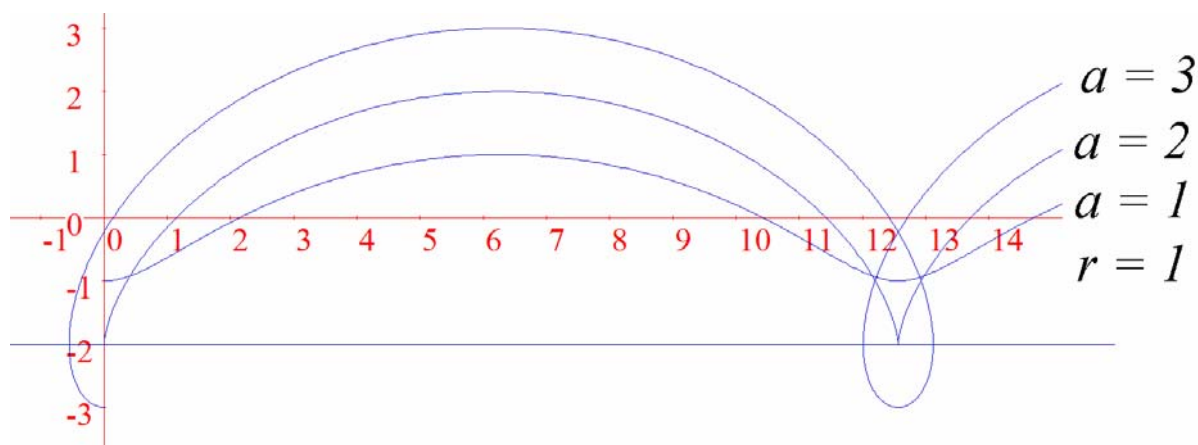
Jeho matice je tedy

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{R}_{-t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & rt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) & 0 \\ \sin(-t) & \cos(-t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & rt \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

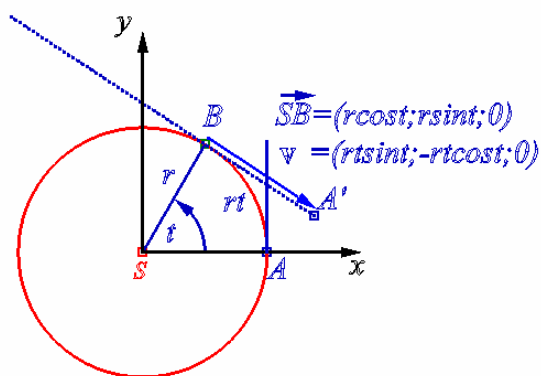
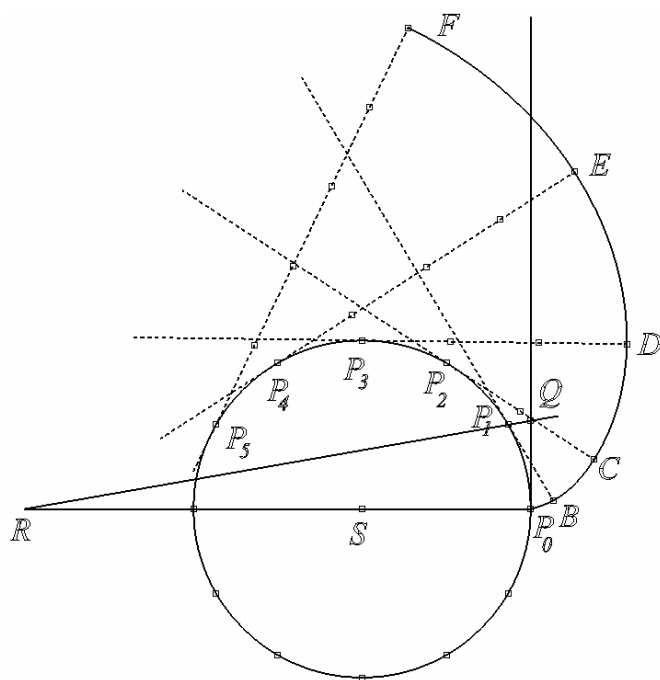
Spojíme-li tedy s valicí se kružnicí bod $A = (0; -a; 1)$, obdržíme jeho dráhu ve tvaru

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & rt \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a'_1 &= -a \sin t + rt \\ a'_2 &= -a \cos t \end{aligned}$$

Je-li $a = r$, jedná se o prostou cykloidu (v tom případě je totiž $A \in \mathbf{h}$), je-li $a < r$ ($a > r$), jedná se o zkrácenou (prodlouženou) cykloidu, neboť bod A leží uvnitř (vně) \mathbf{h} .



