11. Rotační a šroubové plochy

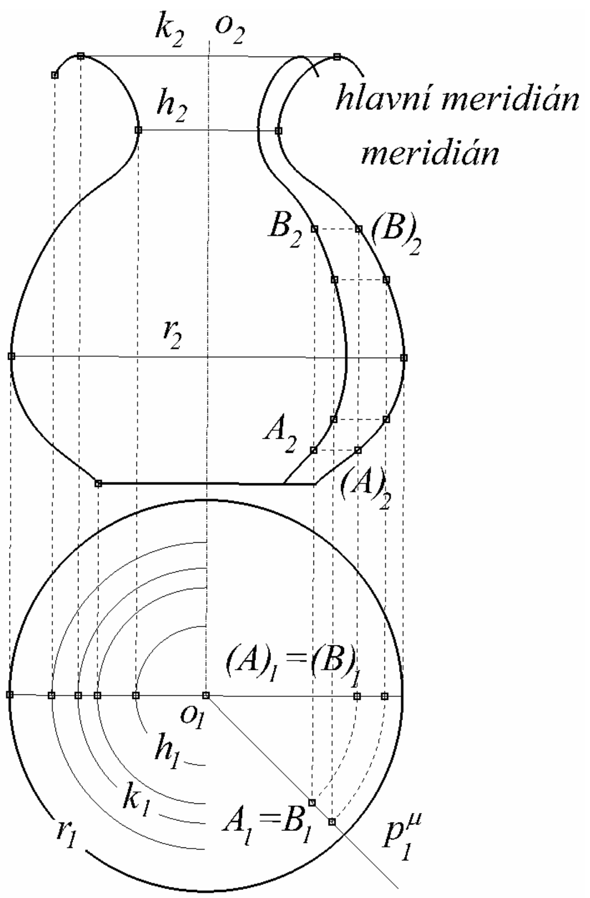
11. 1 Rotační plochy

Rotační plochy jsou plochy, které lze získat rotačním šablonováním křivky. Jejich rovnice je tedy tvaru

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^T(u;v) = \mathbf{M}(u) \cdot \boldsymbol{k}^T(v) \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{k}(v)$ je bodová rovnice tvořicí křivky a $\mathbf{M}(u)$; $u \in \langle u_1; u_2 \rangle$ je matice rotačního pohybu, přičemž většinou klademe $u_1 = 0$; $u_2 = 2\pi$. Každá rovina, procházející osou rotace, se nazývá **meridiánová rovina**, její průnik s rotační plochou se nazývá **meridián**. Je to křivka shodná s tvořicí křivkou (popř. jejich dvojice). u-křivky na rotační ploše jsou kružnice ležící v rovinách kolmých na osu rotace - tzv. **rovnoběžkové kružnice**, v- křivky jsou meridiány. Každým bodem plochy prochází jeden meridián a jedna rovnoběžková kružnice. Rotuje-li spolu s tvořicí křivkou její tečna v bodě v_0, vytvoří kuželovou popř. válcovou plochu, která se rotační plochy dotýká v rovnoběžkové kružnici opsané bodem v_0. Vrchol této plochy (ať už vlastní, anebo nevlastní) leží na ose rotační plochy. Je-li takto vytvořená plocha válcová, příslušná rovnoběžková kružnice se nazývá **rovníková** (válcová plocha je opsaná) resp. **hrdelní** (válcová plocha je vepsaná).

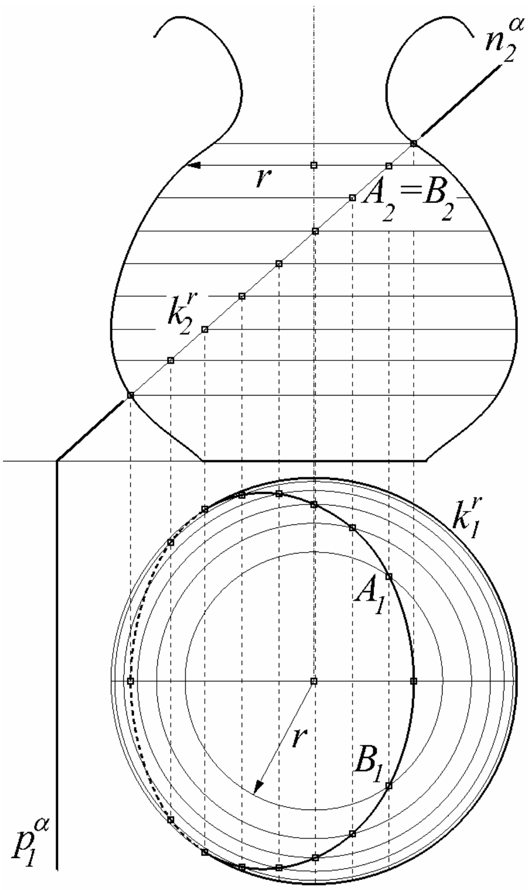
Rotuje-li spolu s tvořicí křivkou její normála v bodě v_0, vytvoří kuželovou popř. válcovou plochu, která se rotační plochy dotýká opět v rovnoběžkové kružnici opsané bodem v_0 a její vrchol (ať už vlastní, anebo nevlastní) leží opět na ose rotační plochy. Je-li takto vytvořená plocha válcová, příslušná rovnoběžková kružnice se nazývá **kráterová** (tato kružnice obsahuje pouze parabolické body plochy). Na připojeném obrázku jsou postupně označeny kružnice: h hrdelní, k kráterová, r rovníková.

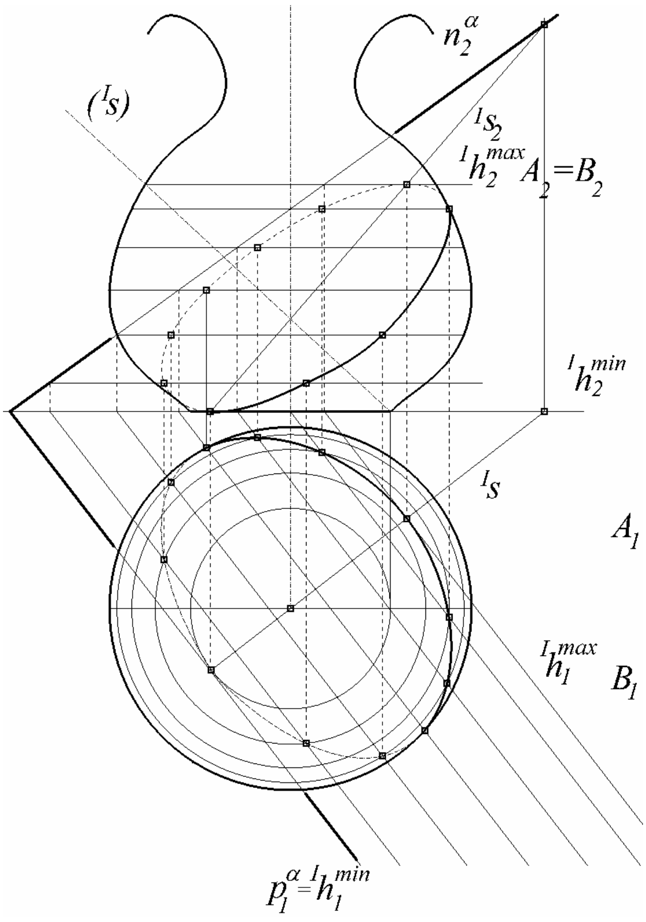


1. Mongeova projekce rotačních ploch: Osu rotační plochy volíme zpravidla rovnoběžnou s osou z. Půdorysem je mezikruží ohraničené půdorysem rovníkové (hrdelní) kružnice s největším (nejmenším) poloměrem. Nárysem je nárys meridiánu ležícího v rovině $\rho \parallel \nu$ (tzv. hlavní meridián). Při sestrojování nárysu (půdorysu) bodu na ploše využíváme skutečnosti, že sestrojovaný bod leží na příslušné ordinále a rovnoběžkové kružnici známého poloměru. Při sestrojování nárysů dalších meridiánů využíváme toho, že půdorys meridiánu leží na půdorysné stopě příslušné meridiánové roviny (na obrázku označena μ).

