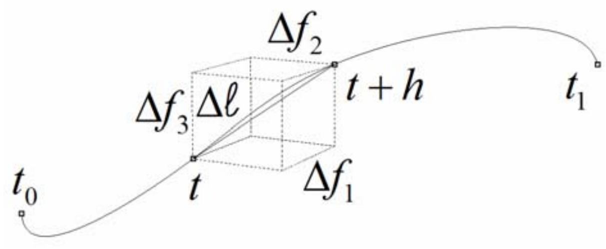
12 Rozvinutelné a zborcené plochy

12. 1 Délka analytické křivky

1. Délka analytické křivky: je rovna součtu délek oblouků $\Delta\ell$ ohraničených body t; $t+h$, kde $h>0$. Zřejmě platí



$$\Delta\ell(t)\approx\sqrt{\left[\Delta f_1(t)\right]^2+\left[\Delta f_2(t)\right]^2+\left[\Delta f_3(t)\right]^2}$$

Je-li křivka regulární, pak existují derivace souřadnicových funkcí $f_1; f_2; f_3$ a přírůstky funkcí můžeme nahradit diferenciály, tj.

$$\mathrm{d}\ell(t)(h)\approx\sqrt{\left[\mathrm{d}f_1(t)(h)\right]^2+\left[\mathrm{d}f_2(t)(h)\right]^2+\left[\mathrm{d}f_3(t)(h)\right]^2} \tag{1}$$

Z matematiky víme, že pro každou diferencovatelnou funkci $f(x)$ je $\mathrm{d}f(x)(h)=f'(x)\cdot h$, výraz (1) má tedy tvar

$$\ell'(t)\cdot h\approx\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2h^2+\left[f_2'(t)\right]^2h^2+\left[f_2'(t)\right]^2h^2}$$

$$\ell'(t)\cdot h\approx\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2}\cdot h \tag{2}$$

Je-li $h\to 0$, je h rovno diferenciálu proměnné, tedy $h=\mathrm{d}t$ a vztah (2) přejde v rovnost, takže

$$\ell'(t)\cdot\mathrm{d}t=\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2}\cdot\mathrm{d}t$$

Délku křivky omezené body $t_0;t_1$ obdržíme zřejmě integrací

$$\ell=\int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)\cdot\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2+\left[f_3'(t)\right]^2}\cdot\mathrm{d}t \tag{3}$$

2. Příklad: Určeme délku kružnice s poloměrem r.
Řešení: Bodová rovnice této kružnice je $\boldsymbol{k}(t)=(r\cos t;r\sin t;0;1)$; $t_0=0$; $t_1=2\pi$, podle (3) je tedy

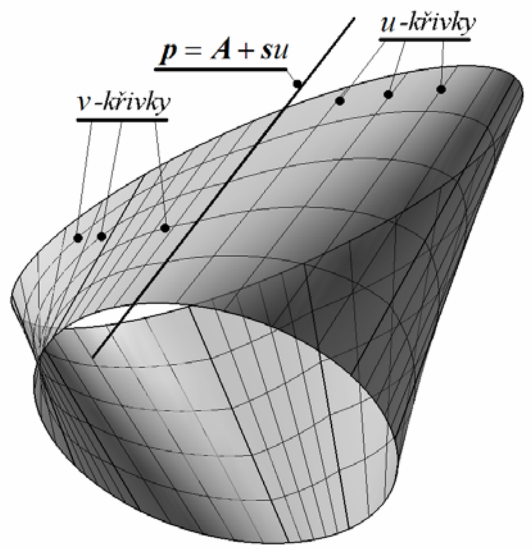
$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[-r\sin t\right]^2+\left[r\cos t\right]^2+0^2}\cdot\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}r\cdot\mathrm{d}t=r\left[t\right]_0^{2\pi}=2\pi r$$

3. Příklad: Určeme délku grafu diferencovatelné funkce $f(x)$ nad intervalem $\langle a;b\rangle$.
Řešení: Položíme-li $x=t$, je zřejmé, že bodová rovnice grafu funkce je tvaru $\boldsymbol{f}(t)=(t;f(t);0;1)$, $t_0=a$; $t_1=b$, podle (3) je tedy

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2+0^2}\cdot\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\cdot\mathrm{d}t$$

12. 2 Rozvinutelnost ploch

1. Izometrické zobrazení mezi plochami $\mathbf{Q}$; $\overline{\mathbf{Q}}$ je zobrazení $\rho:\mathbf{Q}(t)\to\overline{\mathbf{Q}}(t)$, které zachovává délky křivek na ploše.



2. Rozvinutelné a zborcené plochy: Plochu, pro kterou existuje izometrické zobrazení do roviny, nazýváme **rozvinutelnou plochou**. Lze ukázat, že každá rozvinutelná plocha musí být nutně plochou přímkovou. Obrácená věta však neplatí – existují přímkové plochy, které rozvinutelné nejsou. Tyto plochy nazýváme **nerozvinutelné**, nebo také **zborcené**.

Položme si nyní otázku, jak určit, zda daná přímková plocha je rozvinutelná, anebo zborcená. Přímková plocha vzniká šablonováním (viz kpt. 10.3. odst. 3), kde šablonou je přímka (označme ji $\boldsymbol{p}$). Tato plocha má proto rovnici tvaru

$$\boldsymbol{Q}^T(u;v)=\mathbf{M}(v)\cdot\boldsymbol{p}^T(u)=\mathbf{M}(v)\cdot\left(\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{s}^T u\right).$$

tedy

$$\boldsymbol{Q}^T(u;v)=\underbrace{\mathbf{M}(v)\cdot\boldsymbol{A}^T}_{\boldsymbol{f}(v)}+\underbrace{\mathbf{M}(v)\cdot\boldsymbol{s}^T}_{\boldsymbol{g}(v)}\cdot u=\boldsymbol{f}(v)+\boldsymbol{g}(v)\cdot u \qquad (1)$$

Směrové vektory tečných rovin jsou

$$\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{Q}^T(u;v)=\boldsymbol{g}(v);\quad \frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{Q}^T(u;v)=\boldsymbol{f}'(v)+\boldsymbol{g}'(v)\cdot u$$

Položíme-li $v=konst=v_0$, představují vektory $\boldsymbol{g}(v_0)$, $\boldsymbol{f}'(v_0)$; $\boldsymbol{g}'(v_0)$ směrové vektory tečných rovin plochy v bodech tvořicí přímky $\boldsymbol{p}(u)$. Jsou-li tyto vektory lineárně závislé, dotýká se tato rovina plochy podél celé tvořicí přímky. Přímku $\boldsymbol{p}$ s touto vlastností nazýváme **torzální přímkou** plochy. Jsou-li vektory lineárně nezávislé, tečná rovina se pro různé hodnoty parametru u kolem tvořicí přímky „otáčí“ (říkáme, že tečné roviny tvoří svazek s osou $\boldsymbol{p}$). V tom případě je přímka $\boldsymbol{p}$ **regulární přímkou** plochy.

