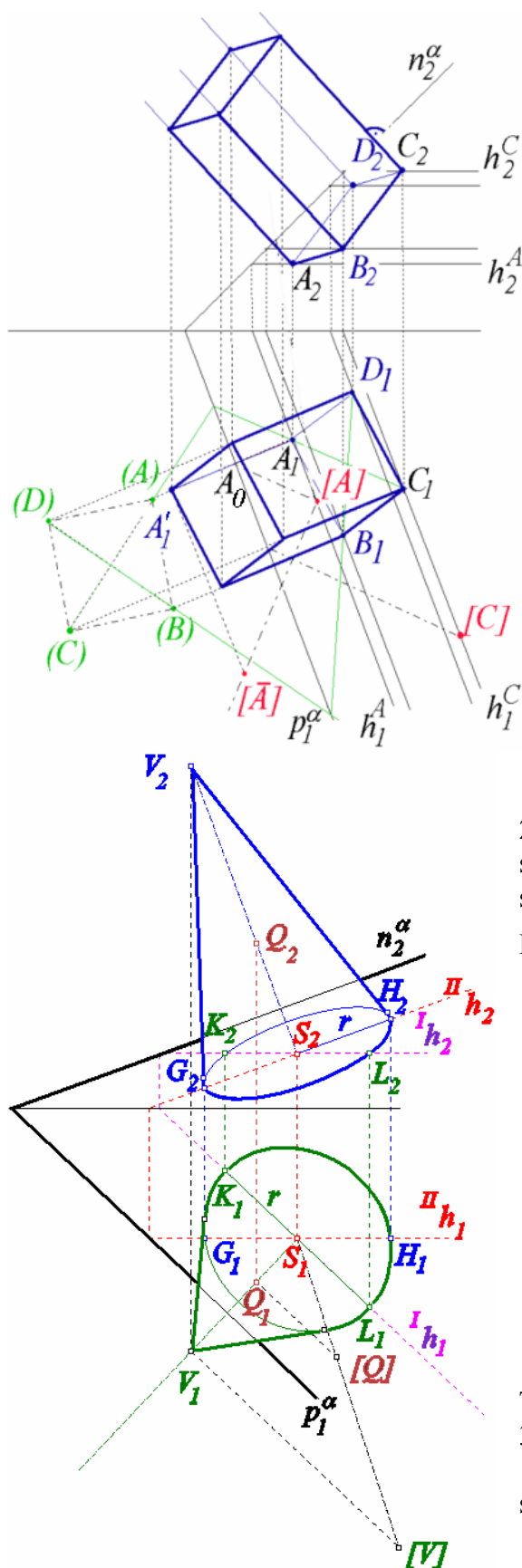


10 Plochy a tělesa

10.1 Průměty elementárních těles a ploch



Elementární plochy a tělesa jsou vyjmenovány v odst. 13. a 14. kpt. 2. 4.

1. Příklad: Mongeova projekce: pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v rovině α , je-li dána úhlopříčka podstavy AC a výška hranolu je v .

Řešení:

- Sestrojit půdorys $A_1B_1C_1D_1$ a nárys $A_2B_2C_2D_2$ podstavy (viz příklad 1 kpt. 8. 5.)
- Sestrojit půdorysy a nárysy pobočných hran - přímky kolmé na rovinu α (viz základní úloha 8. 4. 1)
- Na pobočnou hranu nanést požadovanou výšku - pozor, nelze ji samozřejmě nanést přímo pravítkem (proč?), je třeba aplikovat základní úlohu 8. 4. 3) \Rightarrow vrchol horní podstavy
- Půdorys horní podstavy (shodný s půdorysem podstavy dolní)
- Nárys horní podstavy pomocí ordinál resp. nárysu podstavy dolní.

2. Příklad: Mongeova projekce: rotační kužel s podstavou v dané rovině α . Dán půdorys středu, poloměr podstavy a výška

Řešení:

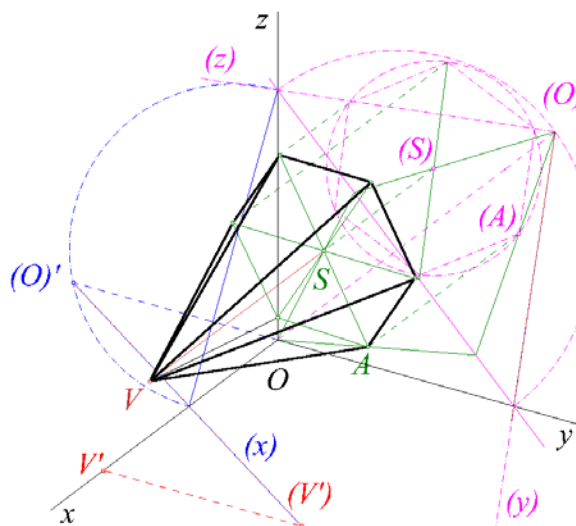
- Půdorys a nárys podstavy (viz příklad 8. 5. 2.)
- Osa kužele - přímka kolmé na rovinu α (viz základní úloha 8. 4. 1) procházející středem podstavy
- Na osu kužele nanést požadovanou výšku - pozor, nelze ji samozřejmě nanést přímo pravítkem (proč?), je třeba aplikovat základní úlohu 8. 4. 3) \Rightarrow vrchol kužele.
- Z půdorysu V_1 (nárysu V_2) vrcholu kužele vést tečny k půdorysu (nárysu) podstavné kružnice.

Tělesa z příkladů 1 a 2 sestrojte v Rhinoceros jako 3-D model. Sestrojte rovněž stopy zadané roviny α a porovnejte půdorys a nárys na svém výkresu s pohledy shora (top) a zepředu (front) v Rhinu.

3. Příklad: Pravoúhlá axonometrie: pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v bokorysně, je-li dána úhlopříčka podstavy AD a výška hranolu je v .

Řešení:

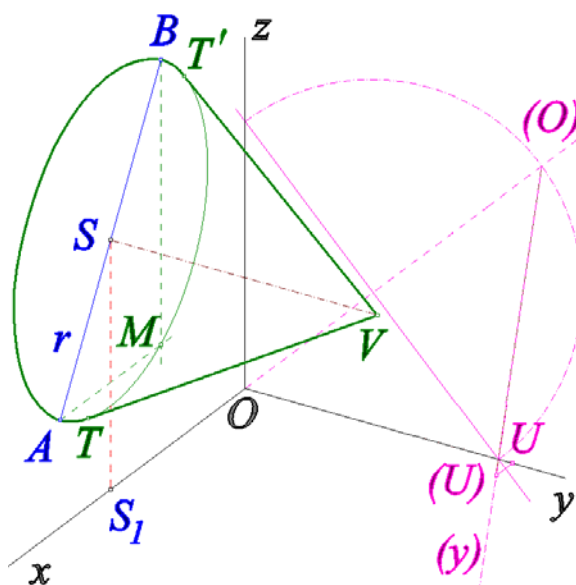
- Podstava (pravidelný šestiúhelník) v bokorysně (rovnostanný trojúhelník v bokorysně – viz. př. 2 kpt. 9. 4)
- $V':V' \in x; |OV'| = v$; výšku v je ovšem třeba naměřit na otočené ose x – viz úsečka $(O)'(V')$
- $V:VS \parallel OV'; VS \cong OV'$



4. Příklad: Pravoúhlá axonometrie: Rotační kužel s podstavou v nárysně. Dán střed podstavy v nárysně, poloměr podstavy a výška

Řešení:

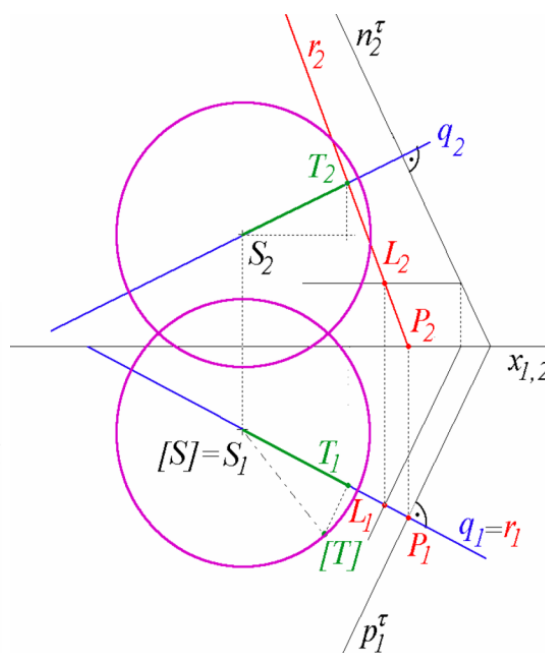
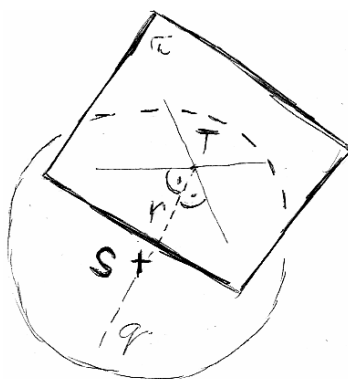
- Podstava (kruh) v nárysně (viz př. 3. kpt. 9. 4)
- Vrchol kužele analogicky předchozímu příkladu
- $VT; VT'$: - tečny z bodu V k průmětu podstavné kružnice



5. Příklad: Mongeova projekce: Sestrojme kulovou plochu, je-li dán její střed S a tečná rovina τ .

Řešení: Tato úloha se od předchozích poněkud liší. Dosud jsme sestrojovali tělesa prakticky přímo ze zadaných prvků, takže řešení spočívalo jen v mechanické aplikaci základních úloh uvedených v kapitolách 8. 3., 8. 4. a 9. 3. Zde máme sestrojit kulovou plochu, známe-li její střed a poloměr není dán přímo v zadání. V podobných případech bychom měli postupovat způsobem demonstrováním v úloze 8 kpt. 5. 5. a začít rozбором nebo (jak se v těchto případech také říká) prostorovým řešením, a to bez ohledu na zadané promítání, ve kterém máme toto řešení provést.

