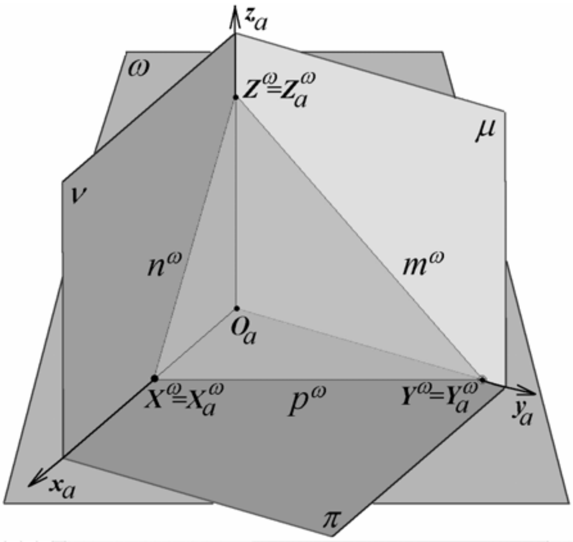
9 Axonometrie

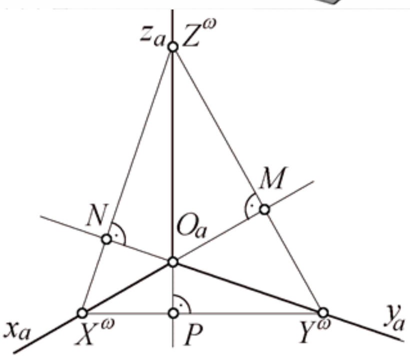
Mongeova projekce má řadu předností: jednoduchost, snadná měřitelnost délek a úhlů. Je však poměrně nenázorná. Podstatnou část technických výkresů proto tvoří kromě půdorysu, nárysu event. bokorysu (tj. průmětů v Mongeově projekci) také průměty v axonometrii, anebo v perspektivě. Technické objekty mají obvykle tři význačné navzájem kolmé směry nebo tří významné navzájem kolmé roviny. Axonometrie je zobrazení na jednu průmětnu tak, aby se žádný z těchto směrů nepromítal do bodu, resp. žádná z těchto rovin nepromítala do přímky.

9. 1 Pravoúhlá (kolmá) axonometrie



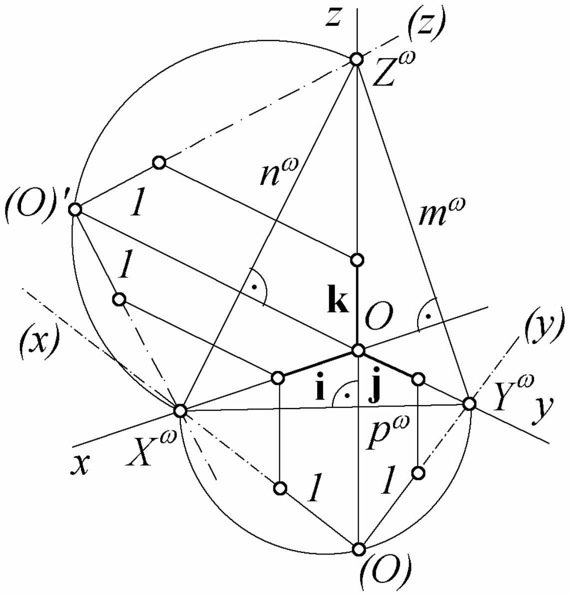
Velmi často používanou axonometrií je axonometrie pravoúhlá (kolmá). Je to axonometrie, kdy směr promítání je kolmý na průmětnu ω.