2. Řez rotační plochy rovinou v MP: Je-li rovina α, která řeže rotační plochu, kolmá k nárysně, využijeme rovin $\sigma^1;\sigma^2;...;\sigma^n \parallel \pi$. Jejich řezy s rotační plochou jsou kružnice $k^1;k^2;...;k^n$ jejichž půdorysy jsou kružnice a nárysy úsečky. Nárysy bodů řezu najdeme jako průsečíky nárysné stopy n_2^α a nárysy $k_2^1;k_2^2;...;k_2^n$ kružnic $k^1;k^2;...;k^n$. Půdorysy leží na půdorysech $k_1^1;k_1^2;...;k_1^n$ kružnic $k^1;k^2;...;k^n$ a na příslušných ordinálách (viz připojený obrázek vlevo). Viditelnost půdorysu řezu se mění na obrysu, tj. na rovníkové kružnici (na obrázku označena k^r)

Je-li rovina α, která řeže rotační plochu, v obecné poloze, roviny $\sigma^1;\sigma^2;...;\sigma^n \parallel \pi$ rovněž řežou rotační plochu v kružnicích $k^1;k^2;...;k^n$ jejichž půdorysy jsou kružnice a nárysy úsečky. Půdorysem i nárysem řezu bude obecná křivka, půdorys bude symetrický podle půdorysu ${}^I s_1^\rho$ spádové přímky první osnovy řezné roviny ρ, která protíná osu rotační plochy. Nejvyšší a nejnižší bod řezu zjistíme otočením přímky ${}^I s^\rho$ kolem osy rotační plochy do roviny hlavního meridiánu. z-ové souřadnice těchto bodů jsou dány průsečíky otočení $\left({}^I s^\rho\right)$ spádové přímky s nárysem rotační plochy. Půdorysy jednotlivých bodů řezu zjišťujeme jako průsečíky půdorysů $k_1^1;k_1^2;...;k_1^n$ kružnic $k^1;k^2;...;k^n$ a půdorysů ${}^I h_1^1;{}^I h_1^2;...;{}^I h_1^n$ hlavních přímek první osnovy řezné roviny ρ. Body dotyku půdorysu řezu s půdorysem rotační plochy zjistíme pomocí kružnice s maximálním poloměrem. Body dotyku nárysu řezu s nárysem rotační plochy zjistíme pomocí hlavní přímky druhé osnovy, která protíná osu rotační plochy.





4. Příklad: určeme rovnici rotační plochy vytvořené rotací přímky

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} + \mathbf{s}v = (1;0;0;1) + (0;1;1;0)v = (1;v;v;1)$$

kolem přímky $\mathbf{z} = \mathbf{O} + \mathbf{r}t = (0;0;0;1) + (0;0;1;0)t = (0;0;t;1)$

Řešení: Osou rotace je osa z, plocha tedy bude tvaru

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^T(u;v) = \mathbf{M}(u) \cdot \boldsymbol{k}^T(v)$$

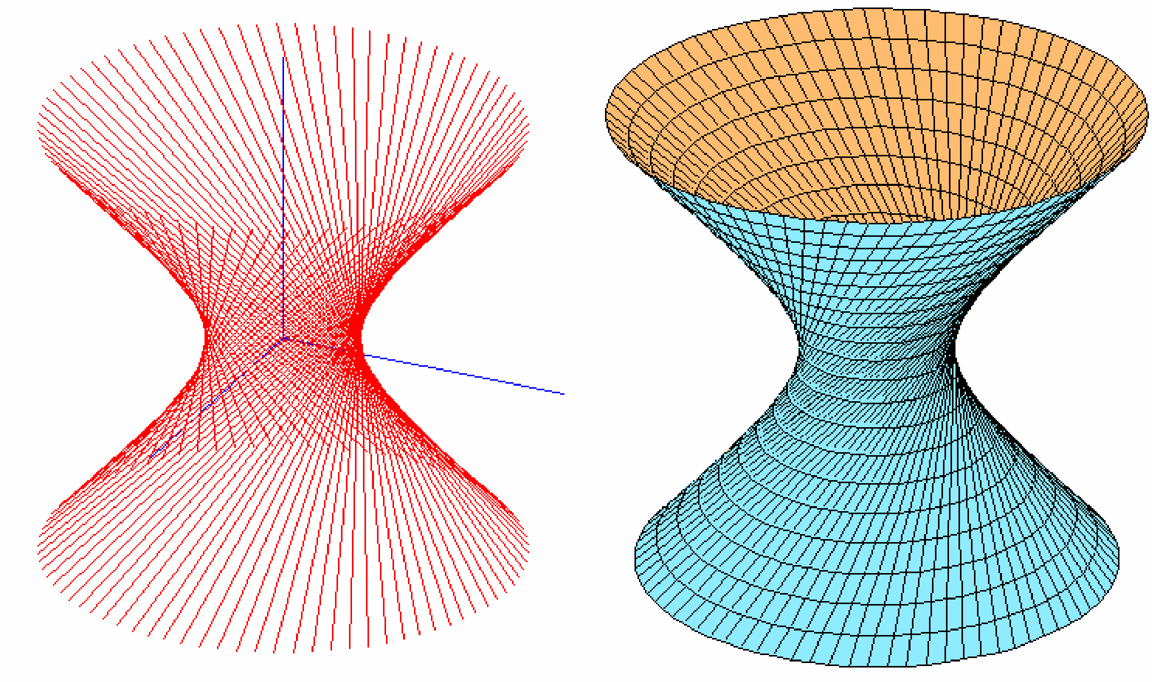
kde $\mathbf{M}(u)$ je matice rotace kolem osy z. Tedy

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^T(u;v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u - v\sin u \\ \sin u + v\cos u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podobně jako v příkladu 6 předchozí kapitoly tuto plochu již známe. Přesvědčíme se o tom opět vyloučením parametrů z parametrických rovnic:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos u - v\sin u \\ y &= \sin u + v\cos u \\ z &= v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 &= \cos^2 u - 2v\sin u\cos u + v^2\sin^2 u \quad I \\ y^2 &= \sin^2 u + 2v\sin u\cos u + v^2\cos^2 u \quad II \\ z^2 &= v^2 \quad III \end{aligned}\right\} \overset{I+II-III}{\Rightarrow} x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Jedná se tedy o jednodílný rotační hyperboloid.