2. Evolventní pohyb je pohyb vratný k pohybu cykloidálnímu, tj. pohyb, jehož pevnou polodii \mathbf{p} je kružnice a hybnou polodii \mathbf{h} je libovolná křivka. My se omezíme na případ, kdy hybnou polodii je přímka. Trajektoriemi bodů pohybující se soustavy jsou křivky zvané **evolventy**. Přitom trajektorií bodu $A \in \mathbf{h}$ je prostá evolventa, trajektorií bodu ležícího v polorovině určené tečnou a normálovým vektorem křivky resp. vektorem opačným je prodloužená (zkrácená) evolventa. Opět ukážeme speciální případ, kdy pevnou polodii je kružnice.



tedy

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & rt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & rt \sin t \\ 0 & 1 & -rt \cos t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & rt \sin t \\ 0 & 1 & -rt \cos t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & rt \sin 2t \\ \sin t & \cos t & -rt \cos 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojíme-li s valicí se kružnicí bod $A = (a; 0; 1)$, obdržíme jeho dráhu ve tvaru

$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & rt \sin 2t \\ \sin t & \cos t & -rt \cos 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a'_1 &= a \cos t + rt \sin 2t \\ a'_2 &= a \sin t - rt \cos 2t \end{aligned}$$

Syntetické konstrukce:

Prostá evolventa: Na kružnici opět zvolíme dostatečný počet bodů – na připojeném obrázku body $P_0; P_1; P_2; \dots$ opět vymezují oblouky příslušné středovým úhlům $\frac{\pi}{6}$. Sobotkovou rektifikací (viz kpt. 1.3. příklad 6b) tohoto oblouku obdržíme úsečku P_0Q . V bodech $P_1; P_2; P_3; \dots$ sestojíme tečny kružnice, na které postupně nanášíme úsečky $p_1 = |P_1B|$; $p_2 = |P_2C|$; $p_3 = |P_3D|$.. tak že $p_k = k \cdot |P_0Q|$. Body $A \equiv P_0$; $B; C; \dots$ pak leží na hledané evolventě.

Analytická konstrukce: Polodíe opět zvolíme tak, aby složení translace a rotace bylo co nejjednodušší. Tedy

$$\mathbf{p} \equiv x^2 + y^2 = r^2 \equiv (r \cos t; r \sin t; 1); \quad \mathbf{h} \equiv x = r,$$

bod S v počátku (viz obrázek). Valivý pohyb se skládá z rotace o úhel t a posunutí o vektor \mathbf{v} , který má směr

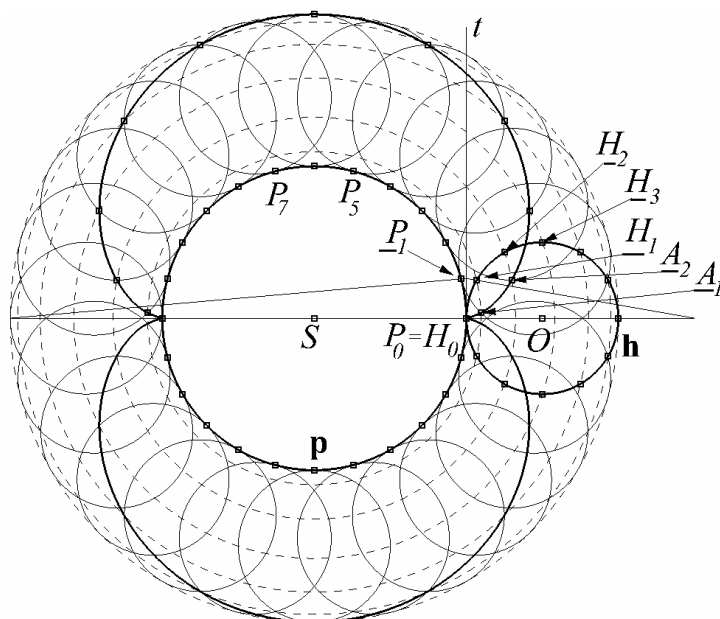
$$-\mathbf{p}'(t) = -(-r \sin t; r \cos t; 0)$$