Uvažujme kartézskou souřadnicovou soustavu $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ a polohu axonometrické průmětny ω určeme body $X^\omega \in \omega \cap x$; $Y^\omega \in \omega \cap y$; $Z^\omega \in \omega \cap z$, ve kterých průmětna ω protíná souřadnicové osy $x = \langle O, \mathbf{i} \rangle$; $y = \langle O, \mathbf{j} \rangle$; $z = \langle O, \mathbf{k} \rangle$. Přímky $p^\omega = X^\omega Y^\omega$; $n^\omega = X^\omega Z^\omega$; $m^\omega = Y^\omega Z^\omega$ jsou stopami pomocných průměten - rovin π (půdorysny), ν (nárysny) resp. μ (bokorysny) v průmětně ω. Trojúhelník $\Delta X^\omega Y^\omega Z^\omega$ nazýváme axonometrickým trojúhelníkem.

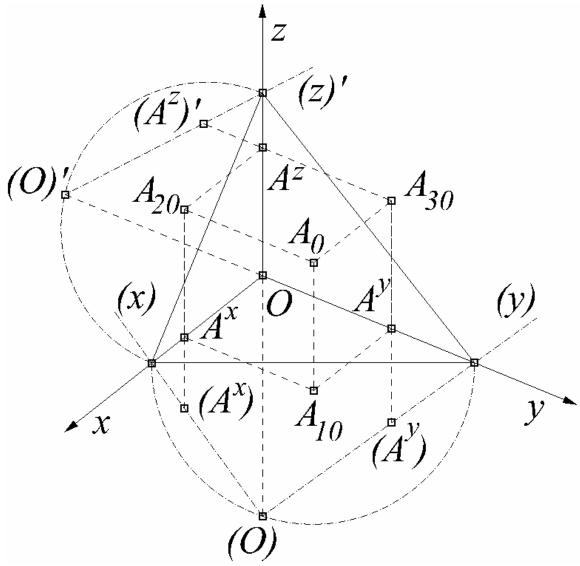


1. Axonometrické osy v pravoúhlé axonometrii: Axonometrické osy v pravoúhlé axonometrii jsou výšky v **axonometrickém trojúhelníku**. Ten je vždy ostroúhlý.

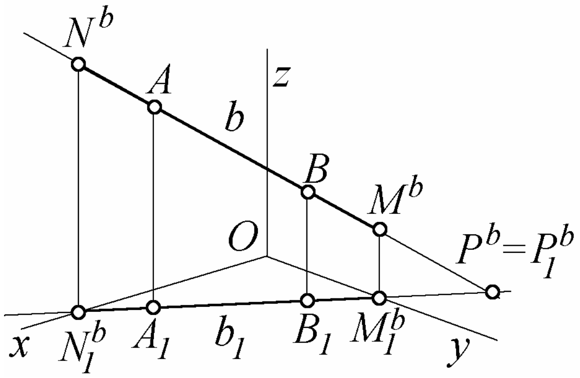
2. Konstrukce axonometrických jednotek: Směr kolmý na axonometrickou průmětnu definuje mezi axonometrickou průmětnou a pomocnými průmětnami afinity mezi rovinami, jejímiž průměty jsou afinity v rovině s osami splývajícími se stranami axonometrického trojúhelníka. Otočíme-li některou z pomocných průměten $\pi; \nu; \mu$ do axonometrické průmětny, dostáváme kolmou osovou afinitu, která je určena stranou axonometického trojúhelníka a dvojicí bodů $O; (O)$. Na takto otočených osách můžeme přímo měřit jednotky event. souřadnice zadávaných bodů. Průměty těchto jednotek i souřadnic zadávaných bodů získáme inverzní afinitou. Postup je patrný z připojeného obrázku (zde je otočena půdorysna a nárysna, stejným způsobem je možno otočit bokorysnu).