11. 2 Šroubovice

1. Šroubovice je dráha pohybu složeného z rotace bodu kolem osy a z translace ve směru této osy. Uvažujme pohybující se bod A, jehož pohyb je složen z rovnoměrného rotačního pohybu kolem osy z a z pohybu rovnoměrného přímočarého ve směru osy z. Označme

$\mathbf{A}_0 = (r;0;0;1)$ polohu pohybujícího se bodu v čase $t = t_0 = 0$, úhlovou rychlost rotačního pohybu $\omega = 1$ a rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu v_0. Polohu $\mathbf{A}_t$ bodu $\mathbf{A}$ v čase t dostaneme zřejmě složením rotace $\mathcal{R}(O;t)$ kolem počátku o úhel t a translace $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ o vektor $\mathbf{v} = (0;0;v_0 t;0)$, tedy

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_0 t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_0 t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

odtud bodová rovnice této šroubovice

$$\mathbf{Q}(t) = (r\cos t; r\sin t; v_0 t; 1) \qquad (1)$$

Čísla r; v_0; $v = 2\pi v_0$ a osu rotačního pohybu (v našem případě osa z), nazýváme pořadě **poloměr, redukovaná výška, výška závitu a osa šroubovice**. Je-li $v_0 > 0$ hovoříme o šroubovici pravotočivé, v opačném případě se jedná o šroubovici levotočivou.

Šroubovice leží na kolmé kruhové (rotační) válcové ploše, jejíž osa splývá s osou šroubovice a její poloměr je roven poloměru šroubovice. Přesněji bychom tedy měli hovořit o **cylindrické šroubovici** – podobným způsobem bychom totiž mohli vytvořit křivku ležící na kuželové či kulové ploše (v tom případě se jedná o šroubovici kónickou resp. sférickou). My se však budeme zabývat výhradně šroubovicí cylindrickou, proto budeme přívlastek vynechávat.

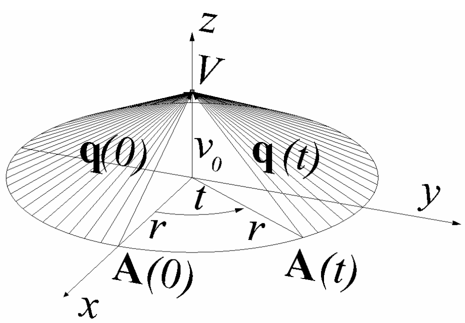
2. Křivosti šroubovice: V příkladu 14 kpt. 6.1. jsme ukázali na speciálním případě, že šroubovice má konstantní první i druhou křivost. Zcela analogicky lze tuto vlastnost dokázat obecně pro libovolnou šroubovici – obecně jsou tyto křivosti

$$^1\kappa = \frac{r}{r^2 + v_0^2}\,;\quad ^2\kappa = \frac{v_0}{r^2 + v_0^2}$$

Šroubovice je jedinou křivkou, která má konstantní (a nenulovou) první i druhou křivost.

3. Tečna šroubovice, řídicí (směrová) kuželová plocha: Směrový vektor tečny šroubovice v bodě t získáme derivací její bodové funkce (1) – viz odst. 6 kapitoly 9. 1., tedy

$$\mathbf{Q}'(t) = (-r\sin t; r\cos t; v_0; 0) \qquad (2)$$



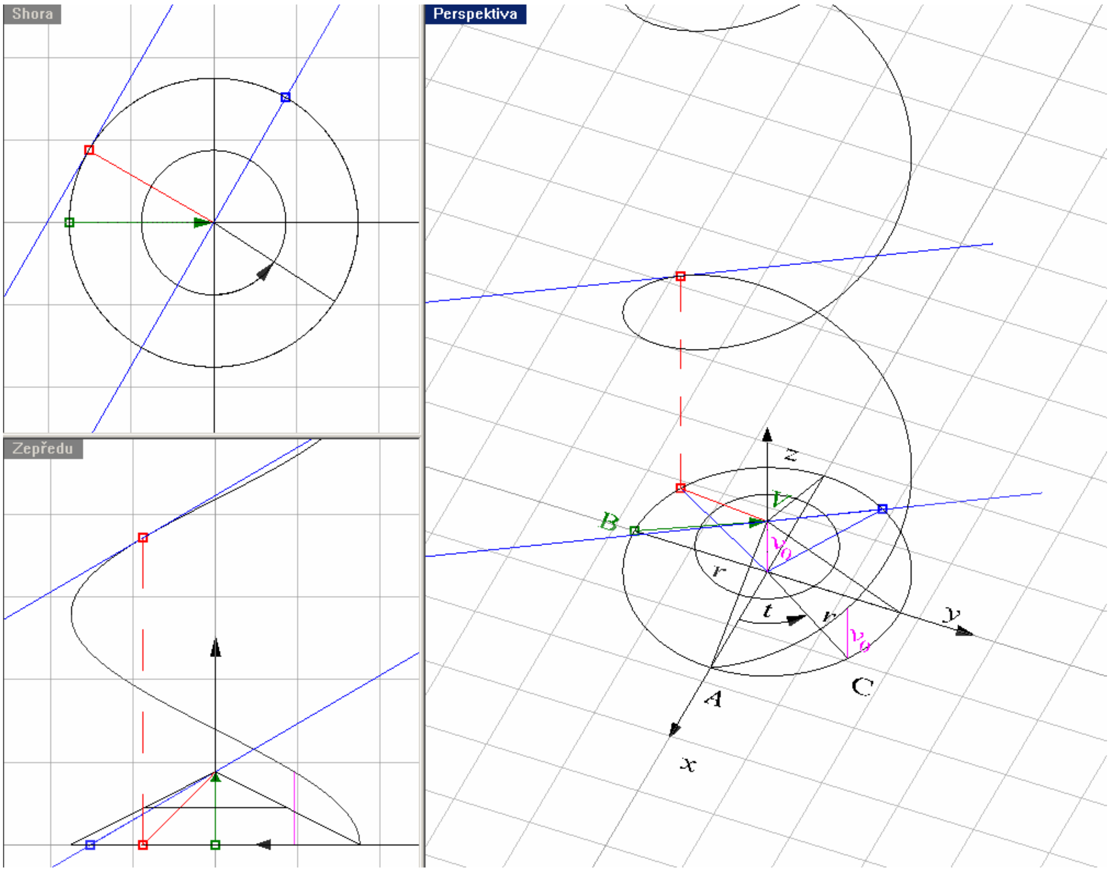
Uvažujme úsečku AV, kde $\mathbf{A} = (r;0;0;1)$; $\mathbf{V} = (0;0;v_0;1)$ kterou necháme rotovat úhlovou rychlostí $\omega = 1$ kolem osy z. V čase $t = 2\pi$ tak vytvoříme tak plášť kužele. Směrový vektor $\mathbf{q}(0) = \overrightarrow{AV}$ úsečky AV v čase $t = 0$ má souřadnice $\mathbf{q}(0) = (-r;0;v_0;0)$. Jeho souřadnice $\mathbf{q}(t_0)$ v čase $t_0 \neq 0$ pak získáme jeho otočením o úhel t_0 kolem osy z, tedy

$$\mathbf{q}(t_0)=\begin{pmatrix}\cos t_0 & -\sin t_0 & 0 & 0\\ \sin t_0 & \cos t_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-r\\0\\v_0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\cos t_0\\-r\sin t_0\\v_0\\0\end{pmatrix}$$

Položíme-li ve vztahu (1) $t=t_0+\frac{\pi}{2}$, je

$$\mathbf{Q}'\left(t_0+\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(-r\sin\left(t_0+\tfrac{\pi}{2}\right);r\cos\left(t_0+\tfrac{\pi}{2}\right);v_0;0\right)=\left(-r\cos t_0;-r\sin t_0;v_0;0\right)=\mathbf{q}(t_0)$$