a velikost $|\mathbf{v}| = rt$ (neboť délka příslušného oblouku je opět $r \cdot t$). Matice tohoto pohybu je

Je-li $a = r$, jedná se o prostou evolventu, je-li $a > r$ ($a < r$), jedná se o prodlouženou (zkrácenou) evolventu. V případě $a = 0$ dostáváme tzv. Archimedovu spirálu.

7.3 Epicykloidy a hypocykloidy

1. Epicykloidální pohyb: pevnou polodíí p i hybnou polodíí h jsou kružnice, přičemž jejich dotyk je vnější. Trajektorie tohoto pohybu se nazývají epicykloidy. Trajektorie středu O hybné polodie je kružnice soustředná s p . Vnitřní (vnější) body hybné polodie h opisují zkrácené (prodloužené) epicykloidy. Body kružnice h vytvoří prostou epicykloidu.

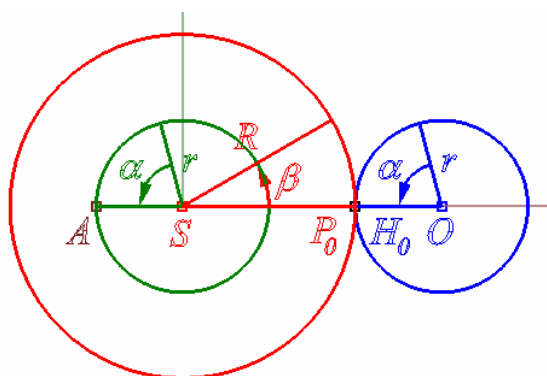


Syntetické konstrukce:

Prostá epicykloida: Sestrojíme pevnou a hybnou polodii - kružnice $p = (S, R)$ a $h = (O, r)$ s vnějším dotykem. Na kružnici p zvolíme dostatečný počet bodů - na připojeném obrázku body $P_0; P_1; P_2; \dots$ vymezují oblouky příslušné středovým úhlům $\frac{\pi}{12}$. Jeden z těchto oblouků zrektifikujeme a opakovaně navineme na kružnici h (viz poznámka 7. v kpt. 2. 3.) - získáme tím body $H_0; H_1; H_2; \dots$. Lze samozřejmě postupovat i obráceně - zvolit body $H_0; H_1; H_2; \dots$ a příslušné oblouky

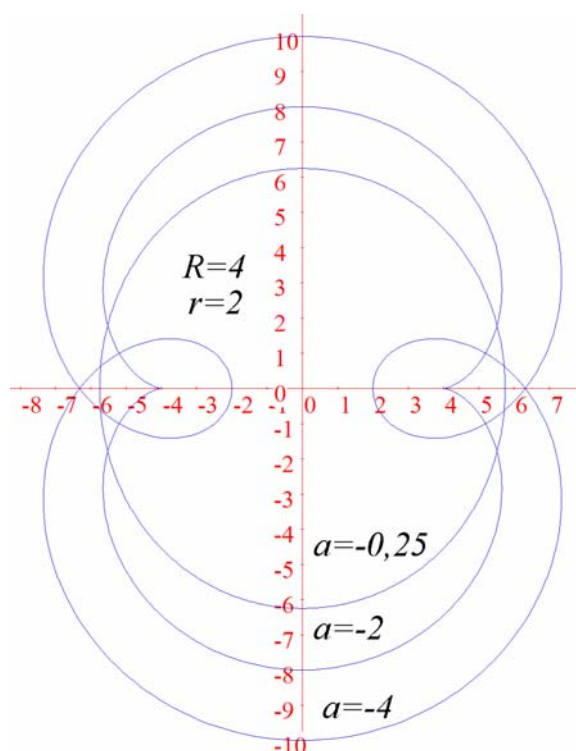
hybné polodie navinout na polodii pevnou. V případech, kdy poloměry kružnic jsou celočíselnými násobky, není rektifikace nutná - v případě na našem obrázku má pevná polodie dvakrát větší poloměr, je tedy rozdělena na dvojnásobný počet dílů. Dále sestrojíme posloupnost $h_i = (O_i; r)$ kružnic, kde body O_i leží na polopřímce opačné k SP_i , a posloupnost $k_i = (S; r_i)$, kde $r_i = SH_i$. Body A_i hledané epicykloidy jsou průsečíky kružnic $k_i; h_i$ (vybíráme jen jeden z nich, a to s ohledem na skutečnost, že bod dotyku se po pevné polodii pohybuje ve stejném smyslu, v jakém se otáčí polodie h).

