

13 Fraktály

Fraktální geometrie je rozvíjena zhruba od šedesátých let minulého století jako nástroj popisu chaotičnosti přírody. Geometrie se až do devatenáctého století zabývala „ideálními“ útvary, „dokonalost“ útvarů byla spatřována v jejich pravidelnosti. Čtverec nebyl speciálním případem obdélníka, ale naopak, obdélník byl nedokonalý čtverec. Koncem minulého a začátkem našeho století byla objevena celá řada konstrukcí podivných útvarů, které naprosto nezapadaly do těchto koncepcí a mnohými matematiky byly přijímány s odporem jako „matematická monstra“. S jedním z těchto „monster“ – Sierpinkého trojúhelníkem - jsme se seznámili již v př. 1 kpt. 1.4.

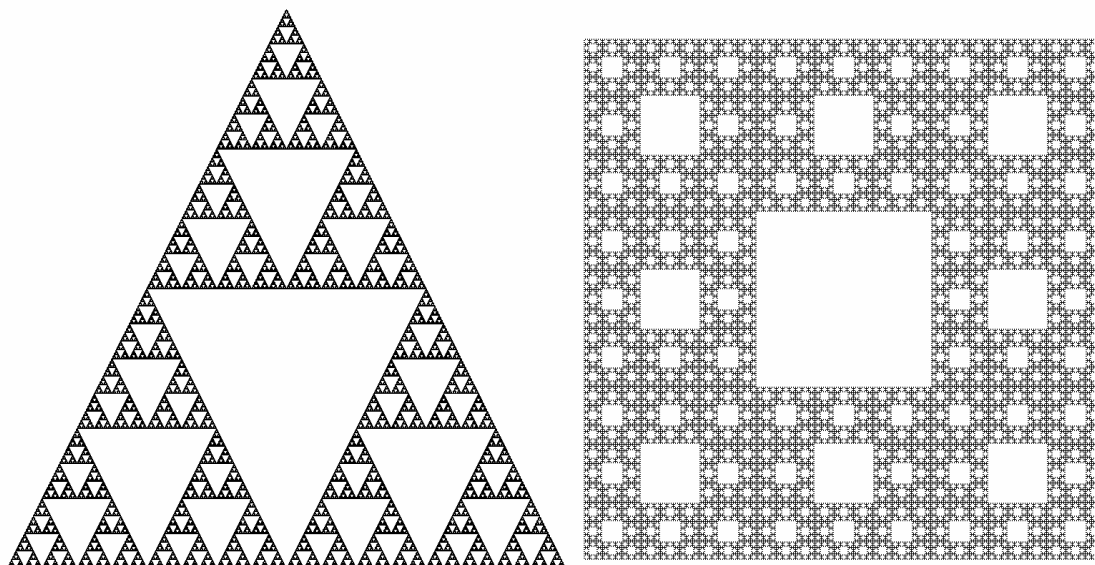
Tyto „čistě logické“ konstrukce se v době svého vzniku zdály na hony vzdálené jakékoli realitě. Teprve **B. B. Mandelbrot** počátkem 60. let ukázal, že logika vedla matematiky blíže ke skutečnosti, než sami tušili, a že jejich „matematická monstra“ jsou k popisu reálných jevů daleko vhodnější, než „ideální“ útvary. Svět přírody vždy obsahuje prvky chaotického chování. V sedmdesátých letech se vědci nejrozličnějších profesí (matematikové, biologové, chemici...) začali zajímat o popis souvislosti mezi nahodilými a chaotickými strukturami a první výsledky je vedly rovnou do světa přírody. Reálná hora není ani jehlan ani kužel, kmen stromu není ani zdaleka válec. Tabletka živočišného uhlí tvaru „válce“ s poloměrem podstavy 5 mm a výškou 4 mm má (údajně) povrch 10 m^2 (!) V lidském hrudníku je „svinutá“ plocha větší, než tenisový kurt. Oběhová soustava lidského těla musí vměstnat do vymezeného objemu značně velkou plochu. Její fraktální struktura pracuje tak efektivně, že ve většině tkání není žádná buňka vzdálena od cévy více, než tři až čtyři buňky. Přesto cévy a krev zaujímají velmi malý objem (necelých 5% lidského těla). K jakému „klasickému“ geometrickému útvaru máme přirovnat takový blesk? Hory, řeky, mraky, galaxie, dráhy blesků, cévní a kořenové systémy, genetický kód - k popisu podobných struktur je třeba zcela nového pohledu, který se starému v ničem nepodobá. Vyžaduje zbavit se zvyku uvažovat o objektech a jevech v kategoriích délka, plocha a objem.