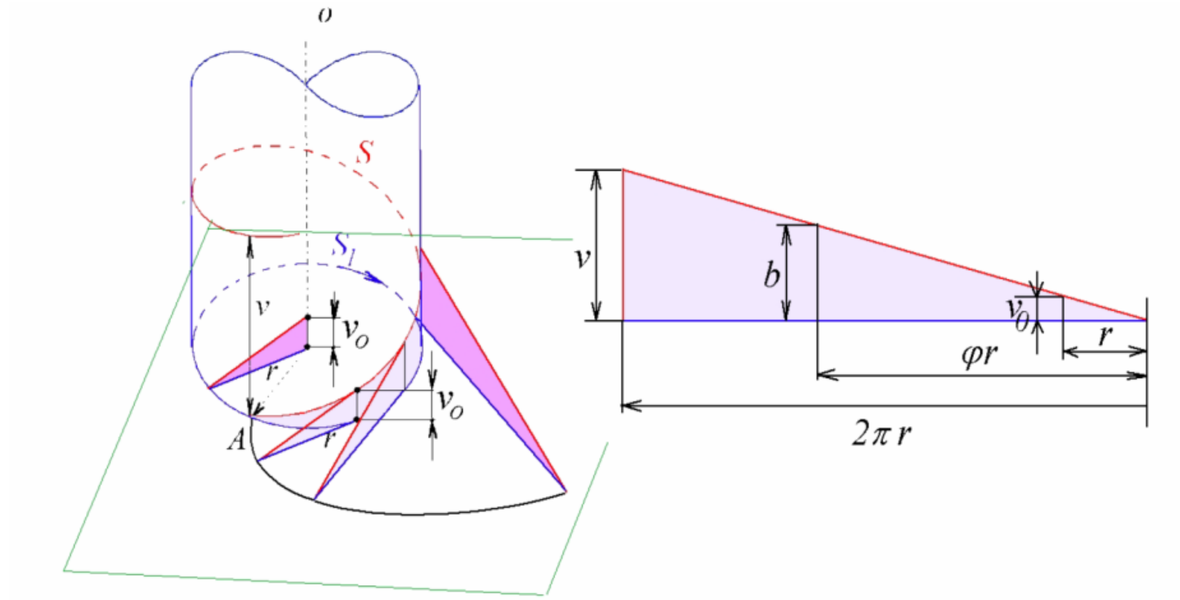
Směrový vektor $\mathbf{q}(t_0)$ strany kužele, je tedy roven směrovému vektoru $\mathbf{Q}'\left(t_0+\frac{\pi}{2}\right)$ tečny šroubovice v bodě $t_0+\frac{\pi}{2}$. Ke každé tečně šroubovice tak existuje strana kužele, která má s touto tečnou stejný směr. Tento kužel nazýváme **řídicím kuželem cylindrické šroubovice.**



Protože každá strana kužele svírá s jeho osou stejný úhel, je také úhel tečny šroubovice s její osou stále stejný. Říkáme, že šroubovice má stále **stejný sklon**. Šroubovici tak můžeme vymodelovat jako pravoúhlý trojúhelník, pro jehož jeden úhel platí $tg\varphi=\frac{v_0}{r}$ - na připojeném obrázku je tento vrchol označen $Q(t)$ resp $Q'(t)$ a tento trojúhelník „navinout“ na nosnou válcovou plochu o poloměru r. Při tomto navinutí resp. při zpětném odvinování pak tento vrchol opisuje evolventu podstavy nosného válce.

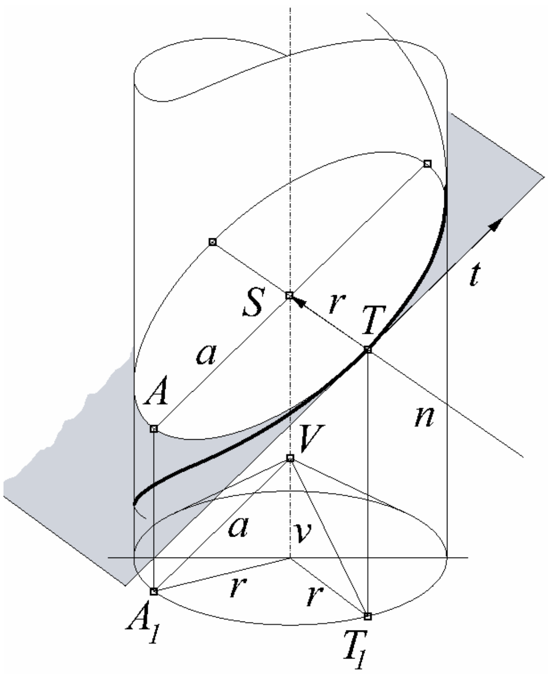
Tato vlastnost šroubovice umožňuje snadné zjišťování hodnoty h, o kterou se změní výška šroubovaného bodu v závislosti na úhlu φ, anebo naopak – platí zde přímá úměrnost: $h=v_0\varphi$

resp. $\varphi = v_0^{-1} h$. Při syntetických konstrukcích k těmto účelům používáme tzv redukčního úhlu (vodorovná úsečka –délka oblouku kružnice, svislá – výška bodu):



4. Oskulační kružnice šroubovice v bodě $\mathbf{Q}(t)$: oskulační rovina je určena bodem $\mathbf{Q}(t)$ a její zaměření tvoří směrový vektor tečny (2) a vektor

$$\mathbf{Q}''(t) = (-r\cos t; -r\sin t; 0; 0) \qquad (3)$$

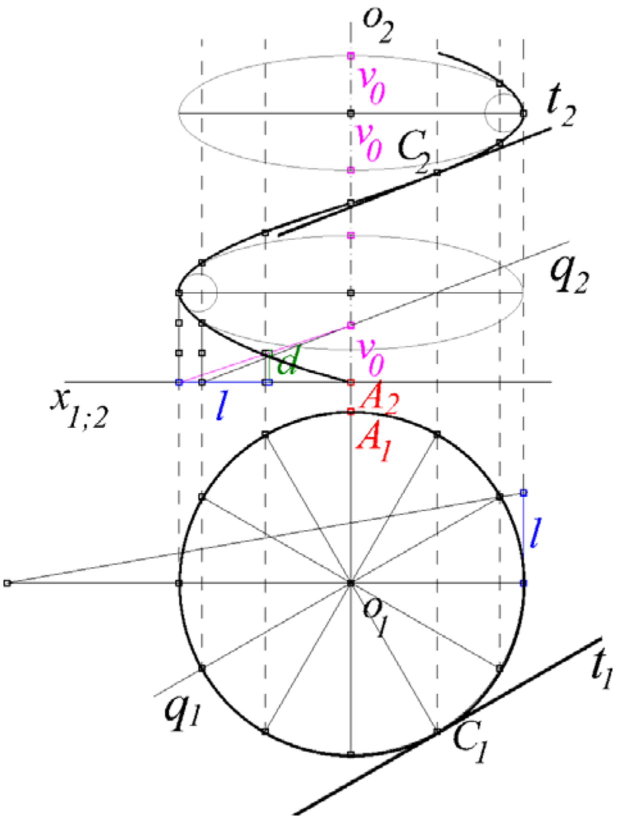


Výpočtem snadno zjistíme, že $\mathbf{Q}'(t)\cdot\mathbf{Q}''(t) = 0$, vektor $\mathbf{Q}''(t)$ je tedy směrovým vektorem hlavní normály. Je rovnoběžný s rovinou podstavy směrového kužele (proč?), odchylka těchto rovin je tak rovna odchylce tečny, tedy rovněž sklonu šroubovice. Oskulační kružnice šroubovice má podle příkladu 6c kpt. 8.1. poloměr

$$\frac{v_0^2 + r^2}{r}$$

Dle příkladu 6a téže kapitoly a připojeného obrázku je to ovšem zároveň poloměr osakulační kružnice elipsy, ve které oskolační rovina řeže nosný válec šroubovice. Tato vlastnost se rovnoběžným promítáním nemění, využijeme ji tedy při syntetické konstrukci oskulační kružnice šroubovice v Mongeově projekci i axonometrii.