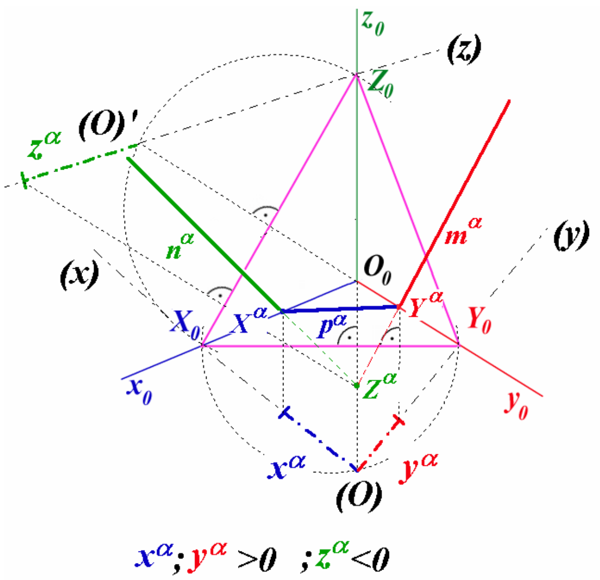
9. 2 Zobrazení bodu, přímky a roviny v pravoúhlé axonometrii



1. Bod: Otočením půdorysny a nárysny resp. bokorysny do axonometrické průmětny sestrojíme axonometrické souřadnice $\left(A^x\right)$; $\left(A^y\right)$; $\left(A^z\right)$ bodu $A=\left[x^A;y^A;z^A\right]$. Inverzní afinitou pak získáme tak body A^x; A^y; A^z, které doplníme na souřadnicový kvádr dle 8.1.1. Při praktických konstrukcích není třeba sestrojovat všechny průměty A_0; A_{01}; A_{02}; A_{03} bodu A. K axonometrickému průmětu A_0 připojujeme většinou jen axonometrický půdorys A_{01}. A protože všechny body v axonometrické průmětně jsou axonometrickými průměty, budeme index 0 značící právě axonometrický průmět v dalším textu vynechávat.

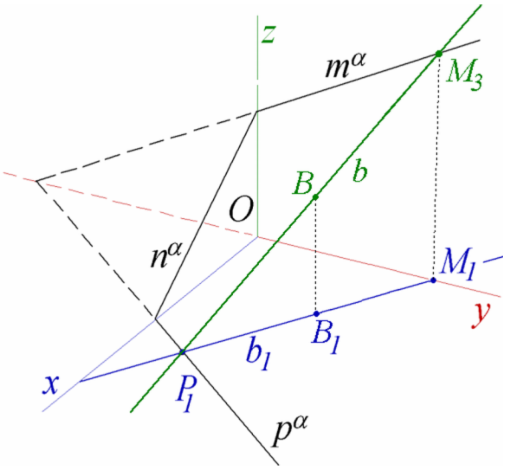


2. Přímka: Přímka je určena dvěma svými body. Půdorysy těchto bodů tedy určují půdorys přímky a axonometrické průměty pak axonometrický průmět přímky. Na připojeném obrázku je sestrojena přímka $b\equiv AB$. Její průsečíky $P^b;N^b;M^b$ s rovinami $\pi;\nu;\mu$ nazýváme pořadě půdorysný, nárysný a bokorysný stopník. Pro průměty dvojice přímek platí totéž, co u Mongeovy projekce (viz kpt. 4. 2.)