13. 1 Pojem fraktálu

Na tomto místě doporučujeme čtenáři, aby si zopakoval pojem **topologická dimenze** (viz kpt. 2.4. odst. 10) a v příkladu 1 připomeneme ještě jednou Sierpiňského trojúhelník z př. 1 kpt. 2.4.

U ohraničených geometrických útvarů (tj. útvarů, které lze pokrýt nějakou koulí) jsme zvyklí na to, že je možné je měřit, tj. určit jejich „velikost“ jako nenulový a konečný počet „jednotek“ velikosti. U jednorozměrných útvarů je touto „velikostí“ délka, u dvojrozměrných obsah, u trojrozměrných pak objem. Z běžné zkušenosti víme, že pokusy určit obsah či délku trojrozměrných útvarů vedou k nekonečným číslům, objem dvojrozměrného útvaru je nula, jeho délka je nekonečná. Objem či obsah jednorozměrného útvaru je nulový. Počet rozměrů (dimenze) omezeného geometrického útvaru je tedy z metrického hlediska dán tím, zda tento útvar má konečnou a nenulovou délku, obsah či objem, přičemž nenulová a konečná je právě jedna z těchto veličin.

1. Příklad – Sierpiňského trojúhelník a čtverec: Sestrojme rovnostranný trojúhelník a vyjmeme z něj vnitřek trojúhelníka určeného středními příčkami. Ve zbývajících třech trojúhelnících provedme totéž a tímto způsobem pokračujeme do nekonečna. Pokud bychom analogickou konstrukci provedli se čtvercem (zde čtverec rozdělujeme vždy na devět shodných čtverců a vyjímáme vnitřek prostředního z nich), dostaneme Sierpiňského čtverec.



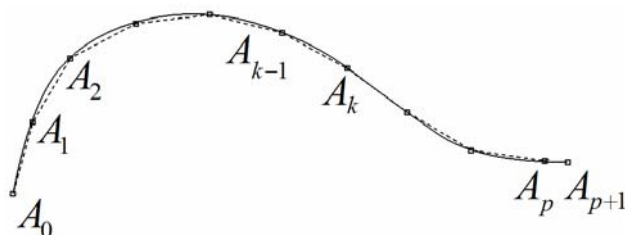
Při programování takto se opakujících se konstrukcí se používají tzv. rekurzivní procedury, tj. procedury, které volají samy sebe. Nemohou se samozřejmě volat donekonečna, obvykle končí v okamžiku, kdy velikost útvaru, který se má sestrojovat, je menší než jeden pixel zobrazovacího zařízení.

V kpt. 2. 4 jsme zjistili, že Sierpiňského trojúhelník je z topologického hlediska křivka, totéž bychom zjistili i u Sierpiňského čtverce. Z „metrického“ hlediska to však není útvar jednorozměrný (má nekonečnou délku), ale ani dvojrozměrný (má nulový obsah). Tyto útvary tedy nelze „běžným způsobem“ měřit, tj. určit, který z nich je větší a který menší.

V technické praxi většinou pracujeme s křivkami jednoduchými (tj. křivkami, které neprotínají samy sebe), anebo se jedná alepoň o křivky po částech jednoduché, tj. křivky, které lze na neprotínající se křivky rozdělit. Sierpiňského trojúhelník a čtverec jsou křivky, které samy sebe protínají v každém bodě a nejsou tedy jednoduché ani po částech. Existují však i jednoduché ohraničené křivky s nekonečnou délkou. Než se s jednou z nich blíže seznámíme, upřesňme pojem délky jednoduché křivky.