5. Šroubovice v Mongeově projekci: Sestrojme půdorys a nárys pravotočivé šroubovice s danou osou o kolmou k půdorysně, daným poloměrem a redukovanou výškou, procházející daným bodem A (volme $z^A = y^o$). V bodě C, který je obrazem bodu A po jeho vyšroubování o $\frac{7}{6}\pi$, sestrojme tečnu.



Řešení: Půdorysem s_1 bude kružnice se středem v bodě o_1 (půdorysu osy šroubovice), tato kružnice prochází půdorysem A_1 bodu A. Nárys sestrojíme bodově postupným vyšroubováním bodu A o vhodný úhel (např. $\frac{\pi}{6}$) do bodů $B, C, D\ldots$. Půdorysy těchto bodů leží na kružnici s_1 tak, že příslušné středové úhly jsou $\frac{\pi}{6}$. Nárysy budou ležet na příslušných ordinálách, je však třeba zjistit hodnotu v, o kterou vzroste z-ová souřadnice následujícího bodu. K tomu je třeba rektifikovat oblouk d kružnice příslušný středovému úhlu $\frac{\pi}{6}$, potřebnou výšku h zjistíme redukčním úhel - viz pravoúhlý trojúhelník $V_2R_2P_2^o$ o odvěsnách r, v_0. Z popsané konstrukce je zřejmé, že nárysem šroubovice je afinní obraz sinusoidy.

Oskulační kružnice v bodech $A_2; G_2;\ldots$ nárysu šroubovice sestrojíme využitím předchozího odstavce: Oskulační rovina je rovnoběžná se základnicí, eliptický řez se zobrazí opět jako elipsa (popř. kružnice) se středem v průsečíku osy šroubovice a hlavní normály, velikost vodorovné resp. svislé poloosy je r resp. v_0 (zdůvodněte). Oskulační kružnice této elipsy je zároveň oskulační kružnicí nárysu šroubovice.

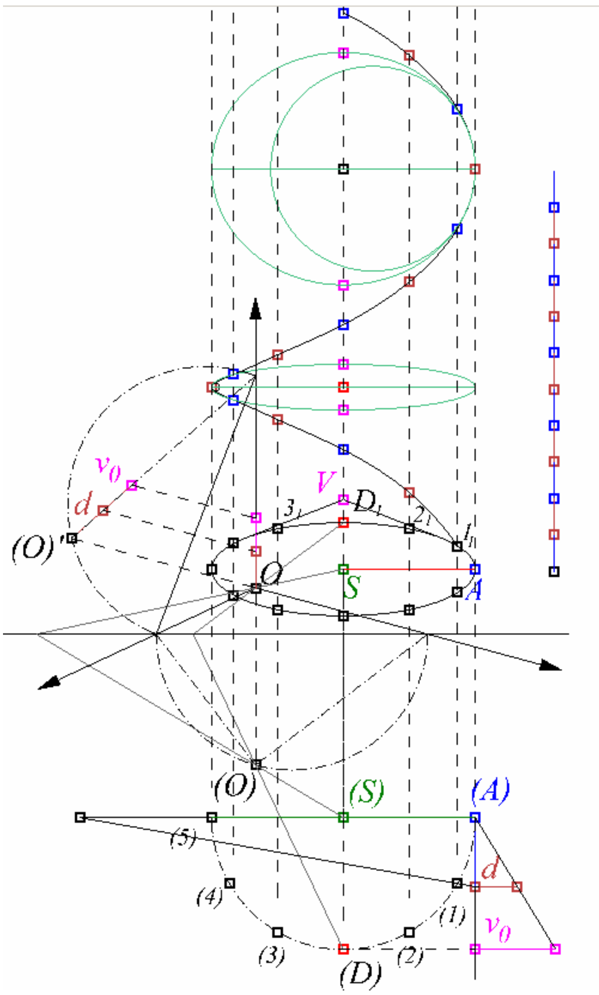
Půdorys hledané tečny sestrojíme jako tečnu k půdorysné kružnici v bodě C_1. Tečna je rovnoběžná s přímkou q - pro její půdorys je $o_1 \in q_1$; $q_1 \parallel t_1$, průsečík $M_1 \in q_1 \cap s_1$ je zároveň půdorysem P_1^q půdorysného stopníku přímky q. Její nárys prochází nárysem $M_2 = P_2^q$ tohoto stopníku a nárysem V_2 vrcholu směrového kužele. Pro nárys hledané tečny je pak $t_2 \parallel q_2$ a samozřejmě $C_2 \in t_2$.

6. Šroubovice v pravoúhlé axonometrii: Sestrojme šroubovci v pravoúhlé axonometrii

Řešení: Půdorysnu otočíme do axonometrické průmětny, kde sestrojíme kružnici se středem v bodě (o_1) a poloměrem r. Na této kružnici sestrojíme body $(A),(B),(C),(D)\ldots$ jako vrcholy pravidelného n-úhelníka, nejlépe $n = 12$ (vzhledem k symetrii stačí půlkružnice).