Lze ukázat, že přímková plocha je **rozvinutelná právě tehdy, jsou-li všechny její tvořicí přímky torzální.**

3. Příklad: Zjistěme, zda jsou rozvinutelné následující plochy

a) jednodílný rotační hyperbolid
b) plocha tečen šroubovice
c) $x=\cos v+u\cdot\cos\frac{v}{2}\cdot\cos v$
$y=\sin v+u\cdot\cos\frac{v}{2}\cdot\sin v$
$z=u\cdot\sin\frac{v}{2}$

Řešení:
a) Jednodílný rotační hyperboloid vzniká rotací přímky kolem osy, která je s touto osou mimoběžná. Volme po jednoduchost hyperboloid s osou v ose z a dále $a=b=c=1$.

Tato plocha vznikne rotací přímky $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{s} \cdot u = (1;0;0;1) + (0;1;1;0)u$ kolem osy z, podle (1) má tedy rovnici

$$\boldsymbol{H}^T(u;v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(v)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{g}(v)} \cdot u$$

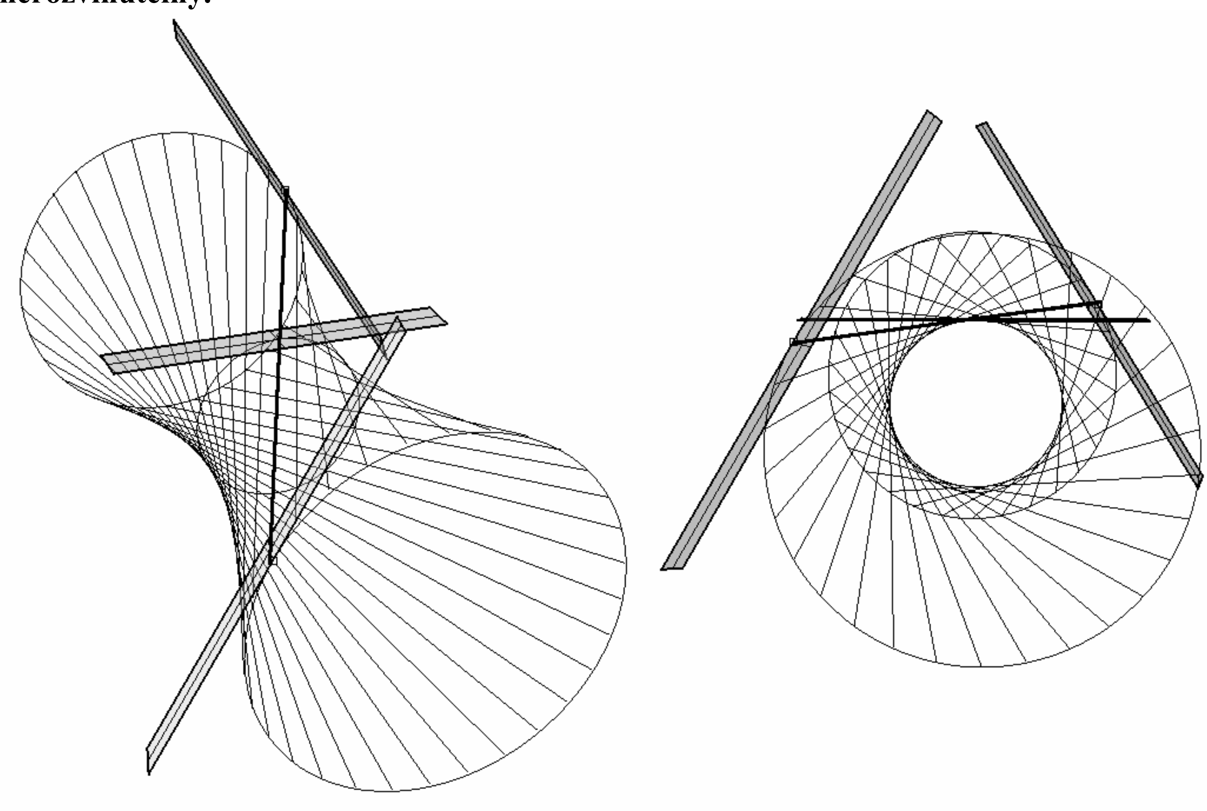
Je tedy

$$\boldsymbol{f}(v) = (\cos v; \sin v; 0; 1);\ \boldsymbol{g}(v) = (-\sin v; \cos v; 1; 0).$$

Derivováním obdržíme

$$\boldsymbol{f}'(v) = (-\sin v; \cos v; 0; 0);\ \boldsymbol{g}'(v) = (-\cos v; -\sin v; 0; 0).$$

Vektory $\boldsymbol{f}'; \boldsymbol{g}; \boldsymbol{g}'$ jsou nenulové a na sebe „kolmé“ - v případě vektorů s více než třemi složkami říkáme **ortogonální** (můžeme se o tom přesvědčit např. výpočtem jejich skalárních součinů) a nemohou tedy být lineárně závislé. Tvořicí přímky jsou tedy regulární. Stejný výsledek dostaneme pro libovolný jednodílný hyperboloid. **Jednodílný hyperboloid je nerozvinutelný.**



b) Plocha tečen šroubovice vzniká šroubováním tečny šroubovice po této šroubovici. Volme pro jednoduchost osu šroubovice opět v ose z a dále $r = v_0 = 1$. Šroubový pohyb vzniká složením rotace kolem osy z a posunutí ve směru této osy, je tedy

$$\boldsymbol{M}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnici šroubovice získáme šroubováním bodu $\boldsymbol{A}=(1;0;0;1)$, tedy

$$\boldsymbol{S}^T(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0 & 0\\ \sin t & \cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\\ 1\end{pmatrix}$$

Šroubovat budeme tečnu v bodě $\boldsymbol{A}$, tedy přímku $\boldsymbol{T}(u)=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}'(0)\cdot u$. Protože $\boldsymbol{S}'(t)=(-\sin t;\cos t;1;0)$, je $\boldsymbol{S}'(0)=(0;1;1;0)$ a rovnice plochy je tedy dle (1) tvaru

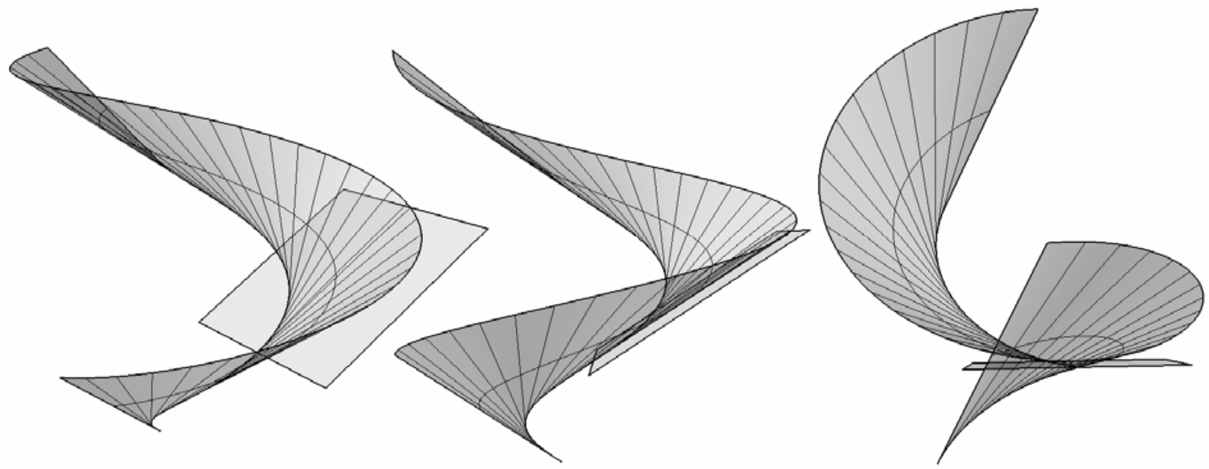
$$\boldsymbol{P}^T(u;v)=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0 & 0\\ \sin v & \cos v & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{f(v)}+\underbrace{\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0 & 0\\ \sin v & \cos v & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{g(v)}\cdot u$$