Analytická konstrukce: Střed pevné polodie p umístíme do počátku. Oblouk hybné polodie h_0 příslušný středovému úhlu α se odvalí po oblouku pevné polodie, který přísluší úhlu β .



V zájmu co nejjednoduššího analytického popisu zvolíme střed hybné polodie h rovněž v počátku. Polodii h otočíme kolem počátku o úhel α , střed takto otočené polodie h posuneme o vektor $\mathbf{v} = (R + r; 0; 0)$, čímž ji zobrazíme na polodii h_0 . Tu je pak třeba otočit opět kolem počátku, tentokrát o úhel. Matice epicykloidálního pohybu je tedy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{R}_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & R+r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & (R+r)\cos \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & (R+r)\sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha & (R+r)\cos \beta \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha & (R+r)\sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & (R+r)\cos \beta \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & (R+r)\sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ještě je třeba dořešit vztah mezi úhly $\alpha; \beta$. Ty musí být voleny tak, aby si délky příslušných oblouků byly rovny. Můžeme tedy položit např. $\alpha = t$, pak by bylo $\beta = Rr^{-1}t$. Volba $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ pak znamená, že hybná polodie projede celý obvod pevné polodie. Opačná volba dává $\beta = t; \alpha = rR^{-1}t$. Volba $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ pak znamená, že hybná polodie provede jednu otáčku. Zvolme druhou možnost. Pak je

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(Rr^{-1}t + t) & -\sin(Rr^{-1}t + t) & (R+r)\cos t \\ \sin(Rr^{-1}t + t) & \cos(Rr^{-1}t + t) & (R+r)\sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojíme-li s valicí se kružnicí bod $A = (a; 0; 1)$, obdržíme jeho dráhu ve tvaru

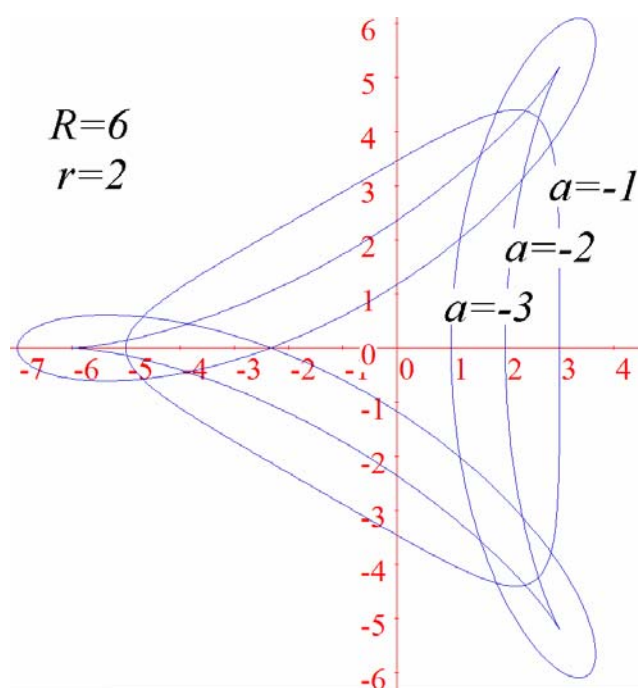
$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T &\Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(Rr^{-1}t + t) & -\sin(Rr^{-1}t + t) & (R+r)\cos t \\ \sin(Rr^{-1}t + t) & \cos(Rr^{-1}t + t) & (R+r)\sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 a'_1 &= a \cos(Rr^{-1}t + t) + (R+r) \cdot \cos t \\
 a'_2 &= a \sin(Rr^{-1}t + t) + (R+r) \cdot \sin t
 \end{aligned}$$