2. Délka jednoduché křivky: V kpt. 12.1 jsme se zabývali otázkou určení délky analytické křivky. Analytický předpis útvarů, kterými se budeme zabývat v této kapitole, však nemáme k dispozici. V tom přípa určíme délku jednoduché křivky tak, že sestojíme posloupnost bodů $A_0; A_1; \dots; A_p; A_{p+1}$ ležících na křivce tak, že body $A_0; A_{p+1}$ jsou krajní (v případě uzavřené křivky je $A_0 = A_{p+1}$ její libovolný bod), a platí $|A_{k-1}A_k| = v; k = 1; 2; \dots; p$ $|A_pA_{p+1}| < v$ (připouštíme i $A_p = A_{p+1}$, tj. $|A_pA_{p+1}| = 0$). Za přibližnou délku křivky pak prohlásíme číslo

$$\ell \approx \left(p + \frac{1}{2}\right) \cdot v \pm \frac{v}{2}.$$



Je zřejmé, že čím „kratší“ oblouky budou, tím se tento součet bude blížit číslu, které bychom měli prohlásit za délku křivky. Délkou jednoduché křivky bude tedy zřejmě limita

$$\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot v$$

pokud tato limita existuje.

Takto zavedená délka křivky velmi dobře odpovídá běžné představě měření délky pomocí délkových jednotek – měřicími úsečkami jsou úsečky $A_{k-1}A_k$, $k = 1; 2; \dots; p$.

3. Příklad – Kochova křivka a Kochův ostrov: Uvažujme úsečku, kterou rozdělíme na třetiny, nad prostřední třetinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník a původní prostřední třetinu vyjmemme. Nad takto vzniklými čtyřmi úsečkami zopakujeme tutéž konstrukci a takto pokračujeme do nekonečna. Je zřejmé, že úsečky vznikající v jednotlivých krocích mohou sloužit jako „měřicí úsečky“. Označíme-li v_n velikost měřicí úsečky v n -tém kroku a p_n jejich počet, je přibližná délka zjištěná v n -tém kroku

$$\ell_n \approx \left(p_n + \frac{1}{2}\right) \cdot v_n \pm \frac{v_n}{2}$$

Při našem měření je navíc vždy $A_p = A_{p+1}$, takže nemusíme uvažovat toleranci a psát přímo

$$\ell_n = p_n \cdot v_n \quad (2)$$

Dále pro $n > 1$ platí $v_n = \frac{1}{3}v_{n-1} = 3^{-n+1}v_0$; $p_n = 4p_{n-1} = 4^{n-1}p_1 = 4^{n-1}$, takže

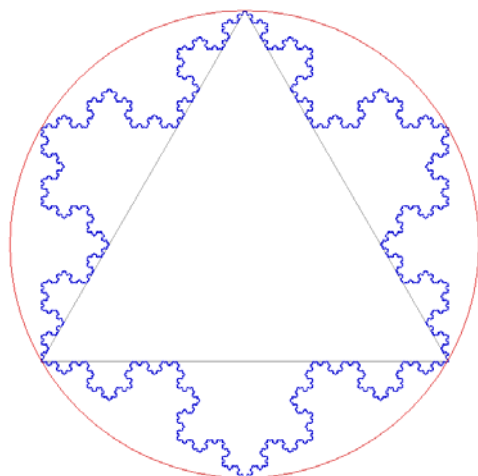
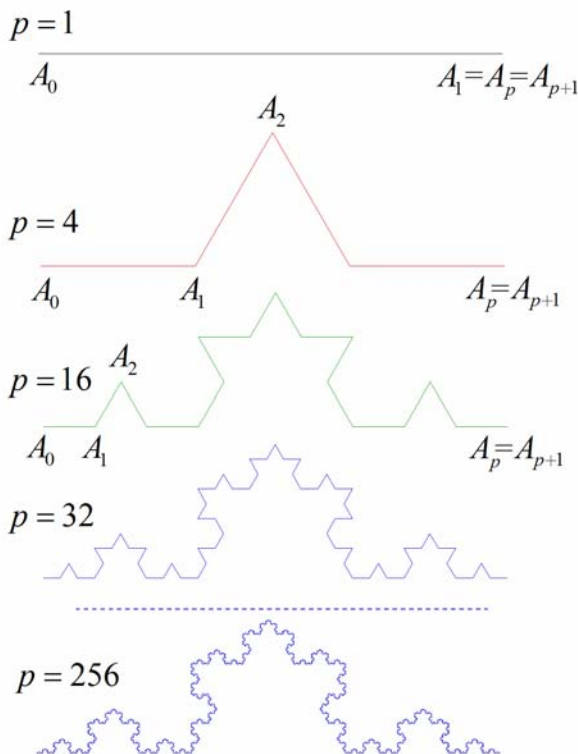
$$\ell = \lim p_n \cdot v_n = \lim 3^{-n+1} \cdot 4^{n-1} v_0 = \lim \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} \cdot v_0 = \infty$$

(neboť $v_0 > 0$). Útvar, který takto vznikl, je jednoduchá křivka. Je zřejmě ohraničená a přitom má nekonečnou délku. Ani tuto křivku tedy nelze rozumně změřit. Zopakujeme-li tuto konstrukci nad třemi úsečkami, které tvoří strany rovnostranného trojúhelníka, dostaneme tzv. Kochův ostrov, který má konečný obsah, ale jeho hranice má nekonečnou délku.