Rozbor: Vzdálenost tečné roviny kulové plochy od jejího středu je rovna poloměru a



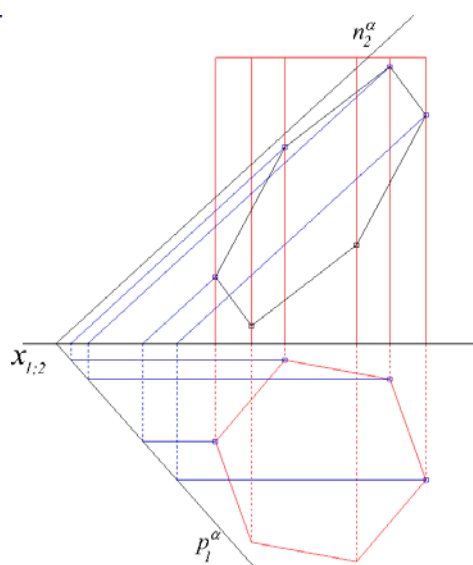
určíme ji jako vzdálenost paty T kolmice $q \perp \tau$; $S \in q$. Tím je dána posloupnost základních úloh v příslušném promítání.

Konstrukce:

- $q: S \in q; q \perp \tau$ (viz základní úloha 8. 4. a).
- $T: T \in q \cap \tau$ (viz základní úloha 8. 3. d).
- $[T]$ - sklopený bod T (viz základní úloha 8. 4. c).
- půdorys $k_1(S_1; r = |S_1[T]|)$
- nárys $k_2(S_2; r = |S_1[T]|)$

Všechny kroky konstrukce jsou jednoznačné, úloha má tedy jedno řešení

10. 2 Průniky elementárních těles a ploch s přímkami a rovinami



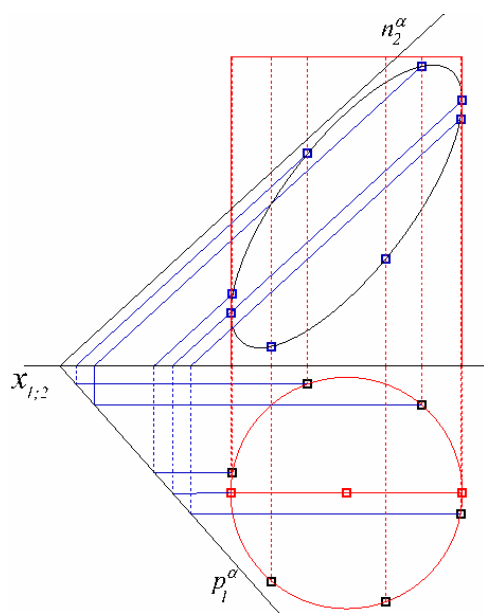
1. Příklad: Mongeova projekce: Sestrojme řez

- pravidelného šestibokého hranolu
- rotačního válce

s podstavou v půdorysně rovinou α .

Řešení:

- Řezem je šestiúhelník, jehož půdorys splyne s půdorysem podstavy hranolu. Vrcholy nárysu sestrojíme jako průsečíky pobočných hran hranolu s rovinou α (viz základní úloha 8. 3. d). Nárys je afinním obrazem půdorysu (pravidelného šestiúhelníka), jeho protější strany tedy musí být rovnoběžné (Pozor! – osou afinity ovšem není základnice).
- Řezem je elipsa, jejíž půdorys splyne s půdorysem podstavy válce. Nárysem je elipsa, kterou můžeme bodově sestrojit zcela analogicky, jako v předchozím příkladu.



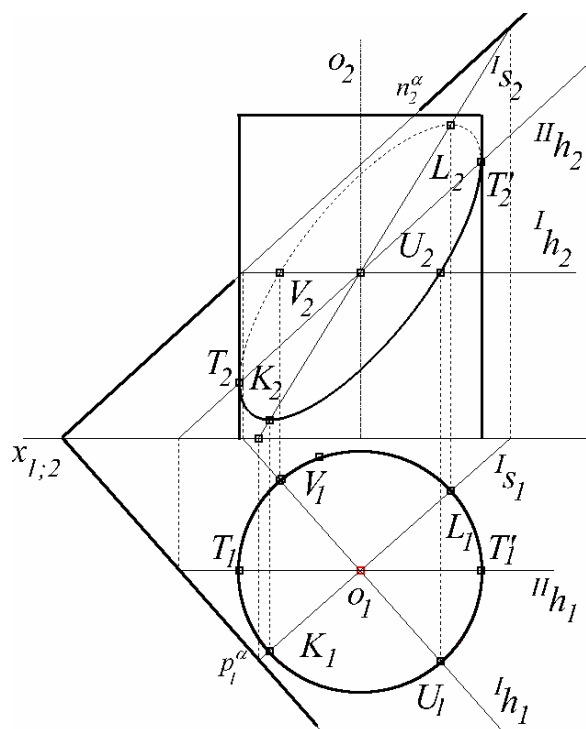
Vrcholy resp. ohniska nárysu eliptického řezu válce lze najít následujícím způsobem: Sestrojíme hlavní a spádovou přímku první osnovy roviny α . Půdorysy těchto přímek jsou na sebe kolmé, nárysy jsou jejich obrazy ve vhodné osové afinitě. Úsečky $K_2L_2; U_2V_2$ jsou tedy sdruženými průměry hledané elipsy, nárys řezu tedy najdeme Rytzovou konstrukcí. Rovněž je třeba najít body dotyku $T_2; T_2'$ nárysu řezu s nárysem válce – v těchto bodech totiž řez mění viditelnost. Tyto body najdeme jako průsečíky hlavní přímky druhé osnovy, která protíná osu válce, s válcovou plochou.

2. Příklad: Mongeova projekce: Sestrojme řez

pravidelného dvanáctibokého hranolu a rotačního

kužele s podstavou v půdorysně rovinou α kolmou na nárysnu, která neprotíná podstavu a neprochází vrcholem

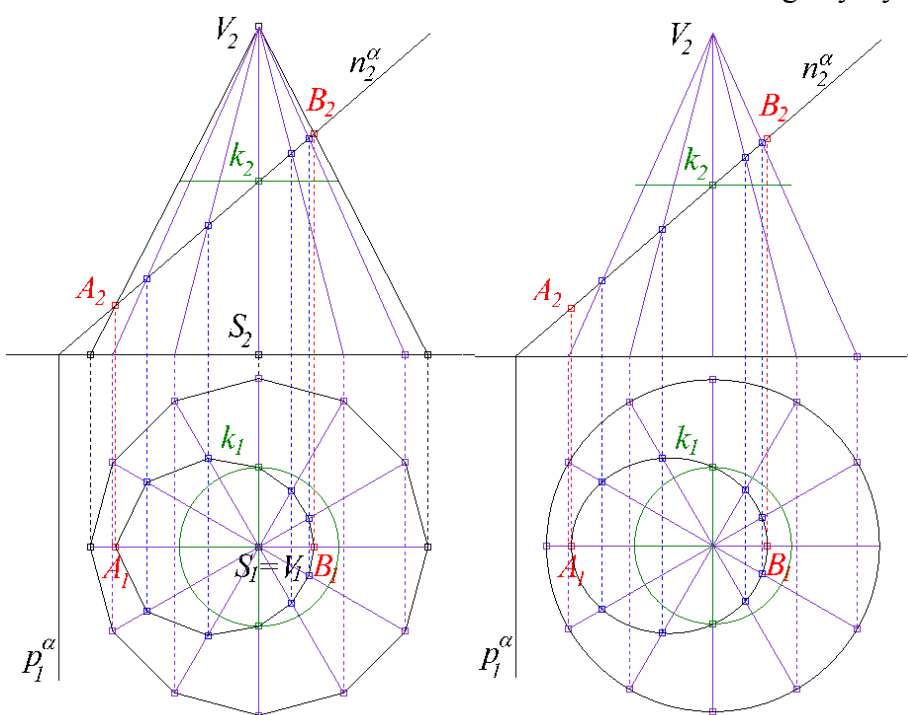
Řešení:



- a) Řezem je dvanáctiúhelník, jehož nárysem je (vzhledem ke speciální poloze roviny α) úsečka, jejímiž krajními body jsou průsečíky nárysné stopy s obrysem nárysu tělesa. Nárysy vrcholů řezu jsou průsečíky nárysné stopy s nárysy hran. Půdorysy vrcholů řezu doplníme již velmi jednoduše.
- b) Řezem je elipsa, jejímž nárysem je úsečka podobně jako v předchozím případě. Půdorysem je elipsa, jejíž bodovou konstrukcí lze provést stejně jako v předchozím případě pomocí dostatečného počtu povrsek. Konstrukci ohnisek a vedlejších vrcholů půdorysu řezu provedeme v tomto případě velmi snadno, neboť půdorys vrcholu kužele je současně ohniskem sestrojované elipsy.