tedy

$\boldsymbol{f}(v)=(\cos v;\sin v;v;1)$; $\quad\boldsymbol{g}(v)=(-\sin v;\cos v;1;0)$

$\boldsymbol{f}'(v)=(-\sin v;\cos v;1;0)$ $\quad\boldsymbol{g}'(v)=(-\cos v;-\sin v;0;0)$

Vektory $\boldsymbol{f}';\boldsymbol{g};\boldsymbol{g}'$ jsou tentokrát lineárně závislé (je totiž dokonce $\boldsymbol{f}'=\boldsymbol{g}$). Analogický výsledek dostaneme pro plochu tečen libovolné šroubovice. **Plocha tečen šroubovice je rozvinutelná**.



c) Přepíšeme-li zadané parametrické rovnice do tvaru (1), obdržíme

$$\boldsymbol{M}^T(u;v)=\begin{pmatrix}\cos v & \cos\frac{v}{2}\cos v & 0 & 0\\ \sin v & \cos\frac{v}{2}\sin v & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sin\frac{v}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos v & \cos\frac{v}{2}\cos v & 0 & 0\\ \sin v & \cos\frac{v}{2}\sin v & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sin\frac{v}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot u$$

tedy

$\boldsymbol{f}(v)=(\cos v;\sin v;0;1)$; $\quad\boldsymbol{g}(v)=(\cos\frac{v}{2}\cos v;\cos\frac{v}{2}\sin v;\sin\frac{v}{2};0)$

$\boldsymbol{f}'(v)=(-\sin v;\cos v;0;0)$

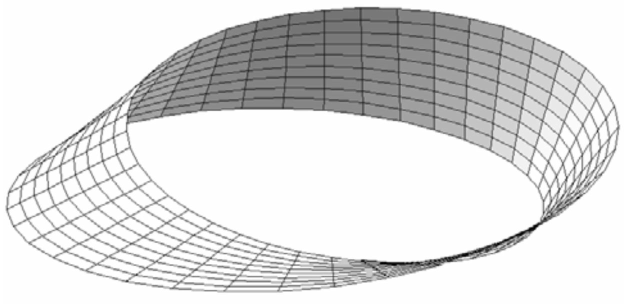
$\boldsymbol{g}'(v)=(-\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\cos v-\cos\frac{v}{2}\sin v;-\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\sin v+\cos\frac{v}{2}\cos v;\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2};0)$

Položme např. $v=0$. Pak je $\boldsymbol{f}'(0)=(0;1;0;1)$; $\boldsymbol{g}(0)=(1;0;0;0)$; $\boldsymbol{g}'(0)=(0;1;1;0)$. O lineární závislosti nebo nezávislosti těchto vektorů lze rozhodnout na základě hodnosti matice

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{g}'\\ \boldsymbol{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow h=3$$

Pro $v=0$ dostáváme tedy regulární přímku. To znamená, že všechny tvořicí přímky plochy nejsou torzální a plocha tedy není rozvinutelná.

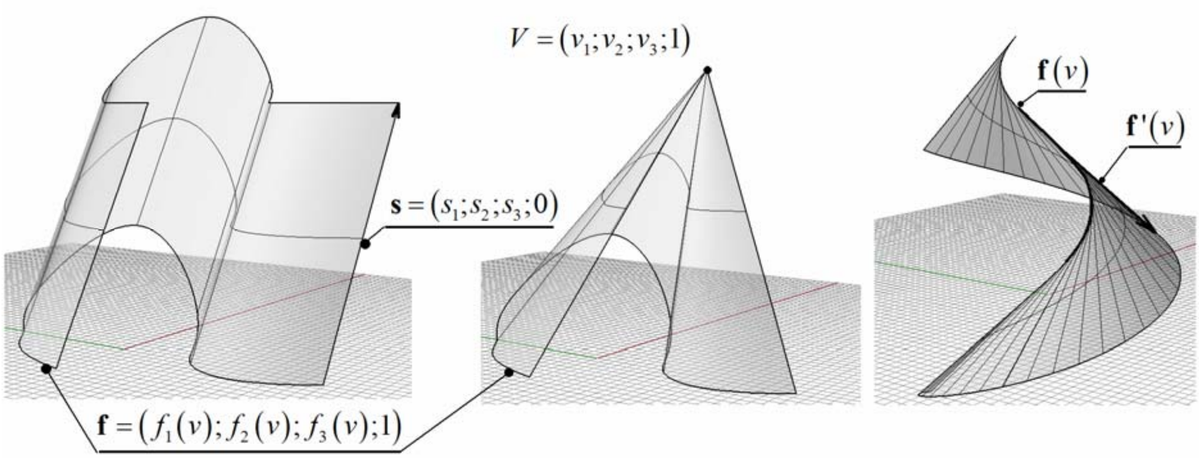
Poznámka: Výsledek příkladu 6c) je velmi zajímavý. Tato plocha je totiž známa jako Möbiův proužek, který si snadno můžeme vyrobit z úzkého proužku papíru tak, že slepíme jeho konce, když jsme předtím jeden z nich otočili o $180°$. Tím je zároveň demonstrována jeho „řemeslná rozvinutelnost“ – jestliže totiž proužek opět rozlepíme, snadno se z něj opět stane původní rovinný proužek. Tento trik je ovšem možný pouze díky pružnosti papíru a malé šířce proužku – překroucení okraje totiž nepatrně prodlouží vzdálenosti mezi body proužku. Čím je proužek širší, tím je prodloužení větší. Proto je s přibývající šířkou „překroucení“ stále obtížnější a při jisté šířce už nemožné.