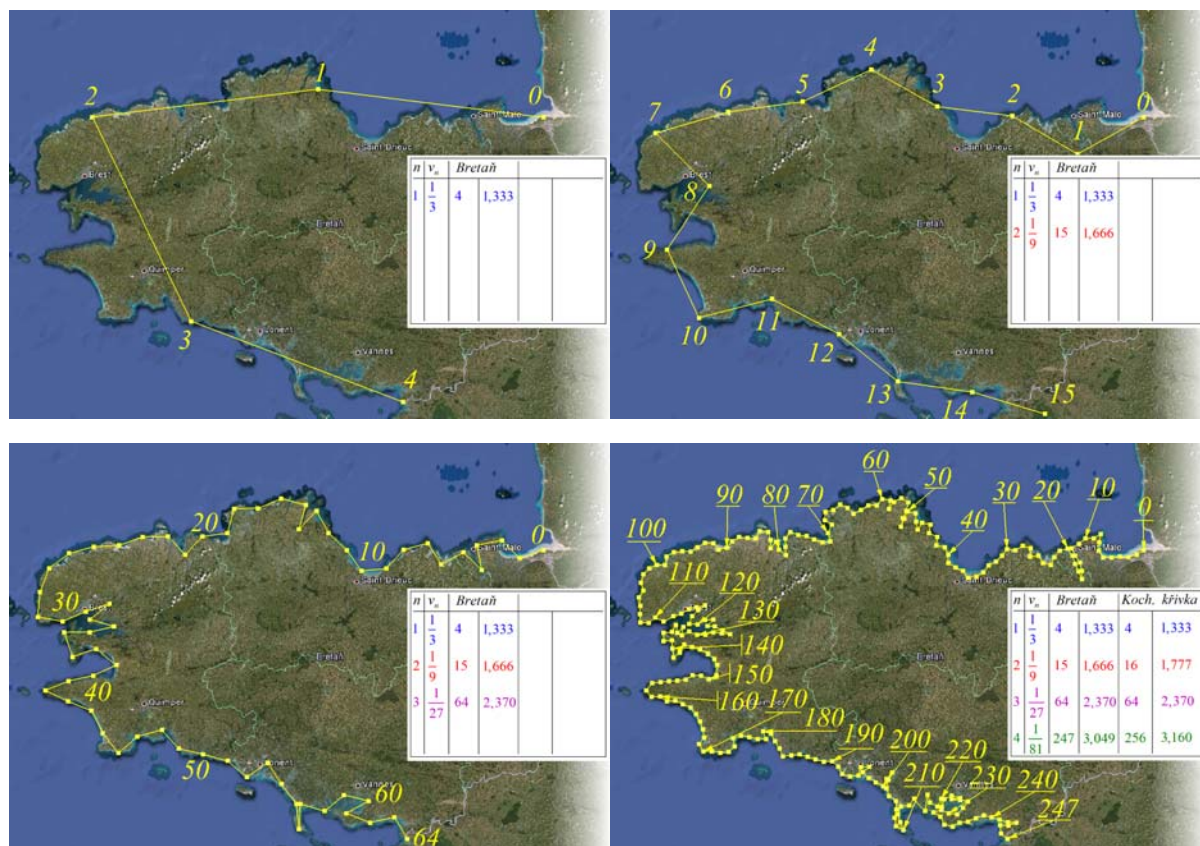
Později se ukázalo, že tyto „exotické“ vlastnosti mají i nejen umělé geometrické konstrukce, ale i útvary, se kterými se setkáváme zcela běžně.

4. Příklad - pobřeží Bretaně: Pokusme se změřit délku pobřeží Bretaně, a to postupem uvedeným v odst. 1. Takto zavedená délka zřejmě nezávisí na volbě velikosti počáteční měřicí úsečky, pro názornost ji tedy zvolíme tak, že pro v_1 bude $p_1 = 4$, tj. stejně jako pro Kochovu křivku.