Zcela analogicky bychom mohli sestrojit i řez

parabolický a hyperbolický. Ke konstrukci řezů kužele a kuželové plochy je však výhodnější použít místo povrchových přímek kružnice – řezy plochy rovinami kolnými na nárysnu (jedna z těchto kružnic je naznačena i na připojeném obrázku). Tento postup je totiž obecnější a je použitelný u všech rotačních ploch (viz následující příklad).



3. Příklad: Mongeova projekce: Sestrojme řez rotační kuželové

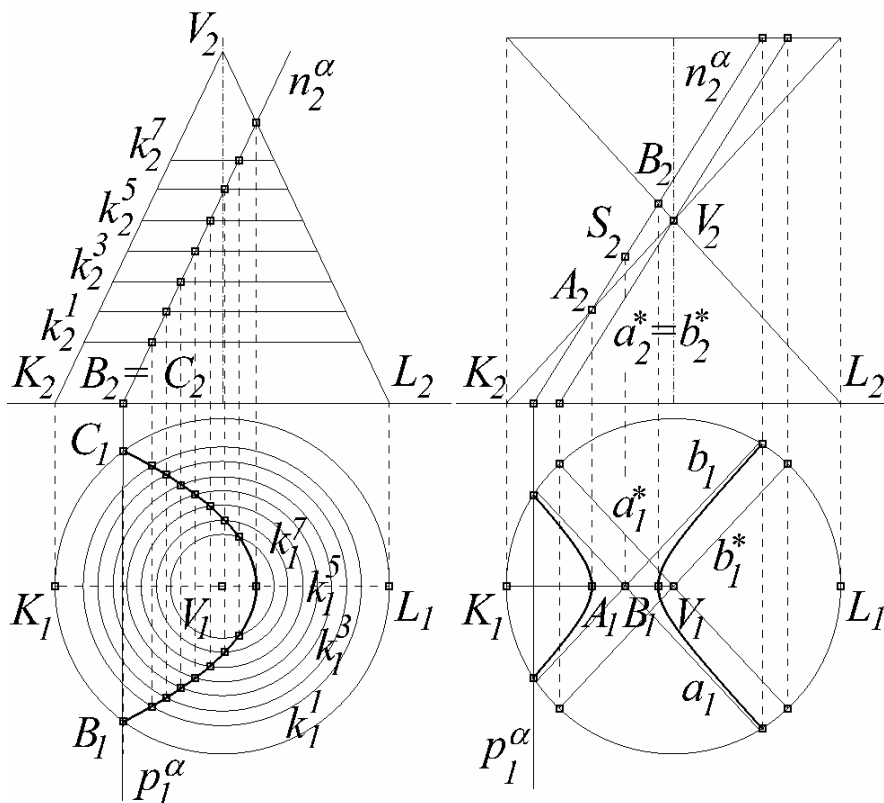
plochy rovinou α kolmou na nárysnu, která neprochází vrchlem a je rovnoběžná právě s

a) jednou površkou kuželové plochy

b) dvěma površkami

Řešení: řezem je v případě a) parabola, jejímž půdorysem je parabola a nárysem polopřímka, v případě b) je řezem hyperbola, jejímž půdorysem je hyperbola a nárysem dvojice polorámek. Bodovou konstrukcí půdorysu je výhodné v obou případech provést pomocí rovin σ^i rovnoběžných s půdorysnou. Tyto roviny protnou kuželovou plochu v kružnicích k^i , jejichž nárysem jsou úsečky k_2^i , které protnou nárysnou stopu n_2^α roviny α v bodech P_2^i . Půdorysy P_1^i těchto bodů musejí ležet na půdorysech k_1^i kružnic k^i a na příslušných ordinálách - viz

připojený obrázek vlevo. Bodovou konstrukci hyperbolického řezu provedeme analogicky (ta je na obrázku vpravo již vynechána). Konstrukce půdorysu je opět usnadněna faktem, že půdorys vrcholu je ohniskem kuželosečky v půdorysu. Tato skutečnost v případě b) zároveň umožňuje konstrukci asympt. Ty můžeme sestavit jako rovnoběžky $a; b \in \alpha$ s površkami $a^*; b^* \parallel \alpha$; které procházejí vrcholem.

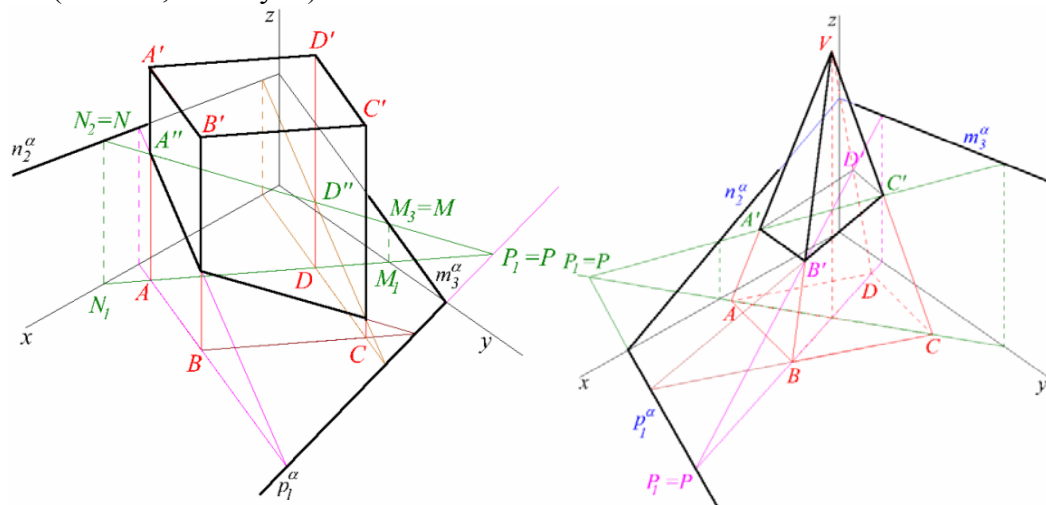


4. Příklad: Pravoúhlá axonometrie: Sestrojme řez pravidelného čtyřbokého hranolu a jehlanu s podstavou v půdorysně rovinou α , která neprotíná podstavy těles.

Řešení: Řezem je čtyřúhelník (v případě hranolu rovnoběžník). Řešení spočívá v opakované konstrukci průsečíků hran tělesa s rovinou (viz základní úloha 9. 3. d). Tuto úlohu je také možné provést jen jednou a dále využít skutečnosti, že řez je obrazem podstavy v osové afinitě (středové kolíneaci) s osou v půdorysné stopě a směrem definovaným hranami

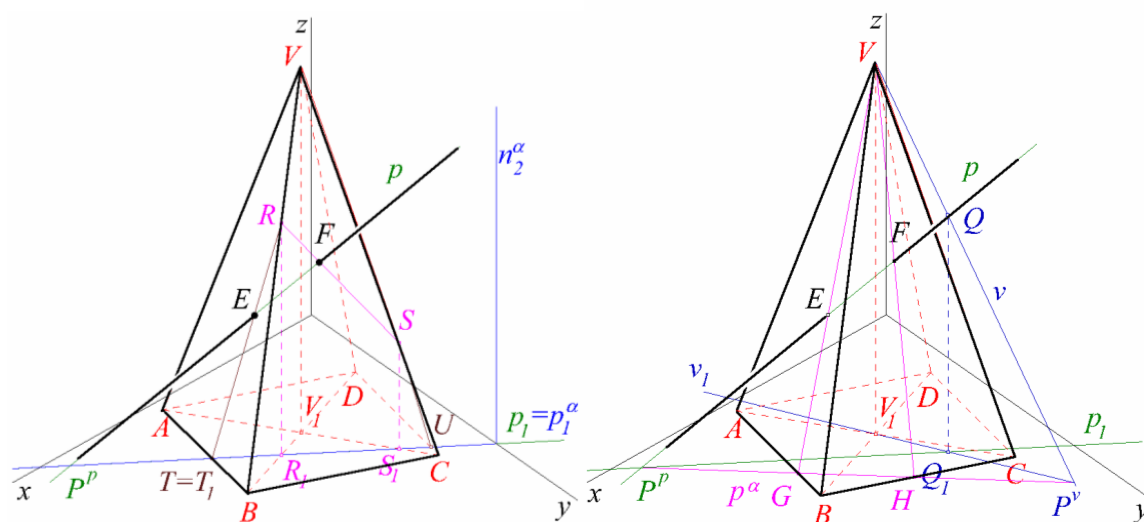
hranolu (středem ve vrcholu jehlanu)

Poznámka: Této konstrukci můžeme využít také k bodové konstrukci rovinného řezu válce (kužele), kdy válec (kužel) nahradíme pravidelným n -bokým hranolem (jehlanem) pro dostatečně velké n (viz př. 1. a 2). Tímto způsobem ovšem nelze zjistit potřebné parametry kuželoseček (ohniska, vrcholy...)