12. 3 Rozvinutelné plochy

Mezi rozvinutelné plochy patří:

*a) **válcová plocha*** *b) **kuželová plocha*** *c) **plocha tečen prostorové křivky***



1. Válcové plochy: Válcovou plochou rozumíme množinu všech bodů navzájem rovnoběžných přímek, které procházejí danou křivkou $\mathbf{f}=(f_1(v);f_2(v);f_3(v);1)$. Nejčastěji ji modelujeme translačním šablonováním, tj. posouváním řidicí křivky ve směru určeném společným směrovým vektorem $\mathbf{s}=(s_1;s_2;s_3;0)$ rovnoběžek, tedy

$$\mathbf{Q}(u,v)=\begin{pmatrix}1&0&0&s_1u\\0&1&0&s_2u\\0&0&1&s_3u\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1(v)\\f_2(v)\\f_3(v)\\1\end{pmatrix};\ u\in\langle u_1;u_2\rangle;\ v\in\langle v_1;v_2\rangle \tag{1}$$

Jedná se tedy o plochu translační. Zároveň je to ovšem plocha přímková, neboť ji lze obdržet i šablonováním přímky, která protíná křivku $\mathbf{f}$ v bodě v_0 a má směrový vektor $\mathbf{s}$. Je totiž rovněž

$$\mathbf{Q}(u,v)=\begin{pmatrix}1&0&0&f_1(v)-f_1(v_0)\\0&1&0&f_2(v)-f_1(v_0)\\0&0&1&f_3(v)-f_1(v_0)\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1(v_0)+s_1u\\f_2(v_0)+s_2u\\f_3(v_0)+s_3u\\1\end{pmatrix} \tag{2}$$

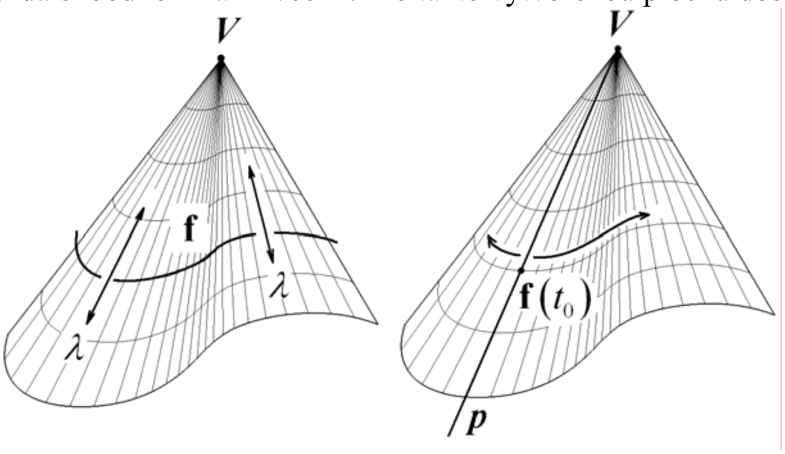
o čemž se můžeme přesvědčit roznásobením pravých stran vztahů (1), (2).

Je-li křivka $\mathbf{f}$ rovinná a vektor $\mathbf{s}$ leží v její rovině, je válcová plocha rovinným útvarem. Je-li křivka $\mathbf{f}$ rovinná a vektor $\mathbf{s}$ leží v její rovině, je válcová plocha rovinným útvarem. V opačném případě se jedná o útvar prostorový. Je-li křivkou $\mathbf{f}$ v rovnici (1) kružnice a vektor $\mathbf{s}$ neleží v její rovině, dostáváme kružnicovou válcovou plochu, je-li $\mathbf{s}$ kolmý na rovinu této kružnice, jedná se o rotační válcovou plochu, neboť ji lze vytvořit rotací (viz následující kapitola). Každá válcová plocha je rozvinutelná.

2. Kuželové plochy: Kuželovou plochou rozumíme množinu všech bodů všech přímek, které procházejí danou křivkou $\mathbf{f}=\left(f_1(v);f_1(v);f_1(v);1\right)$ a daným vlastním bodem $V=(v_1;v_2;v_3;1)$ (vrcholem kuželové plochy). Můžeme ji modelovat buď šablonováním, tj. zobrazováním řídicí křivky ve stejnolehlostech $\mathcal{H}(V;\lambda)$; $\lambda\in\mathbb{R}$, tedy

$$\mathbf{Q}(\lambda,t)=\begin{pmatrix}1&0&0&v_1\\0&1&0&v_2\\0&0&1&v_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&-v_1\\0&1&0&-v_2\\0&0&1&-v_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&v_1(1-\lambda)\\0&\lambda&0&v_2(1-\lambda)\\0&0&\lambda&v_2(1-\lambda)\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\\1\end{pmatrix}; \tag{3}$$

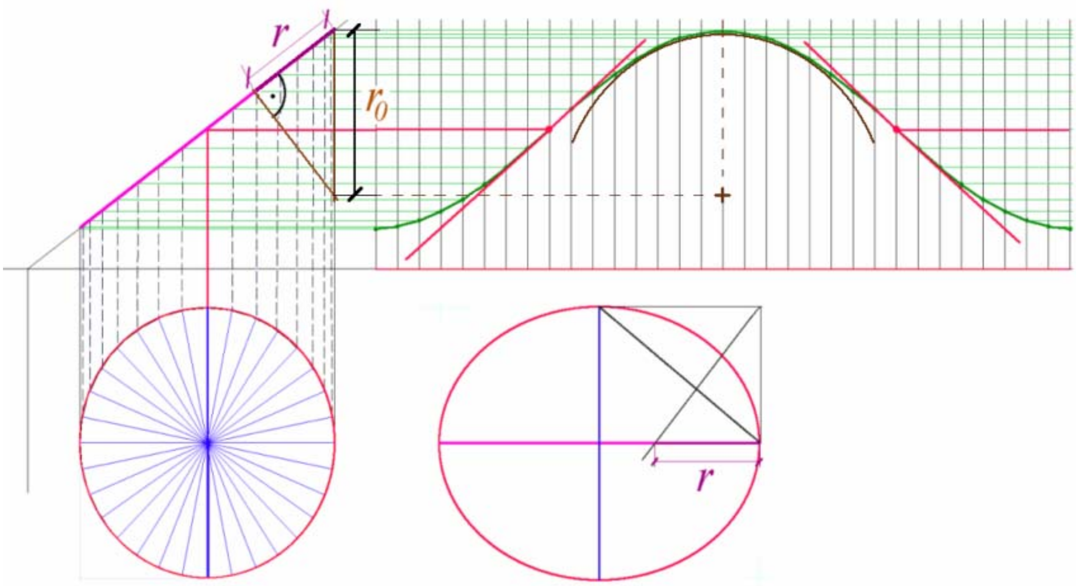
kde $\lambda\in\langle\lambda_1;\lambda_2\rangle$; $t\in\langle t_1;t_2\rangle$. Jedná se tedy o plochu homotetickou, zároveň ovšem i přímkovou, neboť ji lze opět obdržet šablonováním přímky $\boldsymbol{p}$, která prochází tentokrát vrcholem V a její další bod leží na křivce $\mathbf{f}$. Pro takto vytvořenou plochu dostaneme