Délka pobřeží zjištěná těmito měřidly je v připojené tabulce a v poslední tabulce porovnána s délkou Kochovy křivky. Je vidět, že se zmenšujícím se měřidlem se zjištěná délka pobřeží opět významně zvětšuje a limita $d = \lim p_n \cdot v_n$ definující tuto délku bude zřejmě opět



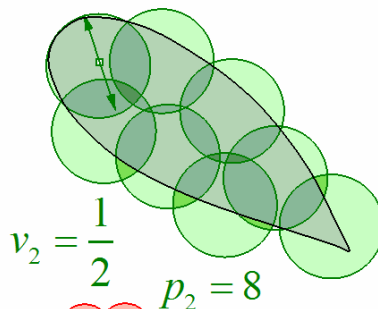
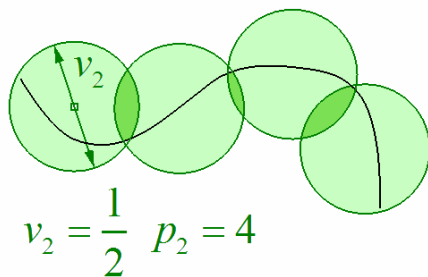
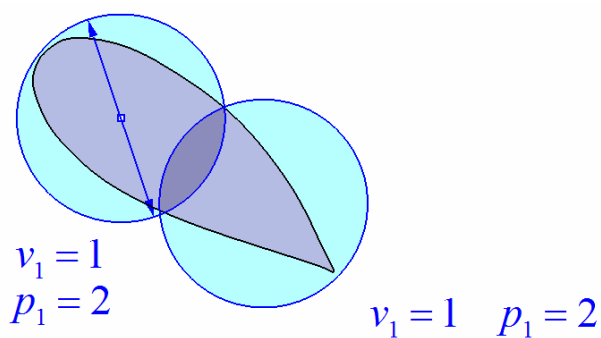
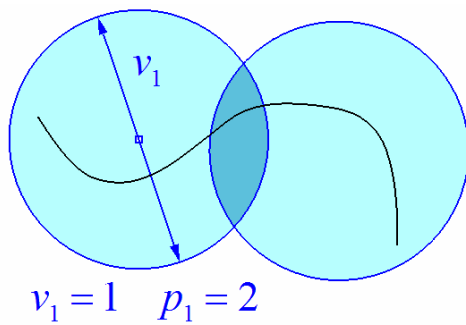
nevlastní. Na základě přesných měření v 50. letech minulého století dospěl **Lewis Fry Richardson** skutečně k závěru, že všechna pobřeží jsou stejně, a to nekonečně dlouhá.



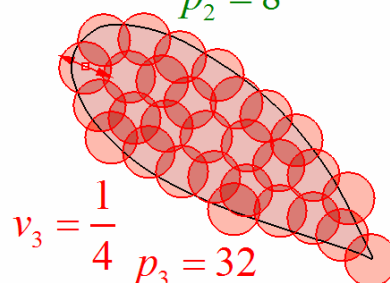
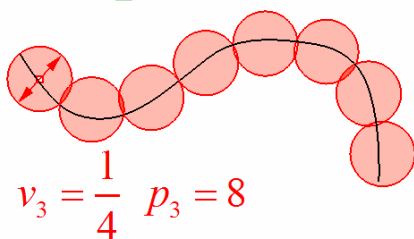
Pro porovnávání geometrických útvarů typu „větší – menší“ jsou tedy „velikosti v topologických dimenzích“ (tj. délka, obsah a objem) často příliš hrubými nástroji. Proto jsou zaváděny dimenze obecnější, ve kterých je možné porovnávat i takové útvary jako Sierpinského trojúhelníky a čtverce, Kochovy křivky i pobřeží a „velikosti“ nejrůznějších přírodních útvarů. Nejstarší a nejobecnější je dimenze Hausdorffova (podle německého matematika Felixe Hausdorffa, který ji publikoval v r. 1919). Prozatím uvedeme definici poněkud speciálnější, kterou zobecníme v následující kapitole.