Je-li $|a| = r$, jedná se o prostou epicykloidu, je-li $|a| < r$ ($|a| > r$), jedná se o zkrácenou (prodlouženou) epicykloidu (chceme-li valit bod A vyznačený na obrázku, musíme volit $a < 0$). Prostá epicykloida, pro kterou je $Rr^{-1} = 1$ ($Rr^{-1} = 2$) se nazývá kardioida (nefroida).

2. Hypocykloidální pohyb: pevnou polodíí p i hybnou polodíí h jsou kružnice, přičemž jejich dotyk je vnitřní. Trajektorie tohoto pohybu se nazývají hypocykloidy. Trajektorie středu O hybné polodie je kružnice soustředná s p . Vnitřní (vnější) body hybné polodie h opisují zkrácené (prodloužené) hypocykloidy. Body kružnice h vytvoří prostou hypocykloidu.

Konstrukce hypocykloidy: je zcela analogická konstrukci epicykloidy, a to jak synteticky, tak analyticky. Rozdíl je ve velikosti středné kružnic p ; h - u epicykloidy byla $R+r$, u hypocykloidy je to $R-r$. Dále je třeba mít na paměti, že pohyb bodu dotyku po pevné polodíi se děje v opačném smyslu než v jakém se otáčí polodie hybná. V syntetické konstrukci je třeba tento fakt zohlednit při hledání příslušných průsečíků kružnic k_i ; h_i , v konstrukci syntetické je třeba změnit znaménko u jednoho z úhlů α ; β . Matice hypocykloidálního pohybu je tedy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(Rr^{-1}t-t) & -\sin(Rr^{-1}t-t) & (R-r)\cos t \\ \sin(Rr^{-1}t-t) & \cos(Rr^{-1}t-t) & -(R-r)\sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



parametrické vyjádření pak obdržíme ve tvaru

$$\mathbf{A}^{iT} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow$$

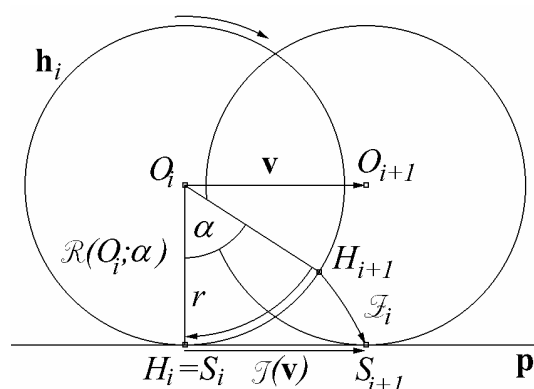
$$a'_1 = a \cos(Rr^{-1}t-t) + (R-r) \cdot \cos t$$

$$a'_2 = a \sin(Rr^{-1}t-t) - (R-r) \cdot \sin t$$

Je-li $|a|=r$, jedná se o prostou hypocykloidu, je-li $|a|<r$ ($|a|>r$), jedná se o zkrácenou (prodlouženou) hypocykloidu

Prostá hypocykloida, pro kterou je $Rr^{-1}=3$ (to je případ našeho obrázku) se nazývá Steinerova hypocykloida, pro $Rr^{-1}=4$ obdržíme asteroidu.

7. 4 Softwarové modelování rovinných pohybů



Při předchozím odvozování matic technických pohybů jsme byli limitováni ručními výpočty. Pohyby jsme skládali tak, aby násobení matic bylo pro ruční výpočty co možná nejjednodušší, a tak skládání epi- a hypocykliod bylo dosti krkolomné. Při strojovém zpracování se nemusíme ohlížet na pracnost mechanického počítání – to můžeme zcela přenechat počítači. Navíc můžeme sestavovat valící se kružnice a přímky v pohybu, a to naprosto přirozeným způsobem.