5. Příklad: Pravoúhlá axonometrie: Sestrojme průsečíky pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v půdorysně s přímkou.

Řešení: Konstrukci jehlanu provedeme podobně jako v př. 3. kpt. 9. 1. Průsečíky najdeme tak, že danou přímkou proložíme vhodnou rovinu, sestrojíme řez jehlanu touto rovinou a hledané průsečíky najdeme jako průsečíky přímky s nalezeným řezem. K řešení úlohy lze principiálně použít libovolnou rovinu, volíme ji však tak, aby řešení bylo co nejjednodušší – používáme buď rovinu promítací (tj. v našem případě rovinu kolmou na půdorysnu – viz připojený obrázek vlevo), anebo rovinu vrcholovou, tj. rovinu procházející vrcholem jehlanu (obrázek vpravo). Půdorysná stopa promítací roviny splyne s půdorysem dané příčky, nárysá a bokorysná stopa jsou rovnoběžné s axonometrickou osou z (tyto dvě stopy však k vlastní konstrukci nejsou potřeba). Dále najdeme průsečíky promítací roviny s hranami (půdorysy těchto průsečíků jsou průsečíky úhlopříček půdorysu podstavy s půdorysnou stopou roviny), konstrukce řezu a nalezení průsečíků už je pak jednoduché. Použijeme-li rovinu vrcholovou, je třeba rovněž sestrojit její půdorysnou stopu. Ta prochází půdorysným stopníkem dané přímky a dále půdorysným stopníkem libovolné různoběžky s přímkou p , která prochází vrcholem (na našem obrázku je to přímka v). Řezem je trojúhelník určený vrcholem a průsečíky půdorysné stopy s půdorysem podstavy (na našem obrázku jsou tyto body označeny $G; H$). Hledané průsečíky jsou pak $E \in p \cap VG$; $F \in p \cap VH$.

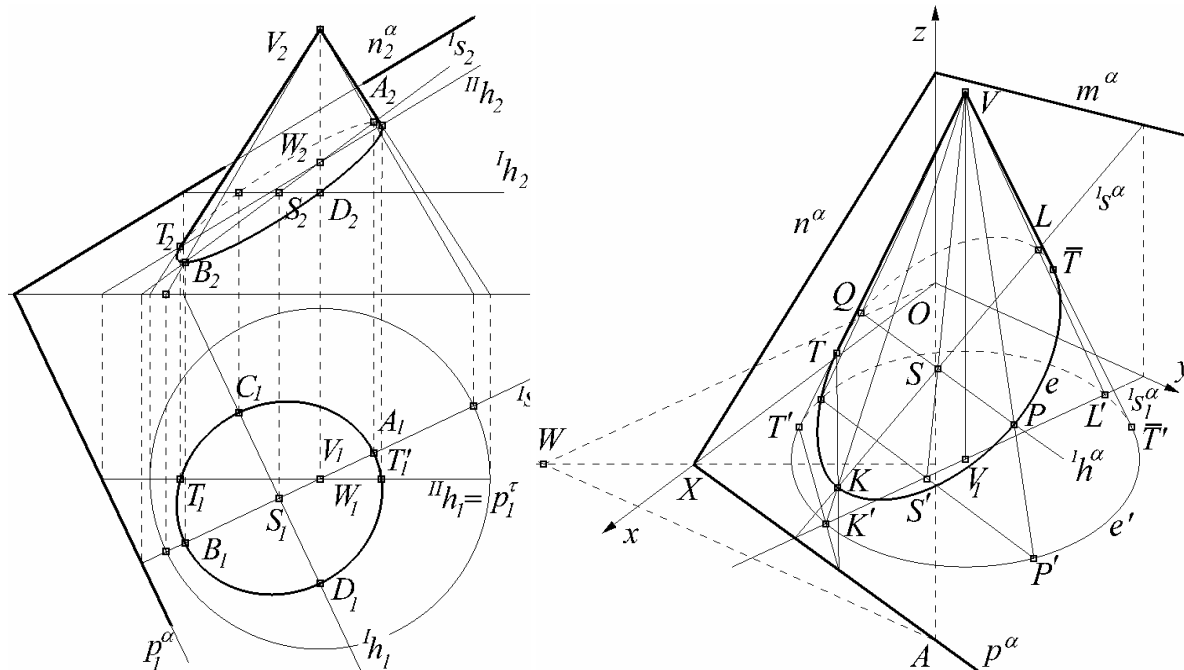


6. Příklad: Sestrojme eliptický řez kužele s podstavou v půdorysně rovinou v obecné poloze.

Řešení: Úlohu vyřešíme jak v Mongeově promítání, tak v pravouhlé axonometrii.

a) Mongeovo promítání: Hlavní osa půdorysu řezu leží na půdorysu spádové přímky první osy, vedlejší osa na půdorysu hlavní přímky první osy. Nárysy těchto přímek určují přímky, na nichž leží sdružené průměry nárysu řezu (nárys spádové přímky byl na připojeném obrázku sestrojen pomocí půdorysného stopníku a bodu $W \in l_s$, jehož půdorys se kryje s půdorysem vrcholu kužele). Body $A_1; B_1$, které omezují hlavní osu půdorysu, a body $A_2; B_2$, které omezují jeden ze sdružených průměrů nárysu, získáme jako sdružené průměty průsečíků $A; B$ spádové přímky s kuželovou plochou (na připojeném obrázku jsou sestrojeny pomocí vrcholové roviny). Sdružené průměty středu S řezu jsou středy úseček A_1B_1 resp. A_2B_2 . K omezení vedlejší osy v půdorysu využijeme znalosti hlavní osy A_1B_1 a skutečnosti že půdorys vrcholu V_1 kuželové plochy je ohniskem půdorysu řezu. Nárysy $C_2; D_2$ bodů $C; D$ omezí druhý sdružený průměr v nárysu (nárys C_2 není na obrázku pro nedostatek místa označen). Nárys řezu pak sestrojíme Rytzovou konstrukcí (která na obrázku není provedena). Sestrojíme rovněž body $T; T'$, ve kterých se nárys řezu dotýká nárysu kuželové plochy. Osou kužele proložíme rovinu τ rovnoběžnou s nárysnou. Tato rovina rozděluje kuželovou plochu na viditelnou a neviditelnou část vzhledem k nárysu.

Rovinu řezu protíná v hlavní přímce druhé osnvy a nárysy $T_2;T_2'$ bodů $T;T'$ určíme jako průsečíky nárysu $''h_2$ s nárysem kuželové plochy. V bodech $T_2;T_2'$ se mění viditelnost řezu.

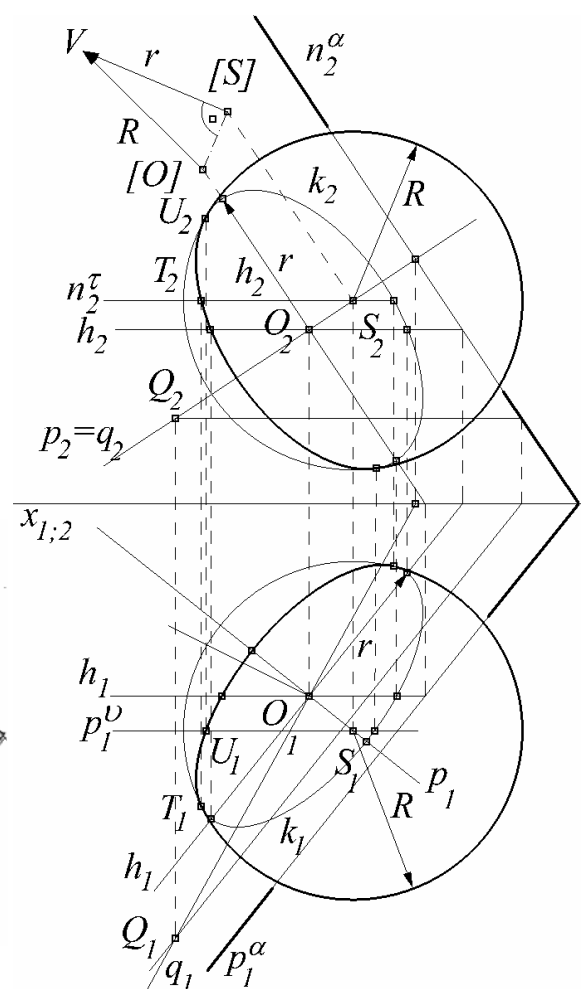
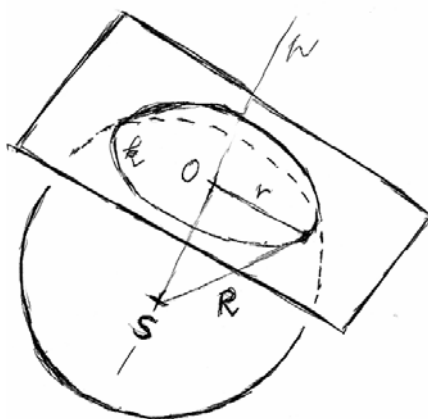


- b) Konstrukce průmětu kuželové plochy – viz příklad 4 kpt. 9. 1. Osy eliptického řezu leží opět na spádové resp. hlavní přímce první osnvy dané roviny, sestrojíme však axonometrický průmět tohoto řezu, kde průměty os přejdou ve sdružené průměry. Spádovou přímku sestrojíme dle 9. 2. 6 (orthocentrum je označeno W pro odlišení od vrcholu kuželové plochy). Ke konstrukci sdružených průměrů řezu jakož i bodů dotyku průmětu řezu s kuželovou plochou, ve kterých se mění viditelnost, využijeme středové kolineace $kol(V; e' \rightarrow e)$ mezi průmětem podstavy a řezu. Průmět řezu pak sestrojíme Rytzovou konstrukcí, která je na připojeném obrázku již vynechána.