5. Fraktální dimenze: je zobecněním pojmu „počet rozměrů“. Na následujícím obrázku máme topologicky jednorozměrný a dvojrozměrný útvar, který postupně „co nejúsporněji“ pokrýváme shodnými kruhy. Zajímá nás, kolik kruhů bude potřeba, jestliže jejich průměr postupně zmenšujeme na polovinu, čtvrtinu atd. Ukazuje se, že u topologicky jednorozměrného útvaru platí, že s každým dvojnásobným zmenšením průměru potřebujeme zhruba dvakrát více kruhů. U topologicky dvojrozměrných útvarů s každým dvojnásobným zmenšením průměru potřebujeme zhruba čtyřikrát (2^2) více kruhů. Pokud bychom provedli totéž s útvarem trojrozměrným, který bychom pokrývali koulemi, potřebovali bychom s každým dvojnásobným zmenšením průměru zhruba osmkrát (2^3) více koulí. Je-li $\{v_n\}$ klesající posloupnost průměrů použitých kruhů (koulí) a $\{p_n\}$ posloupnost udávající počet kruhů (koulí) o průměru v_n potřebných k pokrytí útvaru, pak pro D -rozměrný ohraničený útvar je skutečně $v_n^D \cdot p_n \approx konst$. Dále existuje limita tohoto součinu a je

$$0 < \lim v_n^D \cdot p_n < \infty; \quad D = 1; 2; 3$$



$$v_2 = \frac{1}{2} \quad p_2 = 16$$



$$v_3 = \frac{1}{4} \quad p_3 = 128$$

$$v_n \cdot p_n \approx \text{konst}$$

$$0 < \text{konst} < \infty$$

$$v_n^2 \cdot p_n \approx \text{konst}$$

$$0 < \text{konst} < \infty$$

$$v_n^3 \cdot p_n \approx \text{konst}$$

$$0 < \text{konst} < \infty$$

Požadavek „co nejúspornějšího“ pokrytí topologicky jednorozměrného útvaru zřejmě znamená, že je třeba kružnice (koule) pokládat tak, aby průsečíky s útvarem ležely na průměru, počet kruhů (koulí) vynásobený jejich počtem bude tedy přímo aproximovat délku křivky, tj. $v_n \cdot p_n \approx \ell$ a

$$\ell = \lim v_n^1 \cdot p_n$$

U topologicky jednorozměrného útvaru je dále zřejmé

$$\lim v_n^2 \cdot p_n = \lim v_n^3 \cdot p_n = 0$$

Pro topologicky dvojrozměrné útvary je výraz $v_n^2 \cdot p_n$ zřejmě roven součtu obsahů čtverců opsaných pokrývajícím kruhům. Protože se čtverce překrývají, tento výraz ani v limitě není roven obsahu útvaru. Protože však pro topologicky dvojrozměrný útvar platí

$$\lim v_n \cdot p_n = \infty; \quad 0 < S < \lim v_n^2 \cdot p_n < \infty; \quad \lim v_n^3 \cdot p_n = 0$$

je tato limita vhodným „indikátorem“ dvojrozměrnosti“. Podobně v trojrozměrném případě (promyslete!).

Z této úvahy je zřejmé (a dá se to obecně dokázat), že pro každý geometrický je buď

$$\text{a) pro každé } d > 0: \lim p_n v_n^d = 0$$

anebo

b) existuje $D > 0$ tak, že

$$\alpha) 0 < \lim p_n v_n^D < \infty$$

$$\beta) \text{ pro každé } d < D \text{ je } \lim p_n v_n^d = \infty$$

$$\gamma) \text{ pro každé } d > D \text{ je } \lim p_n v_n^d = 0$$

Tyto skutečnosti nás vedou k následující definici:

6. Fraktální míra a fraktální dimenze: Necht' $\{v_n\}$ je klesající posloupnost, p_n nejmenší počet uzavřených koulí o průměru v_n potřebný k pokrytí ohraničeného útvaru \mathcal{U} . Fraktální mírou útvaru \mathcal{U} v dimenzi d nazýváme limitu $M^d(\mathcal{U}) = \lim p_n v_n^d = 0$. Útvar \mathcal{U} má

a) fraktální dimenzi nula právě tehdy, když pro každé $D > 0$ je $M^D(\mathcal{U}) = \lim p_n v_n^D = 0$

b) fraktální dimenzi $D > 0$ právě tehdy, když $0 < M^D(\mathcal{U}) = \lim p_n v_n^D < \infty$.

Na první pohled se může zdát, že jsme právě zavedli zbytečný pojem, protože fraktální dimenze topologicky jednorozměrného (dvojrůzoměrného, trojrůzoměrného) útvaru je jedna (dvě, tři). Ale není tomu tak.