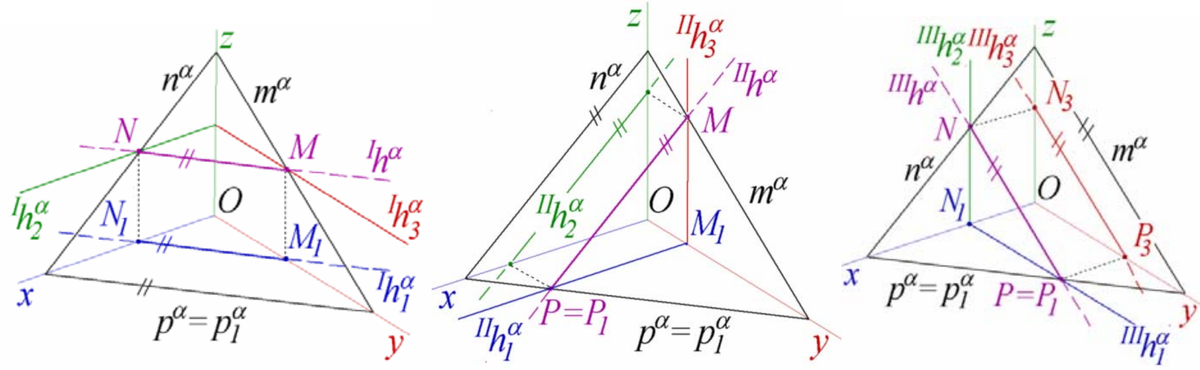


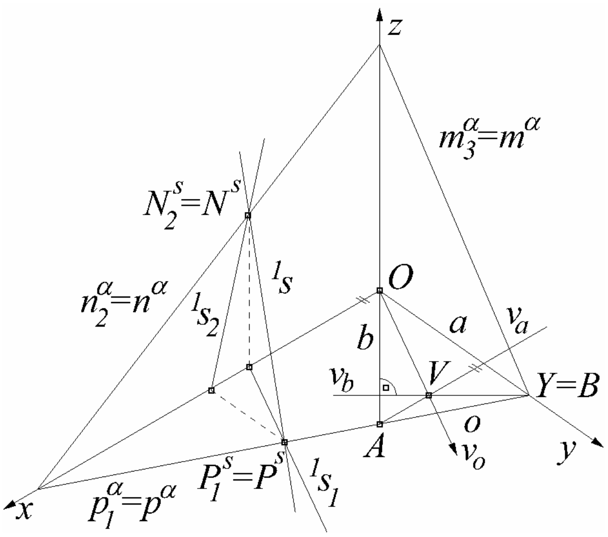
3. Rovina: rovinu α určujeme nejčastěji úseky X^α; Y^α; Z^α, které rovina vytíná na souřadných osách (k jejich nanesení využijeme opět otáčení průměten $\pi;\nu;\mu$ do axonometrické průmětny). Průsečnice roviny α s rovinami $\pi;\nu;\mu$ nazýváme pořadě půdorysnou, nárysnou a bokorysnou stopou a značíme p^α; n^α; m^α.

4. Přímka a bod v rovině: Sestrojíme-li v rovině α libovolnou přímku a, pak pro její půdorysný stopník P^a platí $P^a\in\alpha$ a současně $P^a\in\pi_1$. Znamená to, že $P^a\in p^\alpha$. Podobně $N^a\in n^\alpha$; $M^a\in m^\alpha$. Tyto vlastnosti umožňují „zrekonstruovat“ přímku ležící v rovině zadané svými stopami na základě znalosti jednoho průmětu. Rovněž tak bod: známým průmětem (např. A_1) proložíme příslušný průmět libovolné přímky $a\subset\alpha$ a sestrojíme její axonometrický průmět, na kterém najdeme axonometrický průmět bodu A.