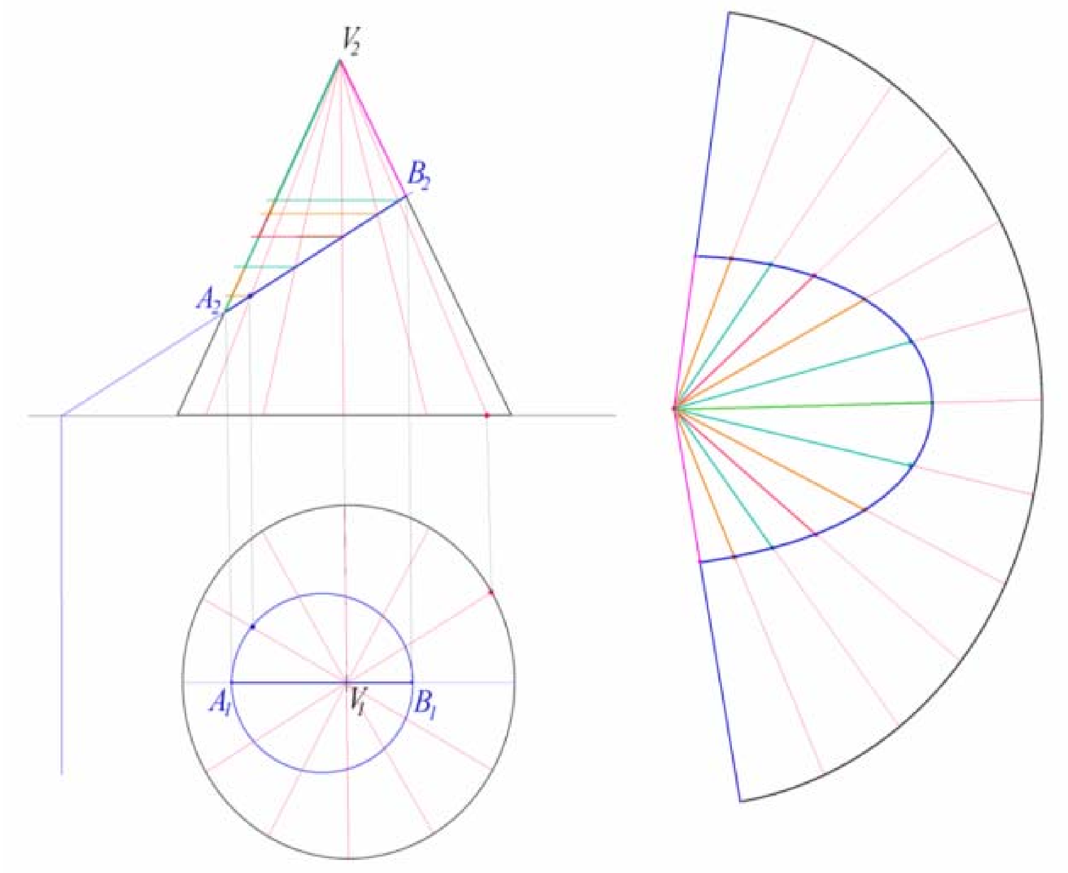


$$\mathbf{Q}(u,t)=\boldsymbol{V}+\left(\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{V}\right)\cdot u=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ 1\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ f_3(t)\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ 1\end{pmatrix}\right]\cdot u \tag{4}$$

Porovnejte rovnice (3) a (4)! Rovněž každá kuželová plocha je rozvinutelná

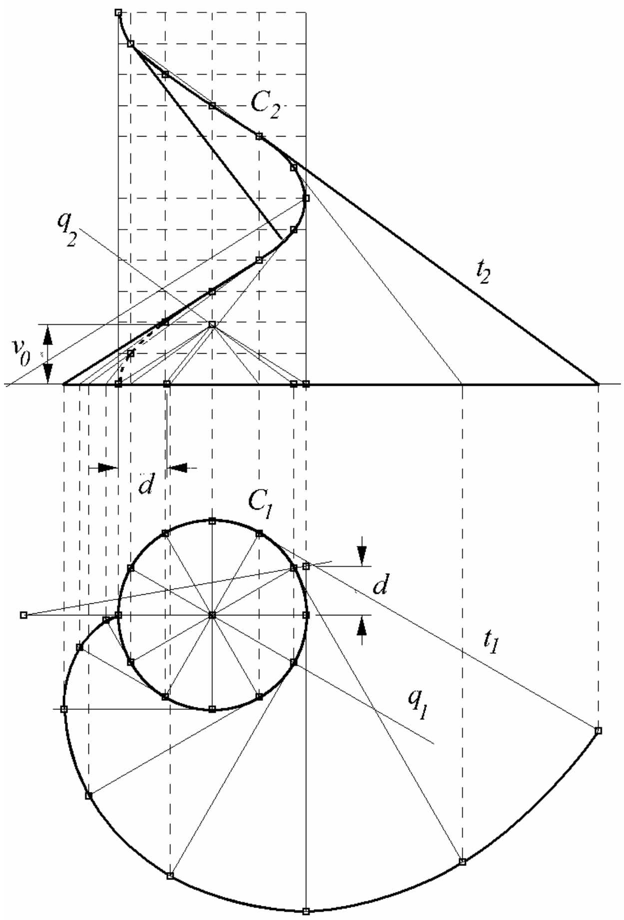
3. Příklad: V Mongeově promítání sestrojme rozvinutý plášť rotačního válce (kužele) s osou kolmou k půdorysně seříznutého rovinou kolmou k nárysně (eliptický řez)





4. Plochy tečen křivky: jsou množiny všech bodů všech tečen regulární křivky $\mathbf{f} = \left(f_1(v); f_2(v); f_3(v); 1 \right)$. Řídicí křivkou je tedy křivka $\mathbf{f}(v)$, generujícím principem bude posouvání jejich bodů ve směru tečen, tj. ve směru vektorů $\mathbf{f}'(v) = \left(f'_1(v); f'_2(v); f'_3(v); 1 \right)$:

$$\mathbf{Q}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \cdot f'_1(v) \\ 0 & 1 & 0 & u \cdot f'_2(v) \\ 0 & 0 & 1 & u \cdot f'_3(v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(v) \\ f_2(v) \\ f_3(v) \\ 1 \end{pmatrix}; \; u \in \langle u_1; u_2 \rangle; \; v \in \langle v_1; v_2 \rangle \qquad (4)$$

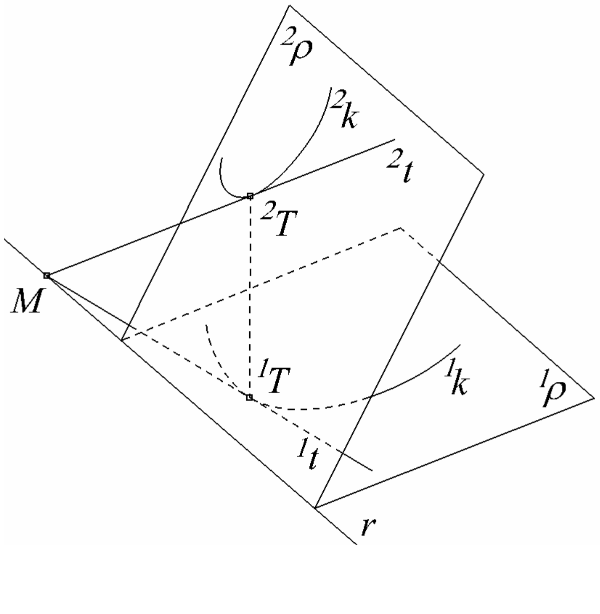


Plocha tečen každé křivky je rozvinutelná.