7. Fraktální dimenze Sierpiňského trojúhelníka: Podívejme se ještě jednou na Sierpiňského trojúhelník. Pro jednoduchost (bez újmy na obecnosti) můžeme předpokládat, že první kruh má průměr roven jedné polovině, tj. $v_1 = 2^{-1}$. K prvnímu pokrytí jsou potřeba tři takové kruhy, tj. $p_1 = 3$. Vždy, když zmenšíme průměry kruhů na polovinu, je k pokrytí třeba vždy trojnásobný počet kruhů tak, jak naznačuje připojený obrázek. Je tedy $v_n = 2^{-n}$; $p_n = 3^n$. Protože je

$$\lim p_n v_n^1 = \lim 3^n \cdot 2^{-n} = \infty$$

$$\lim p_n v_n^2 = \lim 3^n \cdot 2^{-2n} = 0$$

je délka trojúhelníka nekonečná a obsah nulový (to už jsme zjistili v př. 1 kpt. 2. 4 středoškolskými metodami). Nyní však víme, že musí existovat dimenze $1 < D < 2$ taková, že limita pro tuto dimenzi je nenulová a konečná, tedy

$$0 < \lim p_n v_n^D = \lim 3^n \cdot 2^{-Dn} < \infty$$

Bez újmy na obecnosti je možné předpokládat, že

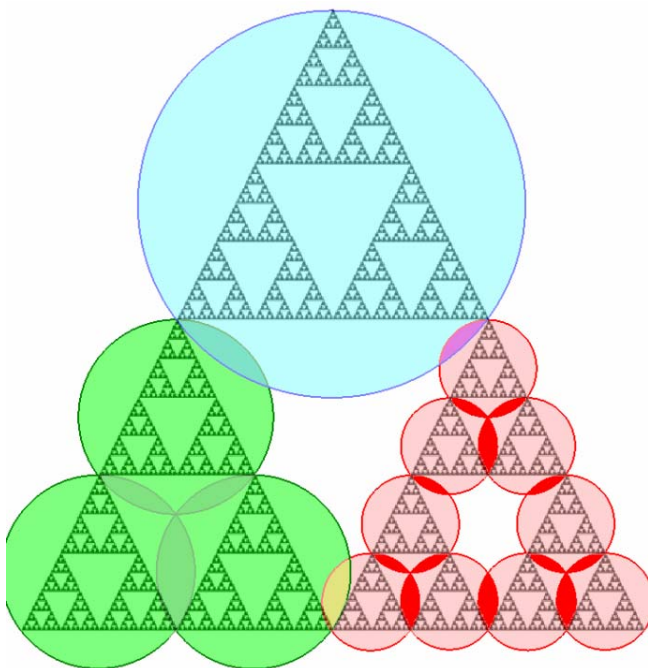
$$\lim p_n v_n^D = \lim 3^n \cdot 2^{-Dn} = 1$$

Protože výraz $3^n \cdot 2^{-Dn}$ je pro každé n ; D konstantní, je

$$3^n \cdot 2^{-Dn} = 1$$

$$3 \cdot 2^{-D} = 1$$

$$\ln 3 - D \cdot \ln 2 = 0$$



Fraktální dimenze Sierpiňského trojúhelníka je tedy

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,584\,962... \quad (3)$$

8. Fraktální dimenze Sierpiňského čtverce a Kochovy křivky: Podívej Při pokrývání Sierpiňského čtverce je výhodné zmenšovat průměry pokrývacích kruhů na třetinu, jejich počet tím zvýšíme osmkrát. Jeho fraktální dimenzi tedy zcela analogicky dostaneme

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,892\,789...$$

Konečně Kochova křivka má fraktální dimenzi

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261\,859...$$

Dospíváme tedy k pojmu fraktálu, který zavedl **Benoit Mandelbrot** (1924 - 2010):