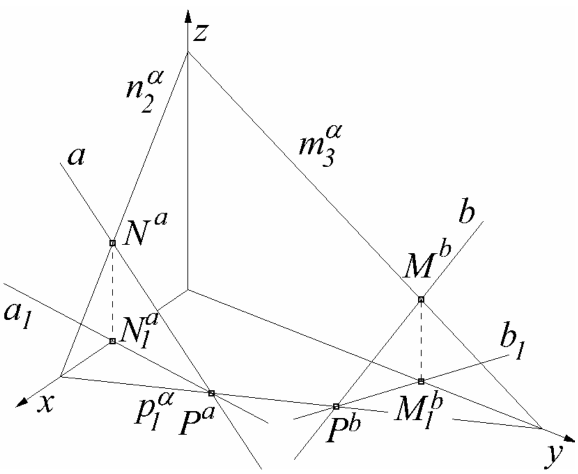


5. Hlavní přímky: Podobně jako v Mongeově projekci můžeme k doplnění chybějícího průmětu bodu v rovině s výhodou použít hlavních přímek. Každým bodem $A \in \alpha$ prochází právě jedna hlavní přímka $^{1}h^{\alpha}$ rovnoběžná s půdorysnou (hlavní přímka první osnovy), právě jedna hlavní přímka $^{2}h^{\alpha}$ rovnoběžná s nárysnou (hlavní přímka druhé osnovy) a právě jedna hlavní přímka $^{3}h^{\alpha}$ rovnoběžná s bokorysnou (hlavní přímka třetí osnovy) Hlavní přímka první osnovy je rovnoběžná s půdorysnou stopou, podle 2. 6. 4. je tedy její půdosys rovnoběžný s půdorysem půdorysné stopy. Z analogického důvodu je nárys hlavní přímky druhé osnovy rovnoběžný s nárysem nárysné stopy a bokorys hlavní přímky třetí osnovy rovnoběžný s bokorysem bokorysné stopy.





6. Spádové přímky: Spádová přímka první osnovy je kolmá k půdorysné stopě roviny. Na rozdíl od Mongeovy projekce však průmětem tohoto pravého úhlu obecně není pravý úhel, protože ani jedno rameno promítaného úhlu obecně není rovnoběžné s axonometrickou průmětnou. Sestrojme bod A jako průsečík osy z a p^{α} a označme $B = Y$. V trojúhelníku ΔOAB, který leží v půdorysně, sestrojme výšky: Průmět výšky v_a je rovnoběžný s průmětem osy x. Dále sestrojme přímku v_b tak, že $B \in v_b$ a $v_b \perp b$. Přímka v_b je rovnoběžná s axonometrickou průmětnou, podle 2. 6. 6. je tedy úhel $\sphericalangle bv_b$ průmětem pravého úhlu a v_b je rovněž výškou ΔOAB. Bod $V \in v_a \cap v_b$ je tedy ortocentrum ΔOAB, kterým musí procházet třetí výška. Přímka $v_O = OV$ je tedy kolmá na AB a určuje směr půdorysu $^{I}s_1$ spádové přímky ^{I}s první osnovy. Spádové přímky druhé resp. třetí osnovy sestrojíme analogicky.



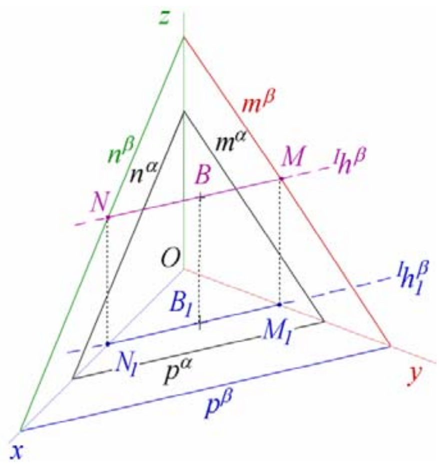
7. Rovina určena dvěma přímkami, třemi body: Je-li rovina určena dvěma přímkami, sestrojíme jejich stopníky, kterými musejí procházet stopy roviny. Na připojeném obrázku jsou sestrojeny půdorysné stopníky přímek a; b, nárysný a bokorysný stopník stačí pak jen jeden.

Je-li rovina určena třemi svými body, vezmeme libovolné dvě strany takto daného trojúhelníka a aplikujeme předchozí konstrukci.