5. Příklad: V Mongeově promítání sestrojme plochu tečen pravotočivé šroubovice. Plochu omezme půdorysnými stopníky tečen a body dotyku.

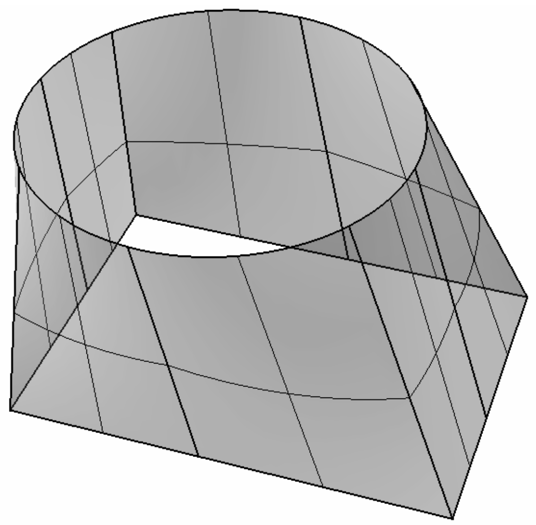
Řešení: Je třeba sestrojit průměty šroubovice dle odst 5. kpt. 11. 2. Na připojeném obrázku jsme začali šroubovat bod ležící v půdorysně, a to po třiceti stupních. Dále je třeba sestrojit tečny v těchto vyšroubovaných bodech, a to jako rovnoběžky s příslušnými površkami směrového kužele. Rovněž tato konstrukce je popsána v kpt. 11. 2. odst. 5. Na připojeném obrázku takto podrobně sestrojena tečna v bodě C, která je částí obrysu nárysu hledané plochy. Půdorys plochy se skládá z půdorysu šroubovice (tímto půdorysem je kružnice) a množinou půdorysných stopníků tečen (touto křivkou je evolventa).

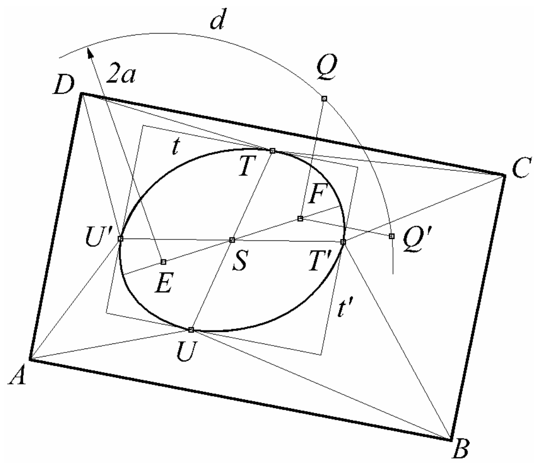
6. Přechodové plochy mezi dvěma rovinnými křivkami: Uvažujme dvě rovinné křivky $\mathbf{k}_1$; $\mathbf{k}_2$, z nichž každá leží v jiné rovině. Přechodovou plochou mezi křivkami $\mathbf{k}_1$; $\mathbf{k}_2$ rozumíme rozvinutelnou přímkovou plochu určenou těmito křivkami. Aby byla plocha rozvinutelná musí obsahovat jen torzální přímky. Zajistíme to způsobem, který ilustruje připojený obrázek. Sestrojíme průsečnici r rovin, ve kterých leží dané křivky. Tvořicí přímku plochy pak sestrojíme následovně. Na jedné z křivek zvolíme bod, ve kterém sestrojíme tečnu. Tato tečna protne průsečnici r v bodě M. Z tohoto bodu sestrojíme tečnu ke druhé

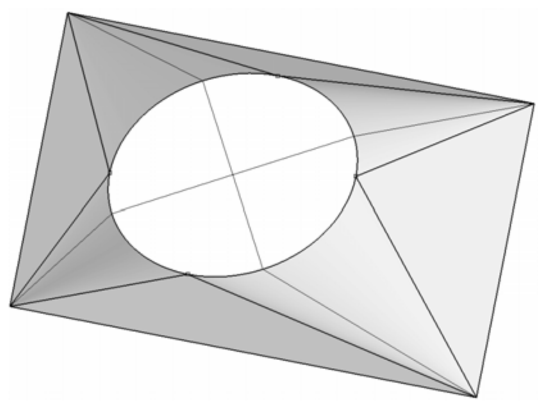


z přímek. Body $M;{}^{1}T;{}^{2}T$ tak určují tečnou rovinu, která se dotýká sestrojované plochy podél celé přímky ${}^{1}T;{}^{2}T$.

7. Příklad: V Rhinoceros sestrojme přechodovou plochu mezi obdélníkem a elipsou, které leží v rovnoběžných různých rovinách. Tuto plochu rozviňme.