7. Příklad: Mongeovo promítání: Sestrojme rovinný řez kulové plochy.

Řešení: Hledaným řezem je kružnice s neznámým středem i poloměrem.

Rozbor: Střed O hledané kružnice je pata kolmice spuštěné ze středu kulové plochy na rovinu řezu. Její poloměr r najdeme jako velikost odvěsny pravo-



úhlého trojúhelníka $\Delta[O]V[S]$, jehož přepona je rovna poloměru R dané kulové plochy a druhou odvěsnou je OS .

- Konstrukce:
- a) $p: p \perp \alpha; S \in p$ (základní úloha 8. 4. a)
 - b) $O: O \in p \cap \alpha$; (základní úloha 8. 3. d)
 - c) $[O][S]$ - velikost úsečky OS (základní úloha 8. 4. d)
 - d) $\Delta[O]V[S]; |[O]V| = R$ (věta Ssu)
 - e) $k(O; r) \subset \alpha$ (příklad 2 kpt. 8.5.)

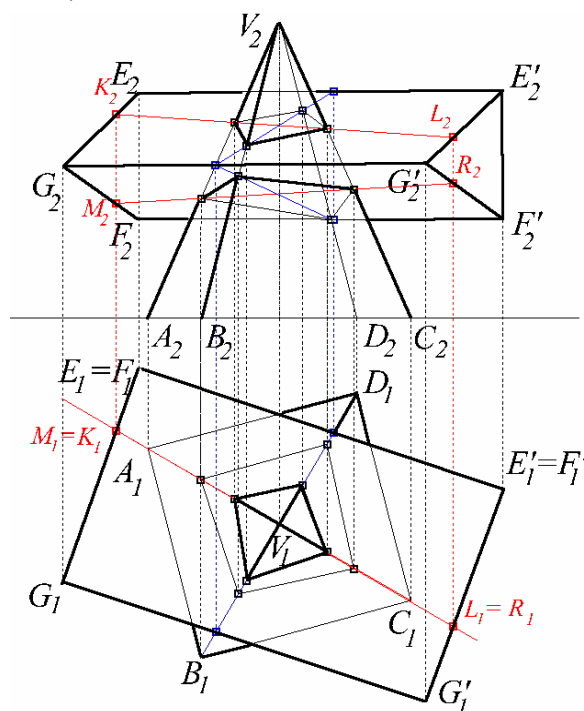
Sestrojíme rovněž body $T; T'$, $U; U'$ ve kterých se průměty řezu dotýkají průmětů kulové plochy. Středem kulové plochy roviny τ ; ν rovnoběžné s půdorysnou resp. nárysou. Tyto roviny rozdělují kulovou plochu na viditelnou a neviditelnou část vzhledem k půdorysu resp. nárysu. Rovinu řezu protínají v hlavní přímce první resp. druhé osnovy. V bodech $T_1; T_1'$ se mění viditelnost řezu v půdorysu, v bodech $U_2; U_2'$ se mění viditelnost řezu v nárysu (body T_1' , U_2' nejsou na obrázku pro nedostatek místa popsány).

47

10. 3 Průniky elementárních těles a ploch

Jestliže jsou v prostoru umístěny dvě tělesa či plochy tak, že množiny všech jejich bodů mají neprázdný průnik, hovoříme o **průniku** těles či ploch. V případě ploch se jedná o množinu bodů, ve kterých křivky jedné plochy protínají druhou plochu. Tyto průsečíky tvoří prostorovou(-é) křivku(-y), které je třeba sestrojit. V případě těles většinou nesestavujeme celý průnik (který se v literatuře někdy nazývá **jádro**), ale omezuje se na průnik jejich povrchů. V případě ploch je průnikem buď jedna křivka (jedná se o **částečný průnik**), anebo dvě křivky (jedná se o **úplný průnik**). Průniková křivka může sama sebe protínat.

V této kapitole se omezíme na průniky hranolů, jehlanů, kruhových válců a kuželů. V případě hranolů a jehlanů se průniková(-é) křivka(-y) skládá(-ají) z úseček (částí průsečnic stěn obou těles).



1. Příklad: V Mongeově promítání sestrojíme průnik trojbokého hranolu a čtyřbokého jehlanu.

Řešení: Je třeba opakovaně sestrojovat průsečíky přímek (hran jednoho tělesa) s rovinami (stěn druhého tělesa), tedy opakovat základní úlohu 8. 3. d. zde ovšem v případě, kdy rovina není určena stopami. Pořadí nalézání jednotlivých průsečíků je principiálně zcela libovolné. V řešení na připojeném obrázku bylo konkrétně využito přímek, jejichž půdorys se kryl s půdorysy pobočných hran jehlanu. Jak je zřejmé z půdorysu, průsečnice stěn tvoří dva izolované čtyřúhelníky, v tomto případě se tedy jedná o úplný průnik.

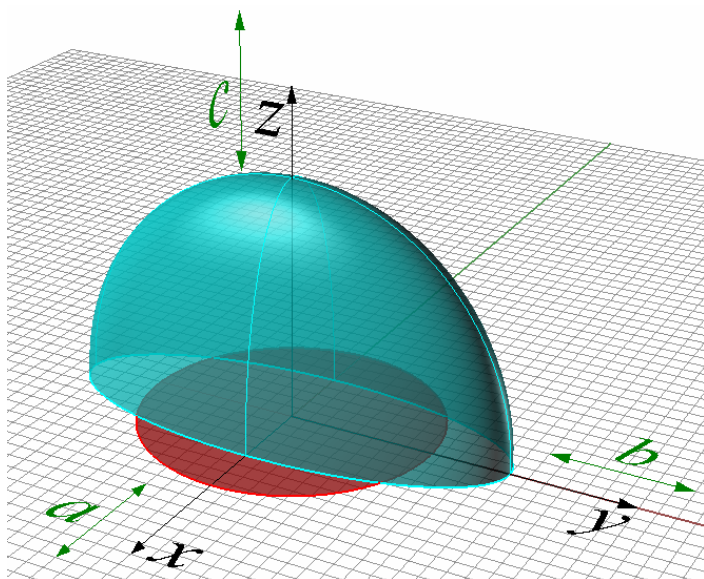
10. 4 Metody generování ploch

Plochy v prostoru můžeme vytvářet v podstatě třím způsobem.

1. Geometrická transformace plochy: Mějme plochu, která je určena bodovou rovnicí $\mathbf{Q}(u;v) = (f_1(u;v); f_2(u;v); f_3(u;v); \omega)$. Dále mějme matici $\mathbf{M}(u,v)$ typu 4x4 jejímiž prvky jsou spojité funkce $m_{i,j}(u,v)$. Pak bodovou funkcí

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u;v) = \mathbf{M}(u,v) \cdot \mathbf{Q}^T(u;v)$$

je určena opět plocha. Je-li plocha $\mathbf{Q}(u;v)$ regulární, matice $\mathbf{M}(u,v)$ regulární a její prvky $m_{i,j}(u,v)$ mají spojité parciální derivace, je plocha $\bar{\mathbf{Q}}(u;v)$ rovněž regulární.



2. Příklad: Maticí

$$\mathbf{M}(u,v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \cdot \sqrt{1-u^2-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a plochou

$\mathbf{Q}(r;s): \langle 0;1 \rangle \times \langle 0;2\pi \rangle \rightarrow (u \cos v; u \sin v; 1; 1)$
(kruh) vytvoříme plochu

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u;v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \cdot \sqrt{1-u^2-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au \cos v \\ au \sin v \\ c \cdot \sqrt{1-u^2-v^2} \\ 1 \end{pmatrix}; u \in \langle 0;1 \rangle; v \in \langle 0;2\pi \rangle.$$

Pro $a=b=c=r$ je to polovina kulové plochy, pro $a=b \neq c$ popř. $a \neq b = c$ nebo $a = c \neq b$ polovina tzv. rotačního elipsoidu, pro $a \neq c \neq b \neq a$ pak tzv. trojosého elipsoidu.

3. Šablonování křivky: Uvažujme křivku

$\mathbf{k}(v) = (f_1(v); f_2(v); f_3(v); \omega); v \in \langle v_1; v_2 \rangle$ a matici $\mathbf{M}(u); u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ typu 4x4 jejímiž

prvky jsou spojité funkce $m_{i,j}(u)$. Pak bodovou funkcí

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u;v) = \mathbf{M}(u) \cdot \mathbf{k}^T(v) \quad (1)$$

je určena plocha. Křivku nazýváme **šablonou**, popř. **řídící křivkou**, matici $\mathbf{M}(u)$ je určena třída geometrických transformací řídící křivky – tzv. **generující princip**.