9. 3 Základní polohové úlohy v pravoúhlé axonometrii

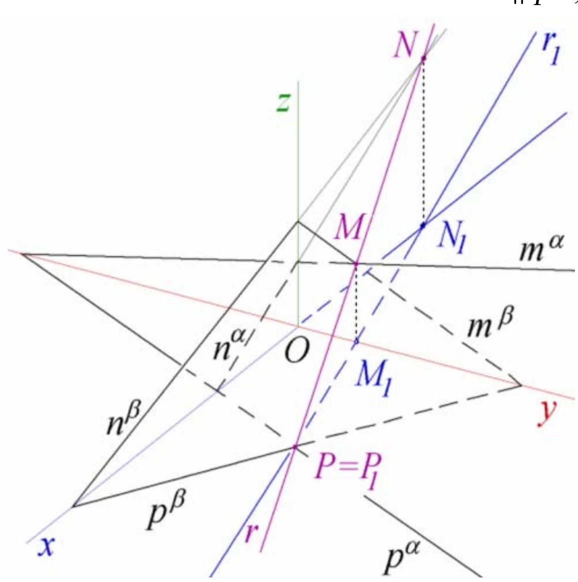
Jak již víme z kpt. 8. 3, k základním polohovým úlohám patří:

a) Daným bodem vést k dané přímce rovnoběžku
b) Daným bodem vést k dané rovině rovnoběžnou rovinu
c) Sestrojení průsečnice dvou daných rovin
d) Sestrojení průsečíku dané přímky s danou rovinou



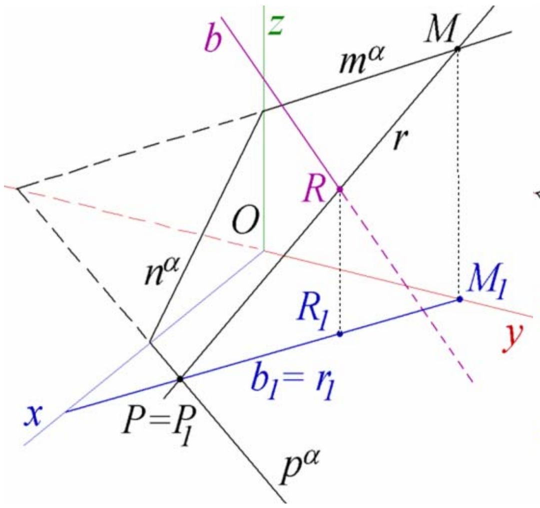
a) Daným bodem A vést přímku a rovnoběžnou s danou přímkou b: V axonometrii podobně jako v Mongeově projekci používáme rovnoběžná promítání, průmětem dvou rovnoběžek jsou tedy buď opět dvě rovnoběžky (pokud neleží v promítací rovině), anebo dva body (pokud promítané rovnoběžky leží v příslušné promítací rovině).

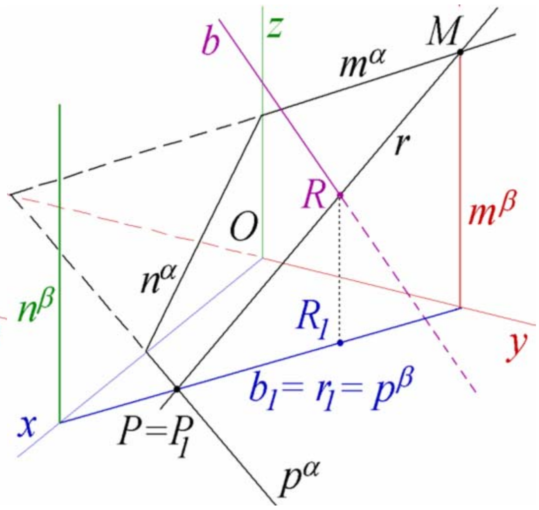
b) Daným bodem vést k dané rovině rovnoběžnou rovinu: Je-li dán bod A svvým axonometrickým průmětem a axonometerickým půdorysem, pak podobně jako v Mongeově projekci vedeme daným bodem přímku ${}^1h^\alpha \parallel p^\beta$, jejím nárysným stopníkem prochází nárysná stopa a bokorysným stopníkem bokorysná stopa. Je-li dán nárys resp. bokorys bodu A, lze zcela analogicky použít hlavní přímku druhé resp. třetí osnovy.