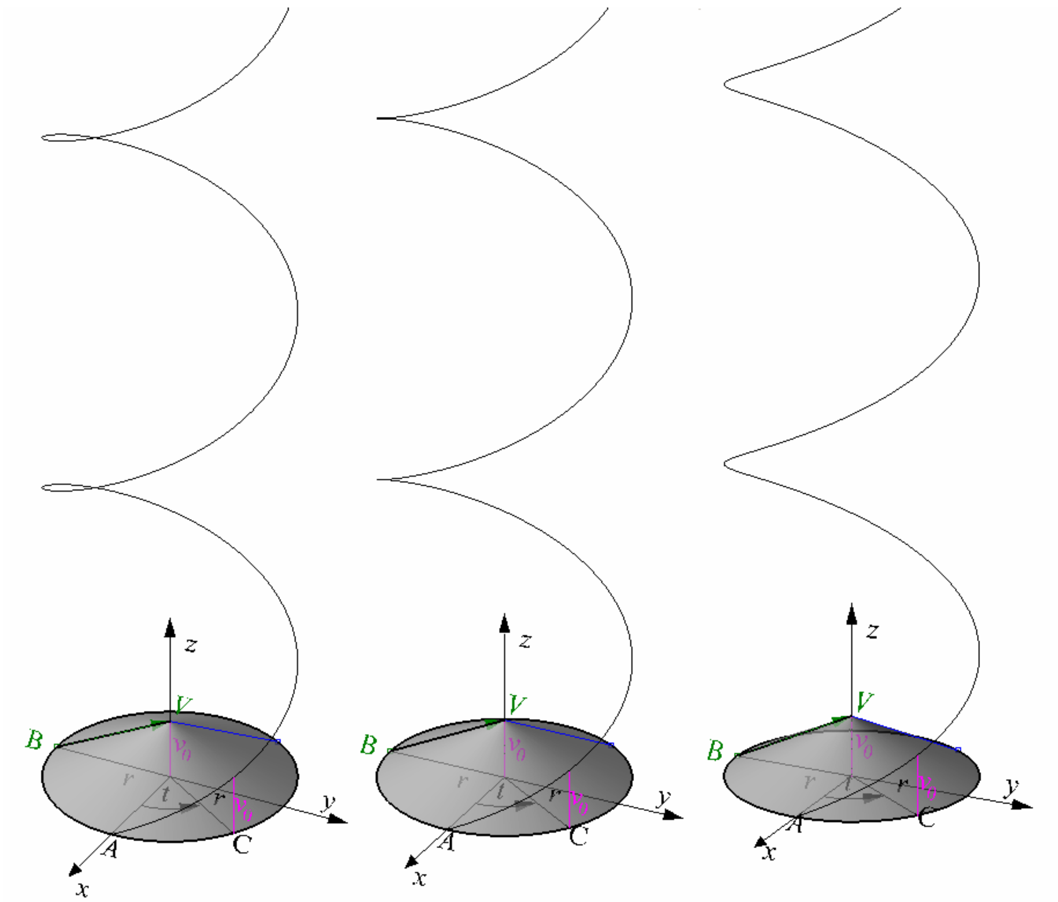
Půdorys šroubovice sestrojíme jako afinní obraz této kružnice, včetně půdorysů $A_1; B_1; C_1;\ldots$ bodů $A; B; C;\ldots$ Sobotkovou rektifikací rektifikujeme oblouk $\widehat{(A)(B)}$ délky d a otočení nárysny (popř. bokorysny) zjistíme zkrácení v_0^* redukované výšky v_0 na ose z. Redukčním úhlem zjistíme hodnotu h zkráceného přírůstku z-ové souřadnice, jehož pomocí postupně sestrojujeme axonometrické průměty bodů $A; B; C;\ldots$

Oskulační kružnice ve vrcholech axonometrického průmětu šroubovice opět splynou s oskulačními kružnicemi eliptického řezu podle odst. 4. Hlavní normála šroubovice je



rovnoběžná s půdorysnou a velikost jedné poloosy eliptického průmětu řezu je r. Velikost druhé poloosy řezu je rovna straně směrového kužele. Oskulační rovina je rovnoběžná se stranou D_1V resp. K_1V, axonometrický průmět příslušné poloosy tedy bude mít velikost jako axonometrický průmět úseček D_1V resp. K_1V (na připojeném obrázku jsou tyto velikosti označeny b_1 resp. b_2). Hledané oskulační kružnice sestrojíme jako oskulační kružnice těchto elips. Na připojeném obrázku jsou z demonstračních důvodů sestrojeny i eliptické průměty těchto řezů. Ke konstrukci oskulačních kružnic ovšem nejsou nutné.

Axonometrickým průmětem šroubovice je afinní obraz cykloidy, a to buď zkrácené (to v případě, že axonometrický průmět vrcholu V směrového kužele leží uvnitř axonometrického průmětu jeho podstavy), nebo prosté (vrchol leží na průmětu podstavy), anebo prodloužené (vrchol leží vně).



11. 3 Šroubové plochy

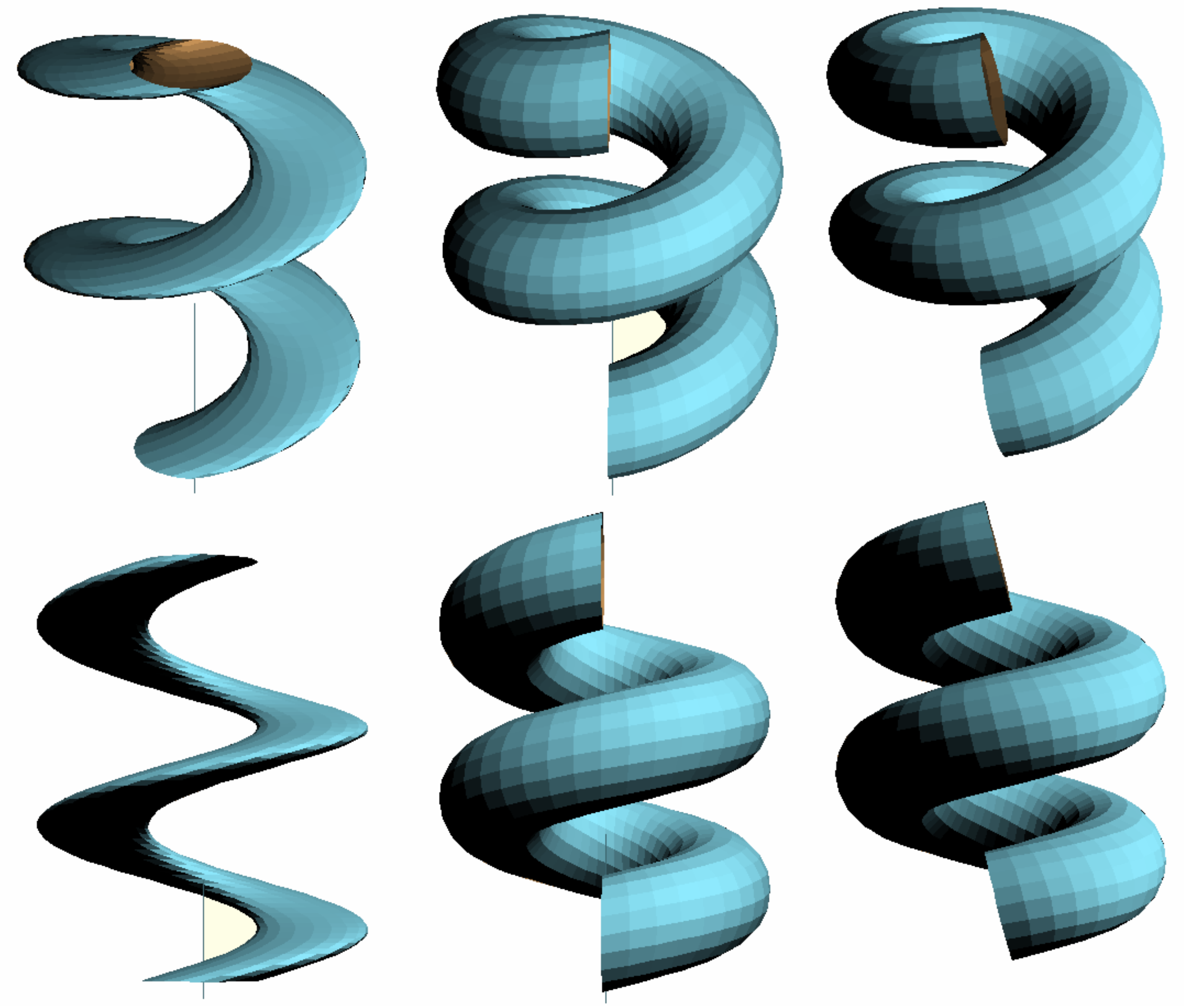
Šroubové plochy jsou plochy, které lze získat pohybem křivky po šroubovici. Jejich rovnice je tedy tvaru