Je-li křivka $k(v)$ regulární, matice $M(u)$ určuje regulární transformaci regulární a její prvky $m_{i,j}(u)$ mají spojité parciální derivace, je plocha $\bar{Q}(u;v)$ regulární.

Geometricky si tento způsob konstrukce plochy lze představit tak, že matice $M(u)$ popisuje změnu „tvaru“ a „polohy“ křivky $k(v)$ v čase u . Plocha je pak vytvořena všemi body, kterými křivka prochází v časech $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$.

Speciální typy ploch:

Podle šablony:

a) Přímkové plochy: $k(v)$ je přímka nebo část přímky. Přímkové plochy se dále dělí na rozvinutelné a nerozvinutelné (zborcené).

b) Cyklické plochy: $k(v)$ je kružnice nebo část kružnice

Podle generujícího principu:

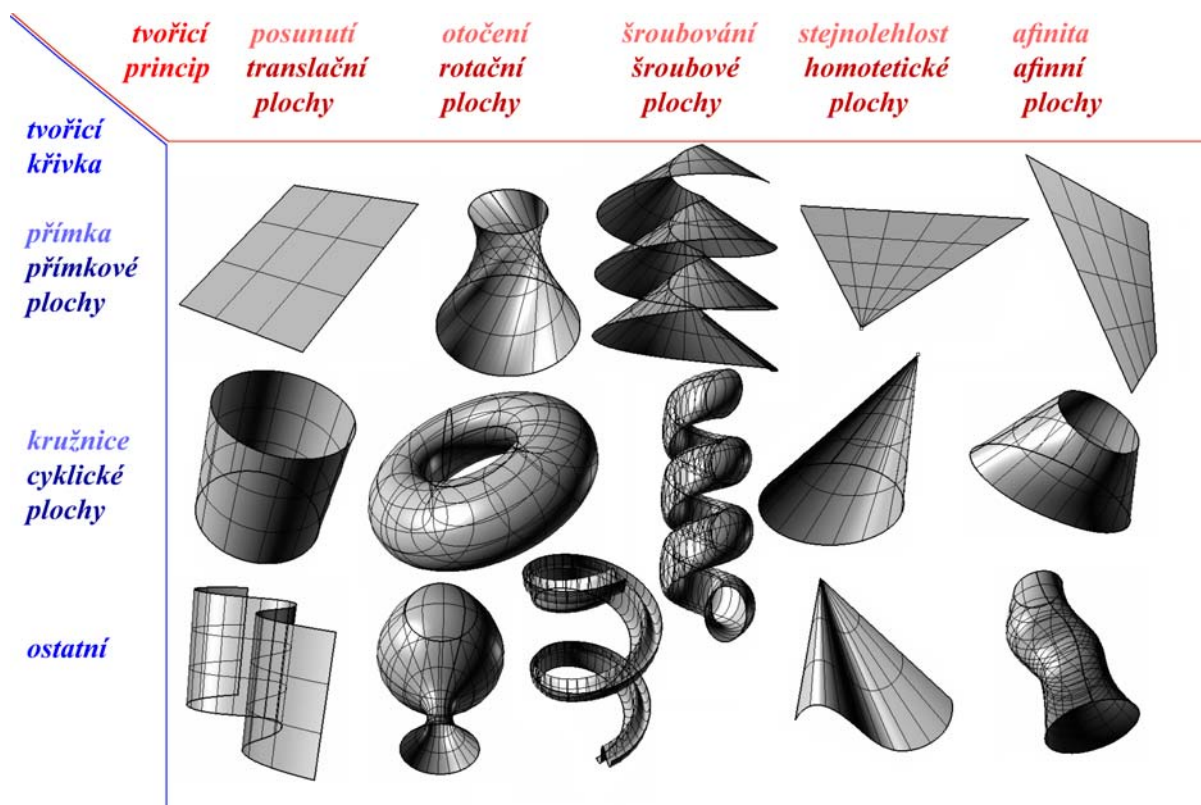
a) Kolineární a afinní plochy: $M(u)$ je pro každé $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ matice kolineace resp. afinity,

b) Homotetické plochy: $M(u)$ je pro každé $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ matice stejnolehlosti.

c) Translační plochy: $M(u)$ je pro každé $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ matice posunutí.

d) Rotační plochy: $M(u)$ je pro každé $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ matice rotace.

e) Šroubové plochy: Je-li $M(u)$ pro každé $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ matice shodnosti složené z rotace a posunutí ve směru kolmém na rovinu rotace.



4. Příklad: Bodovou funkcí $\mathbf{u}(u) = (0; u; 2u; 1)$; $u \in \langle 0; 1 \rangle$ je určena úsečka s krajními body $A = \mathbf{u}(0) = (0; 0; 0; 1)$; $B = \mathbf{u}(1) = (0; 1; 2; 1)$. Úsečku necháme rotovat kolem osy z o úhel $v \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Plocha

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u; v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix}; u \in \langle 0; 2\pi \rangle; v \in \langle 0; 1 \rangle$$

je pláštěm rotačního kužele s vrcholem v počátku, poloměrem podstavy $r = 1$ a výškou $z = 2$. Jeho u -křivky jsou úsečky, v -křivky kružnice.

5. Příklad: bodovou funkcí

$$\mathbf{K}(u) = (\cos u; \sin u; 2; 1)$$

je určena kružnice ležící v rovině $z = 2$ s poloměrem $r = 1$, matice $u \in \langle 0; 2\pi \rangle$

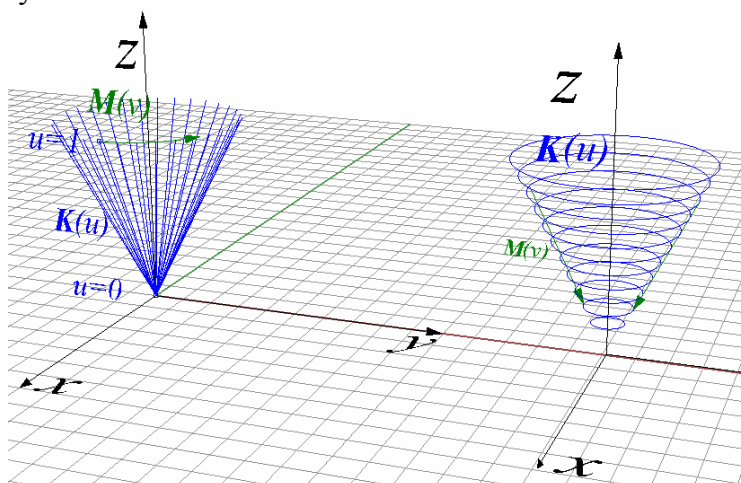
$$\mathbf{M}(v) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v \in \langle 0; 1 \rangle$$

je maticí všech stejnohlostí koeficientem $v \in \langle 0; 1 \rangle$ (tyto stejnohlosti zmenšují) se středem v počátku souřadnicové soustavy, při $v = 0$ je celá kružnice zobrazena do počátku. Kružnice $\mathbf{K}(u)$ podrobená všem těmto stejnohlostem vytvoří cyklickou homotetickou plochu

$$\mathbf{Q}^T(u; v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{K}^T(u)$$

$$\mathbf{Q}^T(u; v) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Je to plášť stejného rotačního kužele jako v předchozím případě s tím, že jeho u -křivky jsou kružnice, v -křivky úsečky.



6. Příklad: Bodovou funkcí

$$\mathbf{K}(u) = (2 \cos u + 4; 2 \sin u; 0; 1)$$

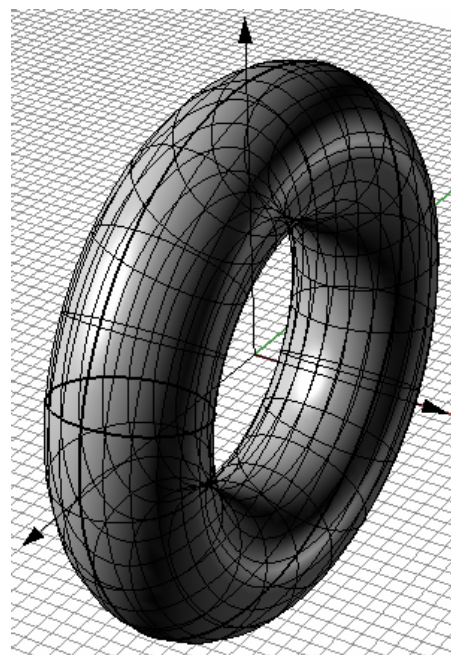
je určena kružnice se středem $\mathbf{S} = (4; 0; 0; 1)$ a poloměrem $r = 2$, která leží v rovině $z = 0$. Matice

$$\mathbf{M}(v) = \begin{pmatrix} 4 \cos v & 0 & -4 \sin v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 \sin v & 0 & 4 \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

je matice rotací o úhel $v \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Kružnice $\mathbf{K}(u)$ vytvoří při těchto rotacích rotační cyklickou plochu

$$\mathbf{Q}^T(u; v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{K}^T(u) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cos v & 0 & -4 \sin v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 \sin v & 0 & 4 \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2 \cos u \\ 2 \sin u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos v (4 + 2 \cos u) \\ 2 \sin u \\ 4 \sin v (4 + 2 \cos u) \\ 1 \end{pmatrix}$$