Uvažujme znovu cykloidální pohyb. Naším cílem tentokrát nebude matice tohoto pohybu ani jeho parametrické rovnice. Cílem bude vymodelování valící se kružnice a znázornění dráhy některých jejích bodů. Celý pohyb v čase $t \in \langle t_0; t_n \rangle$ rozložíme na snímky situací v okamžicích t_i ; $i = 0; 1; \dots; n$. Předpokládejme, že máme snímek v okamžiku t_i a potřebujeme sestavit situaci v okamžiku následujícím (viz obrázek). Hledáme tedy zobrazení \mathcal{I}_i , které zobrazí bod H_{i+1} na bod S_{i+1} a bod O_i na O_{i+1} . Zobrazení \mathcal{I}_i je tedy třeba složit z rotace $\mathcal{R}_i(O_i; \alpha)$ kolem bodu O_i o úhel α a posunutí $\mathcal{I}(\mathbf{v})$ o vektor \mathbf{v} - směrový vektor pevné polodie o velikosti $|\mathbf{v}| = r\alpha$. Matici posunutí máme k dispozici (viz kpt. 3.4.), rotaci však známe jen jako rotaci kolem počátku. Bod O_i počátkem není, rotaci kolem tohoto bodu musíme tedy složit.

Bod, který má rotovat kolem bodu $S = (s_1; s_2; 1)$, je třeba nejdříve posunout tak, aby střed rotace splynul s počátkem, tj. posunout ho o vektor $-\mathbf{s} = -(s_1; s_2; 0)$. Takto posunutý bod může rotovat kolem počátku o požadovaný úhel, poté je třeba celou situaci „posunout zpět“, tj. o vektor $\mathbf{s} = (s_1; s_2; 0)$. Rotace $\mathcal{R}_{S,\alpha}$ tedy vznikne složením $\mathcal{R}_{S,\alpha} = \mathcal{I}_{-\mathbf{s}} \circ \mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ a její matice je tvaru $\mathbf{R}_{S,\alpha} = \mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{s}}$. Příslušný krok \mathcal{C}_i cykloidálního pohybu tedy dostaneme tak, že kružnici h_i otočíme kolem bodu O_i o úhel α , a pak ji posuneme o vektor \mathbf{v} , tedy

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{I}_{\mathbf{v}} \circ \mathcal{R}_{O_i, \alpha}.$$

Matice tohoto zobrazení je

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{O_i, \alpha} = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{o}_i} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{o}_i}$$

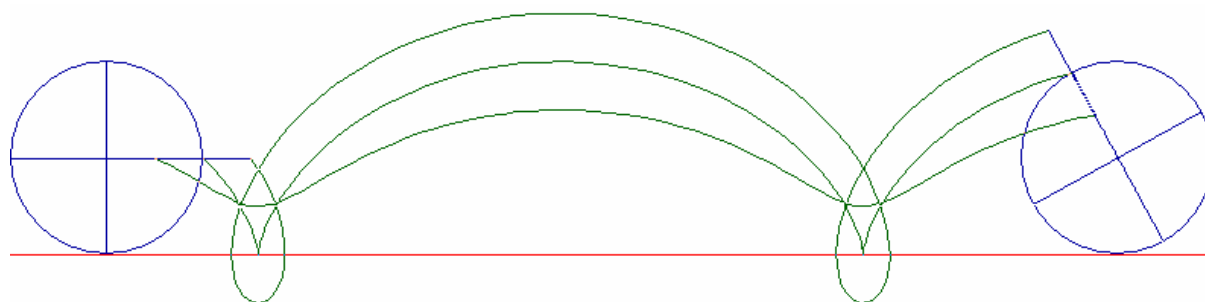
Lze také kružnici h_i nejdříve posunout do kružnice h_{i+1} a tu pak rotovat o potřebný úhel, tedy

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{R}_{O_{i+1}, \alpha} \circ \mathcal{I}_{\mathbf{v}}$$