c) Nalézt průsečnici r daných dvou rovin α; β: Podobně jak v Mongeově projekci nejčastěji nalézáme stopníky průsečnice. Vzhledem k tomu, že půdorys půdorysné stopy, nárys nárysné stopy resp. bokorys bokorysné stopy jsou zároveň axonometrickými průměty těctho stop, nalézáme axonometrický průmět prsečnice nejčastěji jako spojnici průsečíků příslušných stop.

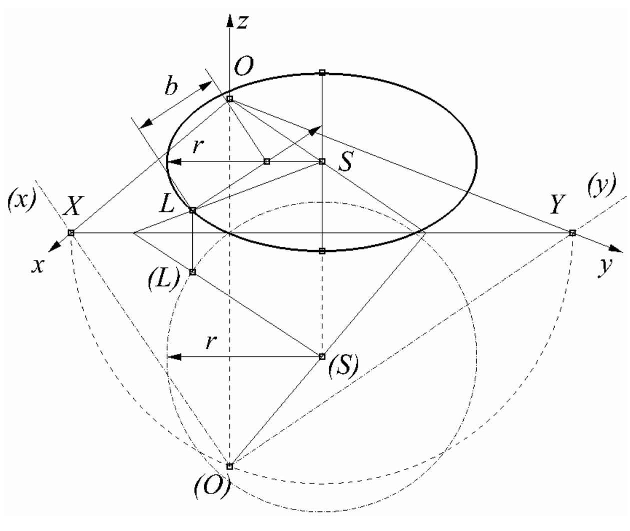
d) Nalézt průsečík R **dané přímky** a **s danou rovinou** α: Opět lze postupovat buď metodou promítací roviny, anebo metodou krycí přímky tak, jako v Mongeově promítání (vlastní konstrukce je ovšem opět prakticky stejná),





9. 4 Planimetrické úlohy v pomocných průmětnách

K řešení planimetrických úloh v půdorysně, nárysně resp. bokorysně využíváme většinou otáčení těchto průmětem do průměty axonometrické. Při otáčení opět využíváme afinity mezi otáčenou pomocnou průmětnou a průmětnou axonometrickou. Afinita mezi těmito dvěma rovinami se do axonometrické průmětny promítá jako osová afinita s osou v příslušné straně axonometrického trojúhelníka (stopou axonometrické průmětny).

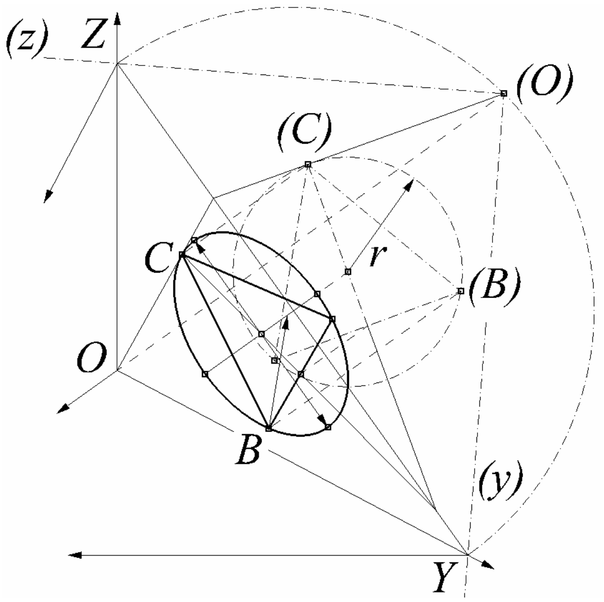


1. Příklad: Jsou dány body S; L v půdorysně. Sestrojme kružnici $k(S;r)$ v půdorysně tak, aby $L \in k$.

Řešení: K vynesení zadaných bodů S; L je třeba otočit půdorysnu do axonometrické průmětny a sestrojit otočené body (S); (L). Tyto body otočíme zpět do nárysny pomocí osové afinity $Af\left(XY;(O);O\right)$. Průmětem kružnice bude elipsa s hlavní osou $a = r \parallel XY$, která prochází bodem L. Sestrojíme ji tedy proužkovou konstrukcí.