7. Tenzorový součin u, v křivek: Mějme dány bázevé funkce $\mathbf{f} = (f_0(u); f_1(u); \dots; f_m(u))$, bázevé funkce $\mathbf{g} = (g_0(v); g_1(v); \dots; g_n(v))$ a matici $\mathbf{M}(\omega_{ij}P_{ij})$ typu $m \times n$, jejímiž prvky jsou řídicí body opatřené vahami. Výraz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = (f_0(u) \ f_1(u) \ \dots \ f_m(u)) \begin{pmatrix} \omega_{00}P_{00} & \omega_{01}P_{01} & \dots & \omega_{0n}P_{0n} \\ \omega_{10}P_{10} & \omega_{11}P_{11} & \dots & \omega_{1n}P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m0}P_{m0} & \omega_{m1}P_{m1} & \dots & \omega_{mn}P_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(v) \\ g_1(v) \\ \dots \\ g_n(v) \end{pmatrix}$$

nazýváme tenzorovým součinem křivek. Je to součin $n+1$ u -křivek (viz kpt. 5. 5. odst. 5), jejichž rovnice jsou dány skalárním součinem řádku $\mathbf{f} = (f_0; f_1; \dots; f_m)$ a j -tého sloupce matice $\mathbf{M}(\omega_{ij}P_{ij})$, a $m+1$ v -křivek – skalárních součinů i -tého řádku matice $\mathbf{M}(\omega_{ij}P_{ij})$ a sloupce $\mathbf{g}^T = (g_0; g_1; \dots; g_n)^T \cdot P_{ij}$; $i = 0; 1; \dots; m$; $j = 0; 1; \dots; n$; jsou body projektivního prostoru, které tvoří tzv. řídicí polygon. V praktických konstrukcích jsou řídicí body vždy vlastní.

8. NURBS plochy vznikají součinem NURBS křivek. Ve výrazu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = (f_0 \ f_1 \ \dots \ f_m) \begin{pmatrix} \omega_{00}P_{00} & \omega_{01}P_{01} & \dots & \omega_{0n}P_{0n} \\ \omega_{10}P_{10} & \omega_{11}P_{11} & \dots & \omega_{1n}P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m0}P_{m0} & \omega_{m1}P_{m1} & \dots & \omega_{mn}P_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} P_{ij}$$

označme $P_{ij} = (p_{ij1}; p_{ij2}; p_{ij3}; 1)$. Pro bod \mathbf{Q} pak dostáváme

$$Q = (q_1; q_2; q_3; q_4) = \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij1}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij2}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij3}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} \right)$$

Jestliže chceme tento bod reprezentovat euklidovským reprezentantem, musí být

$$Q = \left(\frac{q_1}{q_4}, \frac{q_2}{q_4}, \frac{q_3}{q_4}, 1 \right) = \left(\frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij1}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}, \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij2}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}, \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij3}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}, 1 \right)$$

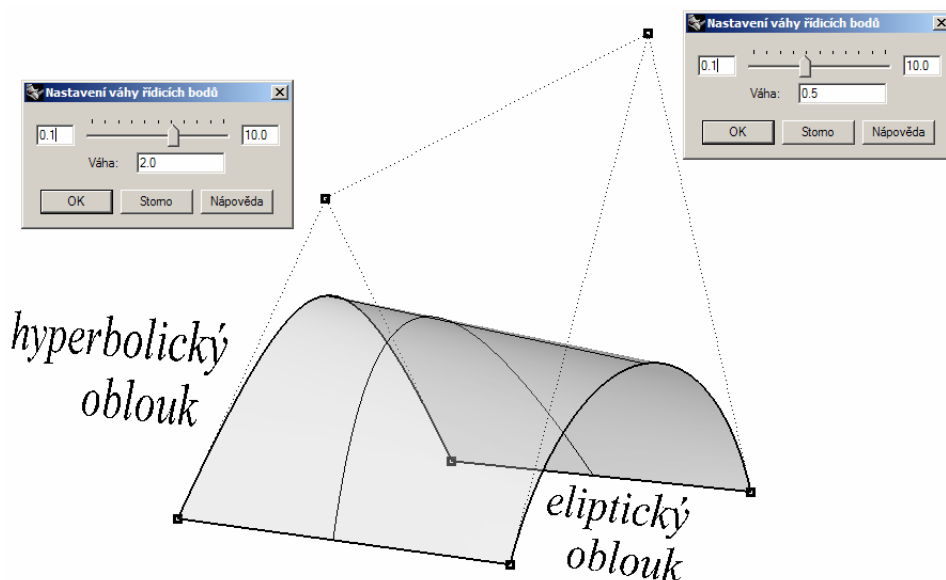
Vyjádření NURBS plochy v euklidovském prostoru je tedy tvaru

$$Q = \left[\frac{q_1}{q_4}, \frac{q_2}{q_4}, \frac{q_3}{q_4} \right] = \left[\frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij1}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}, \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij2}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}, \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij3}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}} \right] =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} [p_{ij1}; p_{ij2}; p_{ij3}]}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}} = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} P_{ij1}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}$$

9. Příklad: Mějme báze funkce $N_0^{(1)}(t) = 1 - t$; $N_0^{(2)}(t) = t$ stupně jedna (jejich kombinací je určena úsečka – viz odst. 1 kpt. 6. 3) a báze funkce funkce $N_0^{(2)}(t) = (1 - t)^2$; $N_1^{(2)}(t) = 2t(1 - t)$; $N_2^{(2)}(t) = t^2$ stupně dva (jejich kombinací je určena kuželosečka – viz odst. 2 kpt. 6. 3 a odst. 7 kpt. 6.6.). Tensorovým součinem

$$Q(u; v) = (1 - u \quad u) \begin{pmatrix} P_{00} & 2 \cdot P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & \frac{1}{2} P_{11} & P_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v^2 \\ 2v(1 - v) \\ v^2 \end{pmatrix}; \quad u, v \in \langle 0; 1 \rangle$$



je plocha, jejímiž u -křivkami jsou $\mathbf{u}_1 = (1-u)\mathbf{P}_{00} + u\mathbf{P}_{10}$; $\mathbf{u}_2 = 2(1-u)\mathbf{P}_{01} + \frac{1}{2}u\mathbf{P}_{11}$; $\mathbf{u}_3 = (1-u)\mathbf{P}_{02} + u\mathbf{P}_{12}$ (což jsou úsečky – viz kpt. 5. 3. odst. 1) a v -křivkami jsou $\mathbf{h} = (1-v^2)\cdot\mathbf{P}_{00} + 2\cdot\mathbf{P}_{01}\cdot 2v(1-v) + \mathbf{P}_{02}\cdot v^2$ a $\mathbf{e} = (1-v^2)\cdot\mathbf{P}_{10} + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}_{11}\cdot 2v(1-v) + \mathbf{P}_{12}\cdot v^2$, tedy hyperbolický resp. eliptický oblouk (viz kpt. 6. 6, odst 7

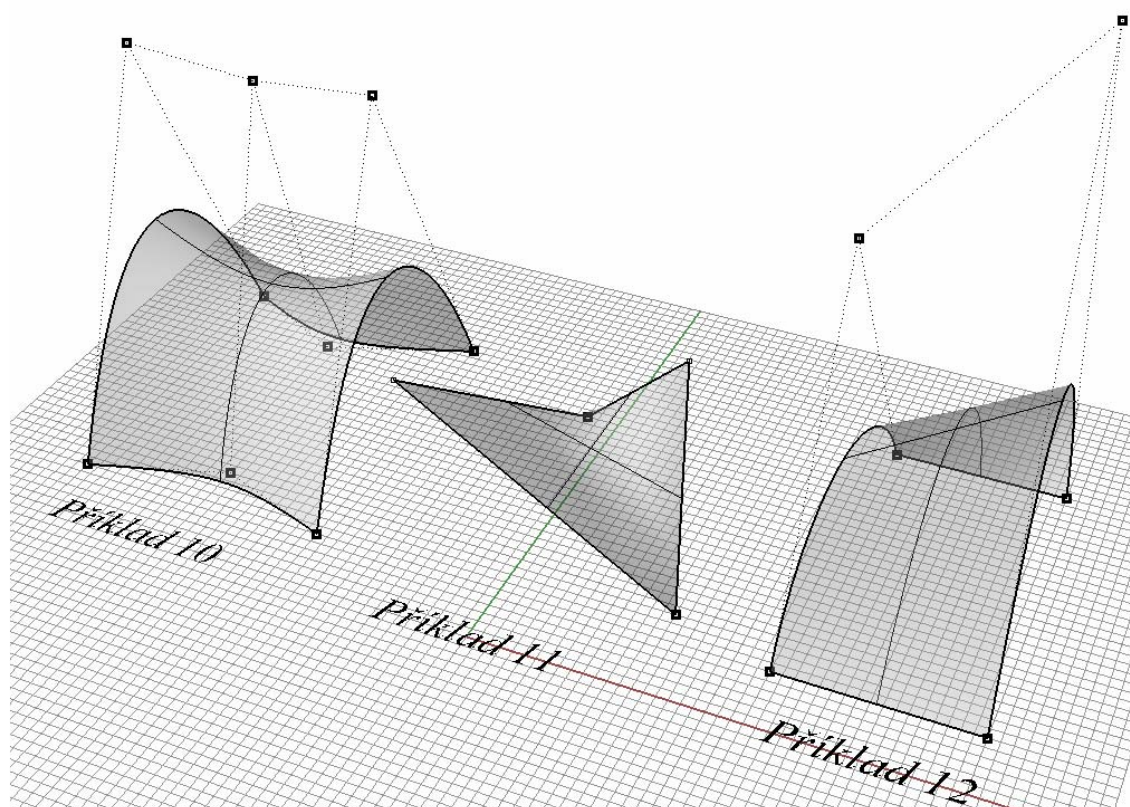


V **Rhinoceros** můžeme NURBS plochy definovat jako tenzorový součin z menu **Plocha/Mřížka bodů**, nebopomocí ikony dle připojeného obrázku. Příkaz vybízí k zadání řádků a sloupců bodů a stupně izokřivek. Plocha je vymodelována jako B-splajn plocha, tj. všechny řídicí body mají váhu $\omega=1$. NURBS plochu obdržíme následnou změnou vah.