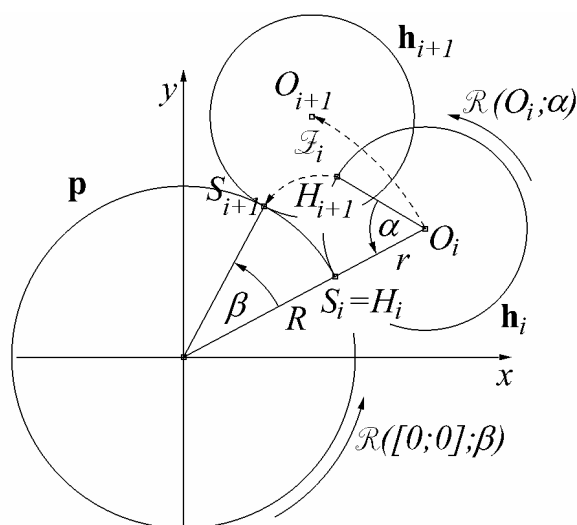
$$\mathbf{C}_i = \mathbf{R}_{O_{i+1}, \alpha} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_{\mathbf{o}_{i+1}} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{o}_{i+1}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}}$$

Pozor! Neznamená to ovšem, že jsme prostě zaměnili pořadí posunutí a otočení! V prvním případě jsme totiž rotovali kolem bodu O_i , ve druhém kolem bodu O_{i+1}

Takové řešení je samozřejmě pro ruční počítání neúnosné – jednak je třeba násobit čtyři matice, což je velmi pracné, ale hlavně matice potřebné v jednotlivých krocích jsou pro každý krok jiné (rotujeme totiž pokaždé kolem jiného středu). Pro každý krok je tedy třeba výpočet opakovat. Pro simulace na počítači je však naopak tento způsob skládání velmi výhodný – mechanické výpočty zde nepředstavují žádný problém (součin matic je programátorsky zcela rutinní záležitostí) a „sestavování“ pohybů tímto „přirozeným“ způsobem je velmi výhodné.



Navíc umožňuje sestrojování drah pohybů nejrůznějších bodů: zvolíme počáteční polohu A_0 , poté jednoduše sestrojíme posloupnost $A_{i+1} = C_i \cdot A_i$. Tímto způsobem jsme schopni sestrojit



dráhu bodu A , aniž bychom explicitně znali její rovnici (ta je „skryta“ v maticích C_i). Navíc je možné sestrojit i „valící se“ kružnici. Aby bylo poznat, že se kružnice skutečně valí a nikoli jen posouvá, je dobré spojit s jejím obvodem nějakou pevnou a „viditelnou“ konstrukci, např. dva na sebe kolmé průměry. I k jejich sestrojení je možné využít výše uvedeného skládání zobrazení – zvolíme jeden bod na obvodu, který valíme s kružnicí, další body získáme v každém snímku otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem středu „aktuální“ kružnice.

Zcela analogicky můžeme vymodelovat pohyb epicykloidální a hypocykloidální. Krok \mathcal{C}_i

epicykloidálního pohybu složíme z rotace kolem středu O_i kružnice h_i o úhel α a z rotace kolem středu pevné polodie (který můžeme volit v počátku) o úhel β . Úhly α ; β je třeba volit tak, aby délky odpovídajících si kruhových oblouků si byly rovny. Je tedy $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}_\beta \circ \mathcal{R}_{O_i, \alpha}$, popř. podobně jako v předchozím případě $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}_{O_{i+1}, \alpha} \circ \mathcal{R}_\beta$, matice tohoto kroku tedy je

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{R}_{O_i, \alpha} = \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{o}_i} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{o}_i}$$

popř.

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_{O_{i+1}, \alpha} \cdot \mathbf{R}_\beta = \mathbf{T}_{-\mathbf{o}_{i+1}} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{o}_{i+1}} \cdot \mathbf{R}_\beta$$

U hypocykloidálního pohybu je situace analogická. Matici pohybu je sestavena naprosto stejně, jen střed hybné polodie je třeba volit s ohledem na vnitřní dotyk a u jednoho z úhlů α ; β je třeba změnit znaménko.