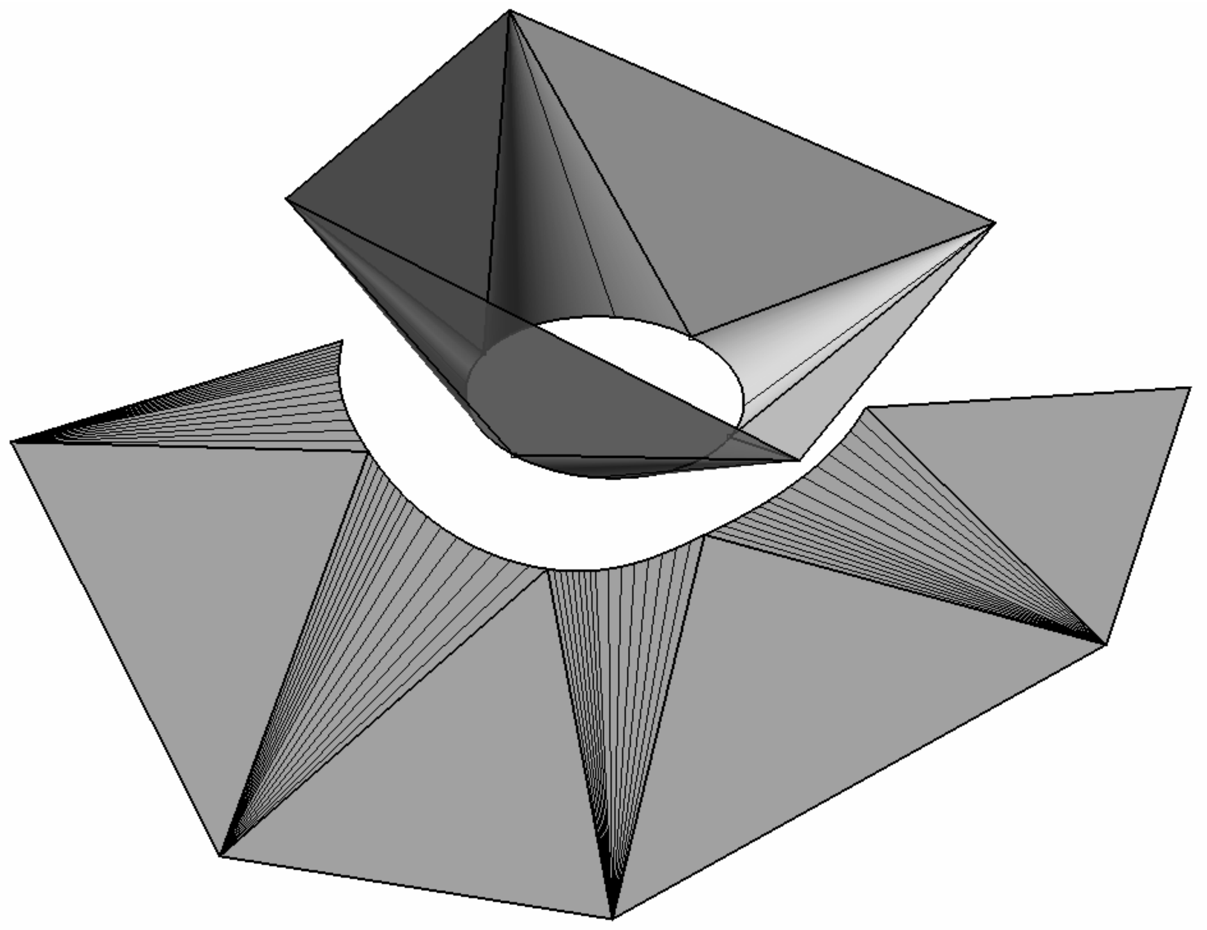




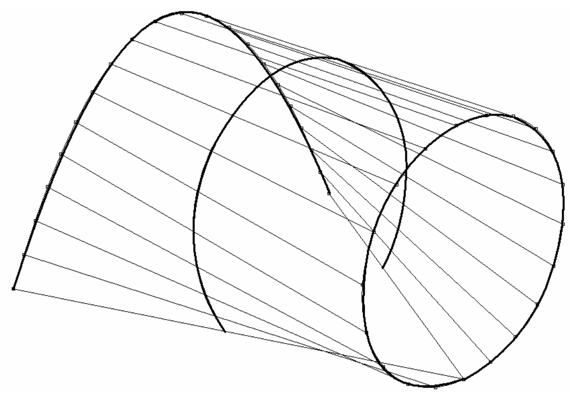


Řešeni: Plochu určenou okraji sestrojíme v Rhinoceros velmi snadno pomocí příkazu **Plocha/Potáhnout** (viz připojený obrázek). Tímto způsobem ovšem nesestrojíme rozvinutelnou plochu. Postupem z předchozího odstavce sestrojíme plochu, která se bude skládat ze čtyř trojúhekníků a čtyř kuželových ploch. Roviny obdélníku a elipsy jsou rovnoběžné, jejich průsečnice a tedy i body, ve kterých se mají protínat tečny, jsou nevlastní. Tečny obdélníka a elipsy, které určují torzální přímky, jsou tedy rovnoběžné. Obdélník má jen čtyři různé tečny – jsou to jeho strany. Je tedy třeba sestrojit tečny elipsy, které jsou rovnoběžné se stranami obdélníka. Sestrojíme je v půdorysu budoucí plochy pomocí bodů $Q;Q'$ souměrných s ohniskem podle sestrojovaných tečen – tyto body jsou průsečíky řídicí kružnice elipsy a kolmic spuštěných s ohniska na půdorys obdélníka. Tečny $t;t'$ jsou pak osy úseček $FQ;FQ'$. Body dotyku $T;T'$ a body $U;U'$, které jsou s nimi souměrné podle středu elipsy, určují spolu s vrcholy obdélníka osm přímek, které rozdělují hledanou plochu na čtyři trojúhelníky a čtyři kuželové plochy, ze kterých se skládá naše přechodová plocha. Příkazem **Rozdělit** rozdělíme obdélník na jeho jednotlivé strany a elipsu na oblouky TT'; $T'U$; UU'; $U'T$. Trojúhelníky ABU; BCT'; CDT a DAU' definujeme jako plochy pomocí příkazu **Plocha/Rovinné křivky**, části kuželových ploch ohraničené úsečkami AU; AU'… a eliptickými oblouky sestrojíme pomocí příkazu **Plocha/Hraniční křivky**. Všechny tyto části přechodové plochy pak sjednotíme příkazem **Spojit**.

Rozvinutí plochy sestrojíme pomocí příkazu **Plocha/Rozvinout rozvinutelnou plochu**.



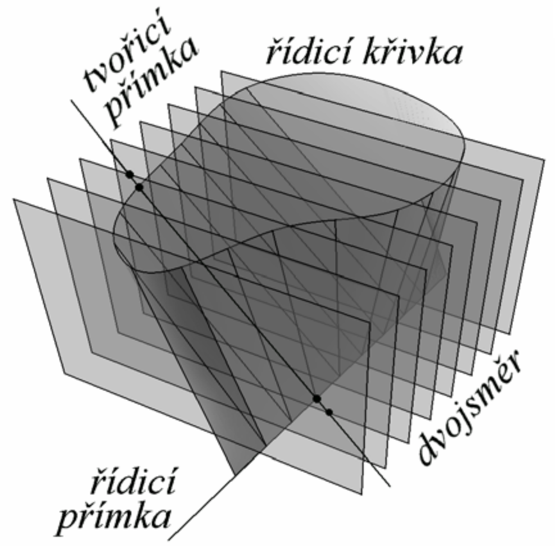
11. 4 Zborcené plochy

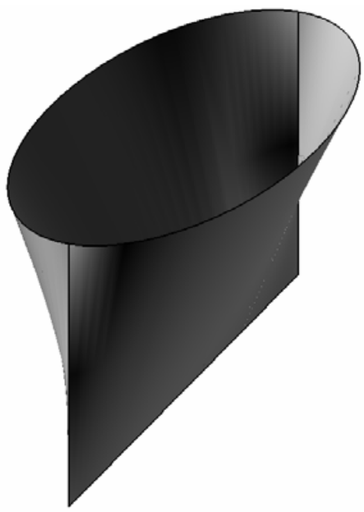


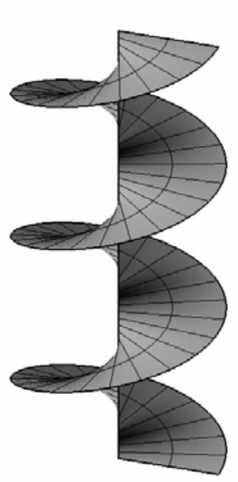
Zborcenou plochu vytvoří přímka, pohybující se po třech křivkách - tzv. **řídicích křivkách**, které neleží na téže rozvinutelné ploše. Uveďme dva typy těchto ploch.