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^T(u;v) = \mathbf{M}(u) \cdot \boldsymbol{k}^T(v) \tag{1}$$

kde $\mathbf{M}(u)$ je matice shodnosti složené z rotace a translace ve směru osy této rotace, tedy matice šroubového pohybu. Na šroubové ploše tedy leží dva základní typy křivek – při parametrizaci dle vztahu (1) jsou v-křivkami křivky shodné s tvořicí křivkou $\boldsymbol{k}(v)$ a u-křivkami jsou šroubovice obecně různých poloměrů a stejnou redukovanou výškou v_0

Častými speciálními případy šroubových ploch jsou:

1. Plochy cyklické - šroubovanou křivkou $\boldsymbol{k}$ je kružnice. Speciálními případy cyklických ploch jsou



a) plocha normální (kružnice leží v rovině kolmé na osu šroubovice)

$$Q(u,v) = (R\sin u + r\cos v; R\cos u + r\sin v; u; 1);\ r \in \mathbb{R};\ s \in \langle 0; 2\pi)$$

b) plocha osová (kružnice leží v rovině obsahující osu šroubovice) - viz př. 5a)

c) Archimedova serpentina (kružnice leží v rovině kolmé na tečnu šroubovice) - viz př. 5b)

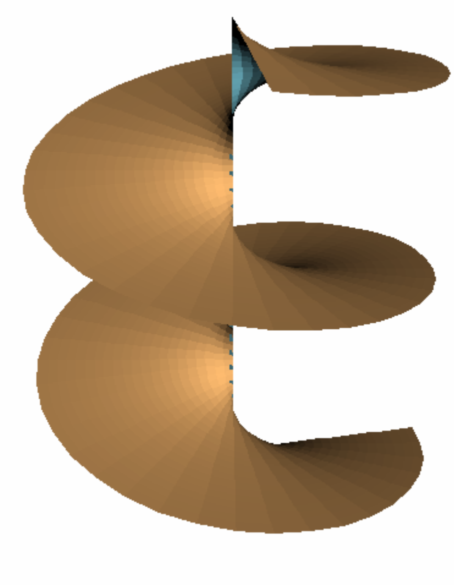
2. Plochy přímkové – šroubovanou křivkou $\boldsymbol{k}$ je přímka. Přímkové šroubové plochy dělíme **podle vzájemné polohy osy šroubovice a šroubované přímky** na

- **a) plocha uzavřená** (přímka a osa mají společný bod)
- **b) plocha otevřená** (přímka a osa nemají společný bod)

a **podle úhlu, který svírá osa šroubovice a šroubovaná přímka**

- **a) plochy pravoúhlé, též schodové,** užívá se také názvu **hektoid** (úhel je pravý)
- **b) plochy kosoúhlé, též vývrtkové** (úhel je ostrý nenulový)
- **c) plochy válcové** (přímky jsou rovnoběžné)

V příkladu 5 kpt. 9.3. jsme se zabývali plochou tečen šroubovice. Je to plocha přímková otevřená a jako jediná ze šroubových ploch také rozvinutelná. Na následujícím obrázku si můžeme prohlédnout uzavřené šroubové plochy – vlevo kosoúhlá, vpravo pravoúhlá.

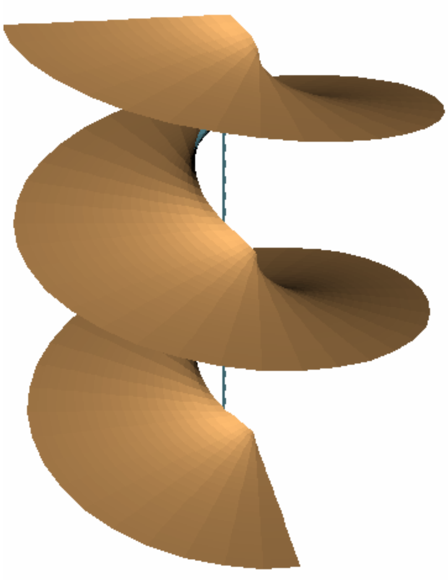


pravoúhlá uzavřená

$Q(u,v)=(v\sin u;v\cos u;v;1)$

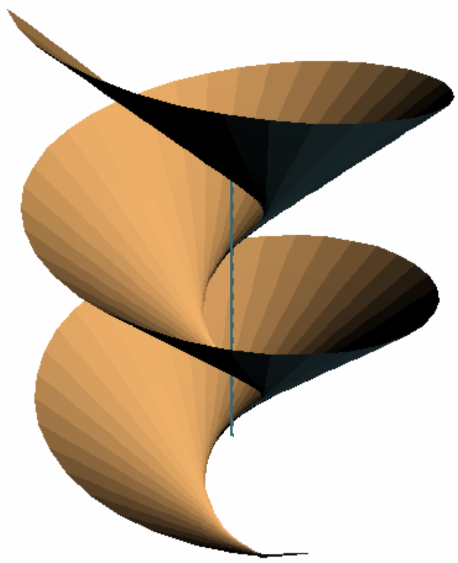
kosoúhlá uzavřená

$Q(u,v)=(v\sin u;v\cos u;u+v;1)$



pravoúhlá otevřená

$Q(u,v)=(\sin u+v\cos u;\cos u-v\sin u;s;1)$



kosoúhlá otevřená

$Q(u,v)=(\sin u+v\cos u;\cos u-v\sin u;u+v;1)$

3. Příklad – zobrazování šroubových ploch: Sestrojme pravotočivou

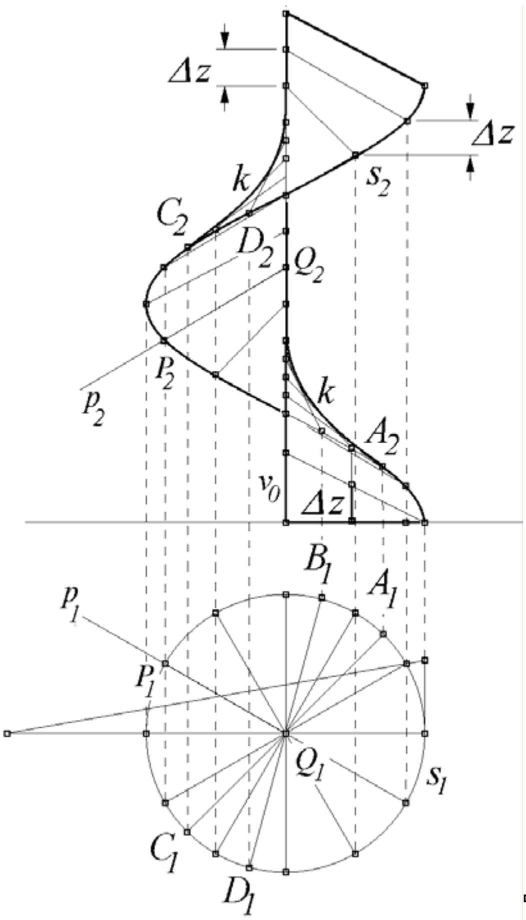
a) kosoúhlou uzavřenou šroubovou plochu v Mongeově promítání