12. Příklad: Stanovme dráhu hypocykloidálního pohybu, je-li $R = 2 \cdot r$ a

$$\text{a) } a = -0.5 \cdot r \quad \text{b) } a = -1.5 \cdot r; \quad \text{c) } a = -r$$

Řešení: Vymodelujeme-li dráhu způsobem naznačeným v předchozím odstavci, můžeme vyslovit hypotézu, že v případech a) b) je hledanou dráhou elipsa, v případě c) průměr pevné polodie. Tyto hypotézy ověříme pomocí rovnic odvozených v odst. 10. Jsou-li parametrické rovnice hypocykloidy

$$a'_1 = a \cos(Rr^{-1}t - t) + (R - r) \cdot \cos t$$

$$a'_2 = a \sin(Rr^{-1}t - t) - (R - r) \cdot \sin t$$

je v případě a)

$$a'_1 = -0.5 \cdot r \cdot \cos(2rr^{-1}t - t) + (2r - r) \cdot \cos t = -0.5 \cdot r \cdot \cos t + r \cdot \cos t = 0.5 \cdot r \cdot \cos t$$

$$a'_2 = -0.5 \cdot r \cdot \sin(2rr^{-1}t - t) - (2r - r) \cdot \sin t = -0.5 \cdot r \cdot \sin t - r \cdot \sin t = -1.5 \cdot r \cdot \sin t$$

Jedná se o parametrické vyjádření elipsy s poloosami $a = 1.5 \cdot r$; $b = 0.5 \cdot r$.

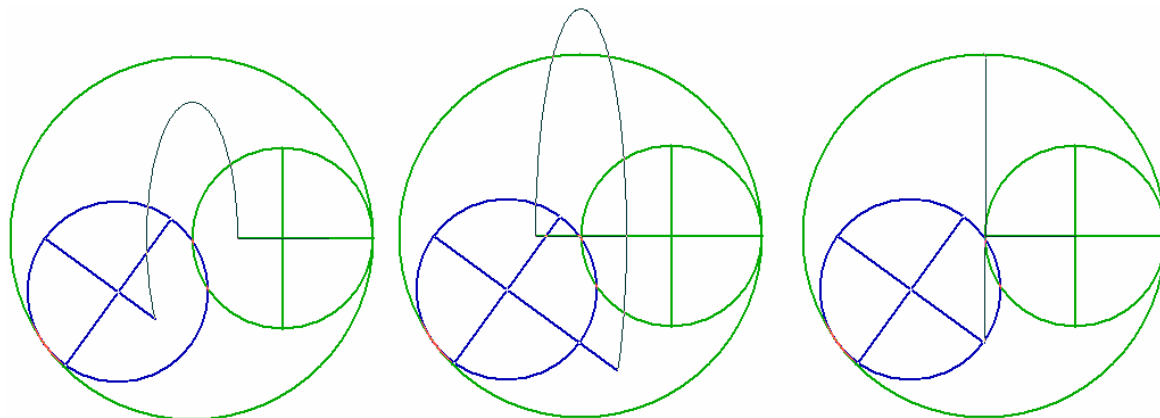
V případě b) zcela analogicky dostaneme $(a'_1; a'_2) = (-0.5 \cdot r \cdot \cos t; -2.5 \cdot r \cdot \sin t)$

V případě c) je

$$a'_1 = -r \cdot \cos(2rr^{-1}t - t) + (2r - r) \cdot \cos t = -r \cdot \cos t + r \cdot \cos t = 0$$

$$a'_2 = -r \cdot \sin(2rr^{-1}t - t) - (2r - r) \cdot \sin t = -r \cdot \sin t - r \cdot \sin t = -2 \cdot r \cdot \sin t$$

což je skutečně úsečka s krajními body $A[0; -2r]$ (pro $t = \frac{\pi}{2}$); $B[0; 2r]$ (pro $t = \frac{3\pi}{2}$);



Relativně snadné skládání navíc umožňuje modelování složitějších pohybů tak, jak je demonstrováno na dalších obrázcích.