2. Příklad: Jsou dány body $C;S_c$ v axonometrické bokorysně. V této průmětně sestrojme rovnostranný trojúhelník ΔABC tak, aby $CS_c = v_c$ byla jeho výškou. Tomuto trojúhelníku opišme kružnici.

Řešení: Pro vynesení bodů $C;S_c$ je třeba otočit bokorysnu do axonometrické průmětny a sestrojit otočené body $(C);(S_c)$. V tomto otočení rovněž sestrojíme požadovaný rovnostranný trojúhelník $\Delta(A)(B)(C)$, kterému rovněž opíšeme kružnici (k). Pro odpovídající konstrukci v bokorysně využijeme osové afinity

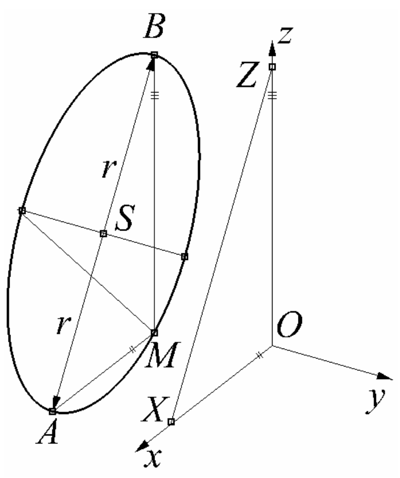


$Af\left(YZ;(O);O\right):(A)\rightarrow A;(B)\rightarrow B;\ (C)\rightarrow C$.

Afinním obrazem k opsané kružnice (k) bude elipsa s hlavní osou $a=r \parallel YZ$, která prochází body $A;B;C$. Sestrojíme ji tedy proužkovou konstrukcí.

3. Příklad: Sestrojme kružnici v nárysně, je-li dán její střed S a poloměr r.

Řešení: Kružnice se promítne jako elipsa s hlavní osou $a=r \parallel XZ$, tedy $a \perp y$, Hlavní vrcholy této elipsy označme $A;B$. Dále sestrojme přímky $r \parallel x$; $A \in r$; $s \parallel z$; $B \in s$. Jedná se o různoběžky, průsečík označme M. Různoběžky $r;s$ jsou navzájem kolmé, bod M tedy leží na hledané kružnici (Thaletova věta), axonometrický průmět bodu M tedy leží na elipse, do které se kružnice promítne. Tuto elipsu můžeme opět sestrojit proužkovou konstrukcí.



9. 5 Zářezová metoda

Zářezová metoda umožňuje sestrojit axomonetrický průmět geometrickíého útvaru $\mathcal{U}$, známe-li jeho půdorys a nárys. Otočíme půdorysnu a nárysnu do axonometrické průmětny, tentokrát ovšem tak, abychom nezměnili orientaci souřadnicové soustavy. Do otočené půdorysny (nársny) přeneseme zadaný půdorys (nárys). Kvůli přehlednosti je vhodné vysunout tyto průměty proti směru osy z resp. y (viz připojený obrázek). Půdorysem A_1 libovolného bodu $A \in \mathcal{U}$ veďme přímku $a_1 \parallel s_1$, nárysem A_2 téhož bodu přímku $a_2 \parallel s_2$ a sestrojme bod $A_a \in s_1 \cap s_2$. Množina všech takto sestrojených bodů je rovnoběžným a axonometrickým průmětem $\mathcal{U}_a$ útvaru $\mathcal{U}$.