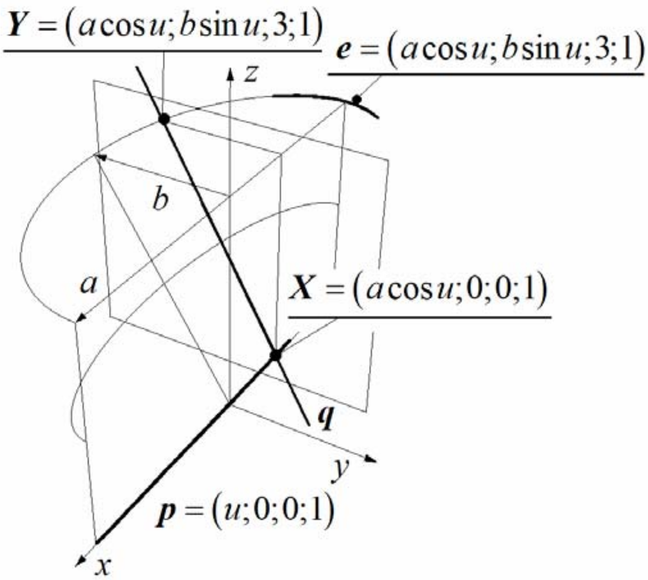
1. Konoidy: jsou zborcené plochy, kde dvě řídicí křivky jsou přímky, přičemž jedna z nich je nevlastní. Jak víme z kpt. 3.1., nevlastní přímka je určena dvěma nevlastními body, které lze v euklidovském prostoru reprezentovat dvěma různými směry, tedy stejně jako množinu všech navzájem rovnoběžných rovin – všechny tyto roviny totiž procházejí právě touto nevlastní přímkou. Konoid lze tedy určit rovněž **řídicí přímkou**, rovinou, se kterou budou rovnoběžné všechny tvořicí přímky – **řídicí rovinou**, a jednou **řídicí křivkou**. Podle této řídicí křivky hovoříme pak o konoidu kruhovém, eliptickém, parabolickém atd. Je-li navíc řídicí rovina kolmá k řídicí přímce, hovoříme o **konoidu přímém**. Jeden přímý konoid již známe – konoid šroubový. Jeho řídicí křivka je šroubovice a řídicí přímka je osa této šroubovice – je to pravoúhlá uzavřená šroubová plocha, kterou jsme uváděli v kpt. .11.3.

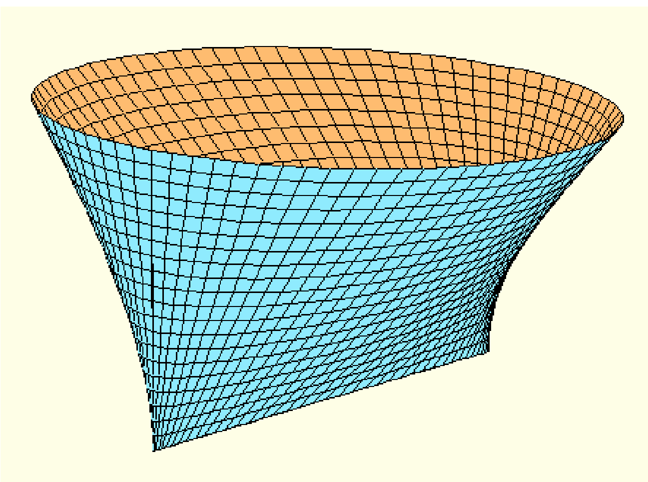
Konoidy: obecný eliptický šroubový











2. Příklad: Určeme rovnici přímého eliptického konoidu, s řídicí přímkou

$$\boldsymbol{p} = (t;0;0;1)$$

a řídicí elipsou

$$\boldsymbol{e} = (a\cos u; b\sin u; 3; 1).$$

Řešení: Plochu vytvoří body všech přímek $\mathbf{q} = XY$ takových, že

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{X} = (t;0;0;1)$$
$$\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{e} \Rightarrow \boldsymbol{Y} = (a\cos u; b\sin u; 3; 1)$$

Přímka $\boldsymbol{q}$ procházející body $\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}$ má rovnici

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}) \cdot v$$

Protože se jedná o konoid přímý, musí být přímka $\boldsymbol{q}$ rovnoběžná s rovinou $x = 0$, což znamená, že její směrové vektory

$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X})v = \left[(a\cos u; b\sin u; 3; 1) - (t;0;0;1)\right]v$$
$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X})v = (a\cos u - t; b\sin u; 3; 0)$$

musí mít první složku nulovou, takže je

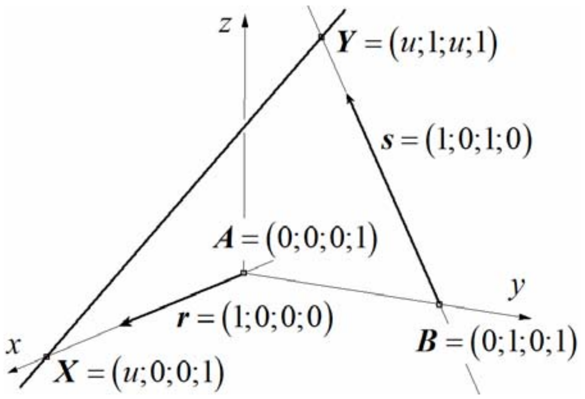
$$t = a\cos u$$

Můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}) \cdot v = (t;0;0;1) + (a\cos u - t; b\sin u; 3; 0)v =$$
$$= (a\cos u; 0; 0; 1) + (0; b\sin u; 3; 0)v = (a\cos u; bv\sin u; 3v; 1)$$

Druhým typem zborcených ploch, které zde uvedeme, jsou přímkové kvadriky. Jednodílný hyperboloid jsme již uváděli (viz př. 4.5.4 c). Podívejme se ještě na jednu takovou plochu.

3. Příklad: Určeme množinu všech bodů všech přímek $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{XY}$, jestliže bod $\boldsymbol{X}$ probíhá přímku



$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{r}u = (0;0;0;1) + (1;0;0;0)u$$

a bod $\boldsymbol{Y}$ přímku

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{s}u = (0;1;0;1) + (1;0;1;0)u$$

Řešení:
$$\boldsymbol{X} = (u;0;0;1)$$
$$\boldsymbol{Y} = (u;1;u;1)$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X})v = (u;0;0;1) + \left[(u;1;u;1) - (u;0;0;1)\right]v$$

$$\boldsymbol{q} = (u;v;uv;1) \tag{1}$$

Rovněž tuto plochu známe již ze základního kurzu matematiky. Abychom se o tom přesvědčili, otočme ji nejdříve o $\frac{\pi}{4}$ kolem osy z:

$$\overline{\mathbf{q}}^{T} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ uv \\ 1 \end{pmatrix}$$

zapišme parametrické rovnice a vylučme parametry $u;v$:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ z = uv \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2}(u-v)^2 \\ y^2 = \frac{1}{2}(u+v)^2 \\ z = uv \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x^2 = \frac{1}{2}u^2 - uv + \frac{1}{2}v^2 & I \\ y^2 = \frac{1}{2}u^2 + uv + \frac{1}{2}v^2 & II \\ z = uv & III \end{array}\right\} \overset{II-I-2\cdot III}{\Rightarrow} y^2 - x^2 - 2z = 0$$

Jedná se tedy o hyperbolický paraboloid. Ten lze tedy vytvořit nejen šablonováním paraboly po parabole, ale jak ukazuje parametrizace (1) (i připojený obrázek), jeho u-křivky i v-křivky mohou být přímky. Lze ho určit dvěma mimoběžkami a nevlastní přímkou, která neprochází jejich nevlastními body