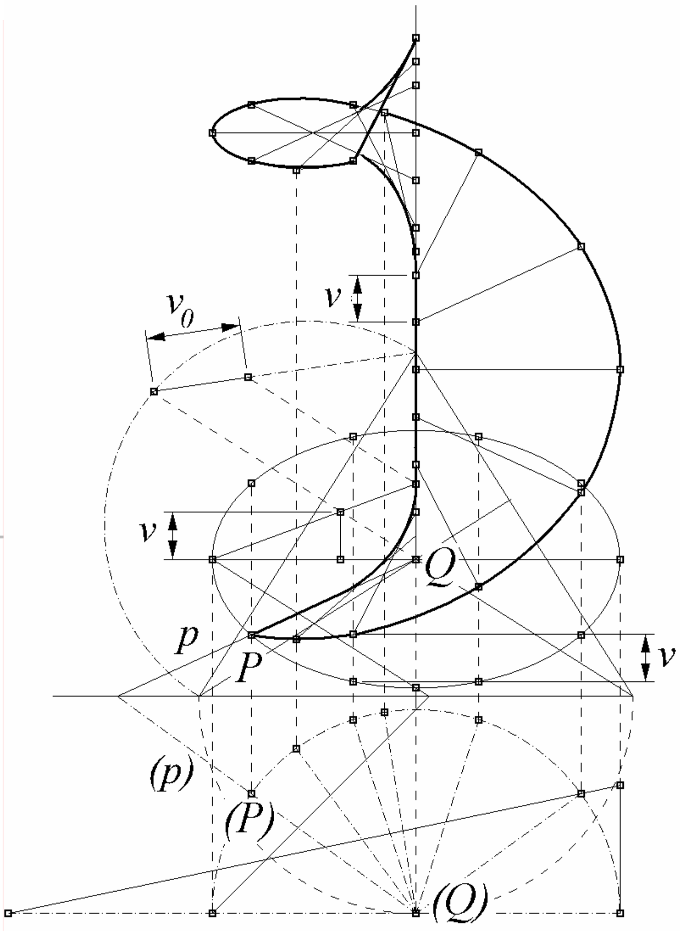
b) pravoúhlou uzavřenou šroubovou plochu v pravoúhlé axonometrii

Řešení:

a) Budeme šroubovat přímku $p \equiv PQ$, plochu omezíme dráhou bodu P, pro osu šroubové plochy položme $o \perp {}^1\pi$; $Q \in o$ (viz připojený obrázek). Půdorysem bude kruh, jehož poloměr je roven $|PQ|$. Nárys se skládá ze šroubovice procházející bodem P, jejíž nárys sestrojíme dle př. 5 kpt. 11. 2., a osy o. Úsečku PQ jsme šroubovali po třiceti stupních, obrys nárysu šroubovice je však třeba doplnit křivkami k - obalovými křivkami nárysů šroubované úsečky. K přesnějšímu vykreslení těchto křivek jsme použili šroubování s polovičním úhlem – viz body $A;B;C;D$. Viditelnost nárysu určíme porovnáním y-ových souřadnic ve zdánlivých průsečících nárysu.

b) Opět budeme šroubovat přímku $p \equiv PQ$, plochu omezíme dráhou bodu P, pro osu šroubové plochy položme $o \perp {}^1\pi$; $Q \in o$. Tentokrát však musí platit $p \perp o$, volme tedy $P, Q \in {}^1\pi$ (viz připojený obrázek). Axonometrický průmět plochy bude tedy omezen axonometrickým průmětem šroubovice, který sestrojíme dle př. 6 kpt. 11. 2., a osy o. Šroubujeme opět po třiceti stupních. Obrys je opět je třeba doplnit obalovými křivkami axonometrických průmětů šroubované úsečky, k jejichž přesnějšímu sestrojení jsme znovu využili šroubování o poloviční úhel (pro nedostatek místa již použité body nejsou popsány).



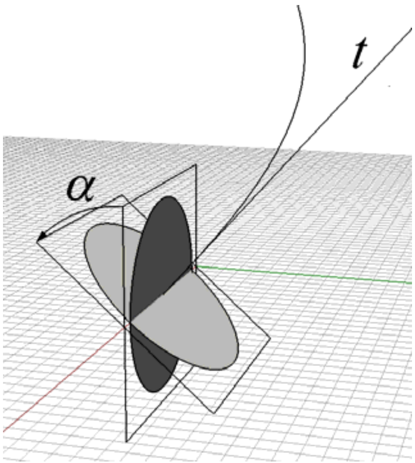


4. Příklad – Odvoďme rovnici a) osové cyklické plochy b) Archimedovy serpentiny.
Řešení: $\mathbf{Q}(u,v)=((R+r\cos u)\cos v;(R+r\cos u)\sin v;v+r\sin u;1)$; $r\in\mathbb{R}$; $s\in\langle 0;2\pi)$

a) Osová cyklická plochy je šroubová plocha, která vzniká šroubováním kružnice, ležící v rovině procházející osou šroubovice. Uvažujme tedy šroubovici s osou v ose z, poloměrem R a redukovanou výškou v_0. Dále uvažujme kružnici se středem $\mathbf{S}=(R;0;0;1)$ a poloměrem r, která leží v rovině kolmé na osu y. Tato kružnice leží v rovině procházející osou šroubovice a je určena bodovou funkcí $\mathbf{k}=(R+r\cos v;0;r\sin v;1)$. Hledaná plocha vznikne šroubováním této kružnice, tedy

$$\mathbf{Q}^T(u;v)=\begin{pmatrix}\cos u & -\sin u & 0 & 0\\ \sin u & \cos u & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & v_0u\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R+r\cos v\\ 0\\ r\sin v\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(R+r\cos v)\cos u\\ (R+r\cos v)\sin u\\ r\sin v+v_0u\\ 1\end{pmatrix}$$

b) V odst. 1c jsme uvedli, že Archimedova serpentina je šroubová plocha, která vzniká šroubováním kružnice ležící v rovině kolmé na tečnu šroubovice. Uvažujme tedy situaci z případu a). Budeme opět šroubovat kružnici se středem $\mathbf{S}=(R;0;0;1)$ a poloměrem r, ta však tentokrát musí ležet v rovině kolmé na tečnu šroubovice. Směrový vektor $\mathbf{s}$ tečny šroubovice v bodě $\mathbf{A}=(R;0;0;1)$ má složky $\mathbf{s}=(0;r;v_0;0)$. Aby tedy kružnice k ležela v rovině kolmé na tečnu, je třeba ji otočit o úhel α kolem osy x (viz obrázek). Budeme tedy šroubovat kružnici



$$\overline{\mathbf{k}}^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R+r\cos v\\ 0\\ r\sin v\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R+r\cos v\\ -r\sin v\sin\alpha\\ r\sin v\cos\alpha\\ 1\end{pmatrix}$$

Máme tedy

$$\mathbf{Q}^T(u;v)=\begin{pmatrix}\cos u & -\sin u & 0 & 0\\ \sin u & \cos u & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2v_0u\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R+r\cos v\\ -r\sin v\sin\alpha\\ r\sin v\cos\alpha\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(R+r\cos v)\cos u+r\sin u\sin v\sin\alpha\\ (R+r\cos v)\sin u-r\cos u\sin v\sin\alpha\\ r\sin v\cos\alpha+2v_0u\\ 1\end{pmatrix}$$

Protože je zřejmě $\sin\alpha=\dfrac{v_0}{\sqrt{r^2+v_0^2}}$; $\cos\alpha=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+v_0^2}}$, dostáváme rovnici Archimedovy serpentiny tvaru

$$\mathbf{Q}^T(u;v)=\begin{pmatrix}(R+r\cos v)\cos u+\dfrac{rv_0\sin u\sin v}{\sqrt{r^2+v_0^2}}\\ (R+r\cos v)\sin u-\dfrac{rv_0\cos u\sin v}{\sqrt{r^2+v_0^2}}\\ \dfrac{r^2\sin v}{\sqrt{r^2+v_0^2}}+2v_0u\\ 1\end{pmatrix}$$