10. Příklad: Určeme plochu danou tenzorovým součinem

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T &= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{00}P_{00} & \omega_{01}P_{01} & \omega_{02}P_{02} \\ \omega_{10}P_{10} & \omega_{11}P_{11} & \omega_{12}P_{12} \\ \omega_{20}P_{20} & \omega_{21}P_{21} & \omega_{22}P_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} & 2P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & 2P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & 2P_{21} & P_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešení: u -křivky i v -křivky jsou kuželosečky. Trojice řídicích bodů ve sloupcích má vždy stejnou váhu, u -křivky jsou tedy paraboly (viz kpt. 6. 6. odst. 7b). Pro trojice v řádku je $\omega_0 = \omega_2 = 1$; $\omega_1 = 2$, v -křivky jsou tedy hyperboly (viz kpt. 6. 6. odst. 7c).



11. Příklad: Určeme plochu danou tenzorovým součinem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = (1-u \quad u) \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}$$

Řešení: u -křivky i v -křivky jsou přímky. Leží-li tedy řídicí body v jedné rovině, je plochou čtyřúhelník. Jestliže ne, jedná se o hyperbolický paraboloid (viz kpt. 4. 3. příklad 8).

12. Příklad: Určeme plochu danou tenzorovým součinem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = \begin{pmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2P_{00} & 2P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \\ 2P_{20} & 2P_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}$$

Řešení: u -křivky jsou eliptické oblouky v -křivky jsou přímky. Podle volby řídicích bodů tedy může jít např. o část válcové plochy (napojením čtyř těchto částí lze obdržet válcovou plochu), část kuželové plochy se stejnou možností, může jít i o jednoduchý hyperboloid.

13. Elementární plochy jako NURBS: Elementární plochy (hranolová, jehlanová, válcová, kuželová a kulová) jsou v CAD systémech modelovány jako NURBS plochy. Plášť hranolu a jehlanu plochy dostaneme jako součiny n -úhelníka (podstavy) a úsečky (pobočné hrany). **Plášť hranolu** je tvaru

$$\mathbf{H}(u, v) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_n^T = \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(u) & N_1^{(1)}(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(v) & N_1^{(1)}(v) & \dots & N_n^{(1)}(v) \end{pmatrix}^T \quad (2)$$

kde $N_0^{(1)}; N_1^{(1)}$ resp. $N_0^{(1)}; N_1^{(1)}; \dots; N_n^{(1)}$ je Bernsteinovy polynomy stupně jedna (viz kapitolu 6. 3. odst. 3). Tvoří-li body $P_{00}; P_{01}; \dots; P_{0n}$ vrcholy konvexního n -úhelníka a $P_{10}; P_{11}; \dots; P_{1n}$ je jeho obraz v posunutí ve směru různoběžném s jeho rovinou, pak součin

$$\mathbf{P}(v) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_n^T = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(v) & N_1^{(1)}(v) & \dots & N_n^{(1)}(v) \end{pmatrix}^T$$

určuje podstavy pláště a součin

$$\mathbf{h}(u) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(u) & N_1^{(1)}(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1n} \end{pmatrix}$$

pobočné hrany. Je-li $P_{10}; P_{11}; \dots; P_{1n}$ obrazem $P_{00}; P_{01}; \dots; P_{0n}$ v afinitě (stejnolehlosti, středové kolineaci), je plocha (2) pláštěm hranolu seříznutého rovinou (komolého jehlanu, seříznutého komolého jehlanu).

Plášť válce a kužele dostaneme jako součiny kružnice (podstavy) a úsečky (strany). Plášť válce je tvaru

$$\mathbf{H}(u, v) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_n^T = \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(u) & N_1^{(1)}(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00}P_{00} & \omega_{01}P_{01} & \dots & \omega_{08}P_{08} \\ \omega_{10}P_{10} & \omega_{11}P_{11} & \dots & \omega_{18}P_{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0^{(2)}(v) & N_1^{(2)}(v) & \dots & N_8^{(2)}(v) \end{pmatrix}^T$$

kde $N_0^{(1)}; N_1^{(1)}$ resp. $N_0^{(2)}; N_1^{(2)}; \dots; N_8^{(2)}$ jsou Bernsteinovy polynomy stupně jedna resp. dva a váhový vektor je $\omega = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$. Tvoří-li body $P_{01}; P_{03}; P_{05}; P_{07}$ vrcholy čtverce a body $P_{00}; P_{02}; P_{04}; P_{06}; P_{08} = P_{00}$ středy jeho stran, je těmito body určena podstavná kružnice. Jsou-li body $P_{10}; P_{11}; \dots; P_{18}$ je jeho obraz v posunutí ve směru různoběžném s jeho rovinou, pak součin

$$\mathbf{P}(v) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_n^T = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{08} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{18} \end{pmatrix} \cdot \left(N_0^{(1)}(v) \ N_1^{(1)}(v) \ \dots \ N_8^{(1)}(v) \right)^T$$

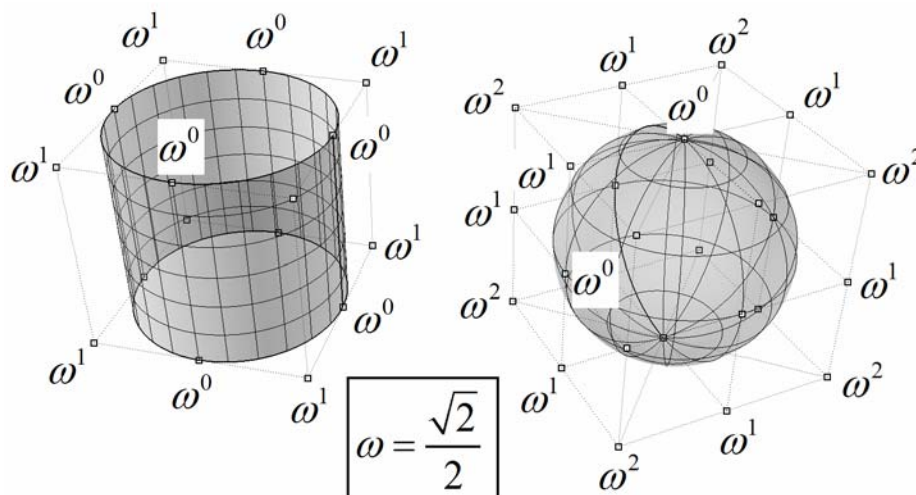
určuje podstavy a součin

$$\mathbf{h}(u) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{M} = \left(N_0^{(1)}(u) \ N_1^{(1)}(u) \right) \cdot \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{08} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{18} \end{pmatrix}$$

plášť. Řídící body válcové plochy tvoří klec šestnácti bodů. Řídící kružnice se dotýkají klece ve středech stran čtverce, tyto body mají váhu $\omega = 1$, vrcholy klece mají váhu $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Komolý kužel obdržíme z válce změnou polohy osmi řídících bodů, které tvarují jednu z podstav. U **kužele** těchto osm bodů splývá ve vrchol, který má váhu $\omega = 1$.

Kulová plocha: Krychlová klec je tvořena 26 body. Kulovou plochu dostaneme jako sjednocení osmi kulových plátů. Trojice řídících bodů, které určují jejich okraje, musejí tvarovat čtvrtkružnice, jejich váhy tedy musejí být v poměru $\omega_0 : \omega_1 : \omega_2 = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1$. Označíme-li tedy $\omega = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (tyto váhy mají středy hran krychlové klece), pak středy stěn mají váhy



$$\omega^0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 = 1 \text{ a vrcholy } \omega^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

O tvarování elementárních ploch pomocí vah se můžeme přesvědčit v Rhinoceros. Řídící body těles, jejichž povrch je složen z více ploch (např. válec, kužel) nám však Rhinoceros nezobrazí. Je třeba vytvořit jen jednu plochu, např. plášť válce pomocí kružnice a příkazu **Plocha/Vytáhnout křivku/Přímo**.