8. Fraktál je útvar, jehož fraktální dimenze je (ostře) větší než dimenze topologická.

Protože topologická dimenze Sierpiňského trojúhelníka a čtverce, jakož i Kochovy křivky je jedna, jsou tyto tři útvary příklady fraktálů. Fraktální dimenze je vhodnou mírou členitosti geometrického útvaru. Fraktální dimenze je tak „jemnějším nástrojem“ pro popis geometrických útvarů než dimenze topologická. Nefraktální útvary (úsečka, kruh, válec...) mají fraktální dimenzi rovnou dimenzi topologické a považujeme je za „nečlenité“. Kochova křivka je členitá ($D \approx 1,26$), členitější je ovšem Sierpiňského trojúhelník ($D \approx 1,58$) a čtverec ($D \approx 1,89$). Pobřeží Bretaně, které nám posloužilo jako motivační příklad (viz př. 4), je poměrně členité ($D \approx 1,25$), pobřeží Severní Afriky je naopak téměř hladké ($D \approx 1,02$). Velmi členité plochy (topologická dimenze dvě) pak představuje povrch lidského mozku ($D \approx 2,79$) a plic ($D \approx 2,97$).

13. 2 Hausdorffova dimenze a Hausdorffova míra

Pomocí pokrývání útvarů kruhy resp. koulemi stejného průměru lze určit jeho fraktální dimenzi, k určení jeho „správné velikosti“ však nestačí, a to ze dvou důvodů:

- Kruhy (koule) se překrývají, fraktální míra $M^D(\mathcal{U})$ dle def. 6 pro $D = 2;3$ obsahů (objemů) je tedy větší než obsah (objem) dvoj- resp. trojrozměrného útvaru.
- Fraktální míra $M^D(\mathcal{U})$ pro $D = 2;3$ určuje obsah čtverců opsaných kruhům resp. objem krychlí opraných koulím. I z tohoto důvodu je obsah (objem) větší.

Abychom se obsahu resp. objemu pro $D = 2;3$ co nejvíce přiblížili, je především třeba upustit od požadavku stejného průměru. Měřenou množinu tedy budeme pokrývat ε -pokrytím ve smyslu odst. 9 kpt. 1.4., které nyní přesně definujeme:

1. ε -pokrytí geometrického útvaru: Uvažujme útvar \mathcal{U} a libovolné číslo $\varepsilon > 0$. Dále označme $\text{diam}(K_i)$ průměr koule K_i v prostoru E^3 . Sjednocení $\mathcal{K} = \bigcup_i K_i$ koulí K_i

nazveme ε -pokrytím útvaru \mathcal{U} právě tehdy, když $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}$ a pro každou kouli K_i je $\text{diam}(K_i) \leq 2\varepsilon$. Pokrytí útvaru \mathcal{U} budeme podrobně značit $\mathcal{K}(\mathcal{U})$.

Pokrytí jednoho a téhož útvaru \mathcal{U} existuje nekonečně mnoho. Všechna tato pokrytí lze částečně uspořádat množinovou inkluzí. Řekneme totiž, že pokrytí $\mathcal{K}_2(\mathcal{U})$ je menší než pokrytí $\mathcal{K}_1(\mathcal{U})$ právě tehdy, když $\mathcal{K}_2(\mathcal{U}) \subset \mathcal{K}_1(\mathcal{U})$ - říkáme také, že pokrytí $\mathcal{K}_2(\mathcal{U})$ je **zjemnění pokrytí** $\mathcal{K}_1(\mathcal{U})$. Množina všech pokrytí útvaru \mathcal{U} má tedy infimum, které umožní definovat Hausdorffovu míru a dimenzi.

2. Hausdorffova míra a dimenze: Je zřejmé, že výraz $\sum_{K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{U})} [\text{diam}(K_i)]^2$ určuje součet

obsahů čtverců opsaných hlavním kružnicím pokrývajících kouli a výraz $\sum_{K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{U})} [\text{diam}(K_i)]^3$

součet objemů krychlí opsaných pokrývajícím koulím. Abychom tyto sumy co nejvíce přiblížili obsahu resp. objemu, je třeba, aby byly co možná nejmenší, tj. položíme

$$\overline{H}^d(\mathcal{U}) = \inf_{\mathcal{K}(\mathcal{U})} \sum_{K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{U})} [\text{diam}(K_i)]^d \quad (1)$$

kde $\inf_{\mathcal{K}(\mathcal{U})}$ značí infimum všech pokrytí útvaru vzhledem k jejich zjemnění (viz předchozí odstavec). Výraz (1) pro $d=1;2;3$ již splňuje obecné požadavky kladené na délku, obsah a objem, a proto bývá v některých literárních pramenech již označován za Hausdorffovu míru útvaru \mathcal{U} . Pro $d=1$ je skutečně roven délce měřené křivky, pro $d=2$ však není roven

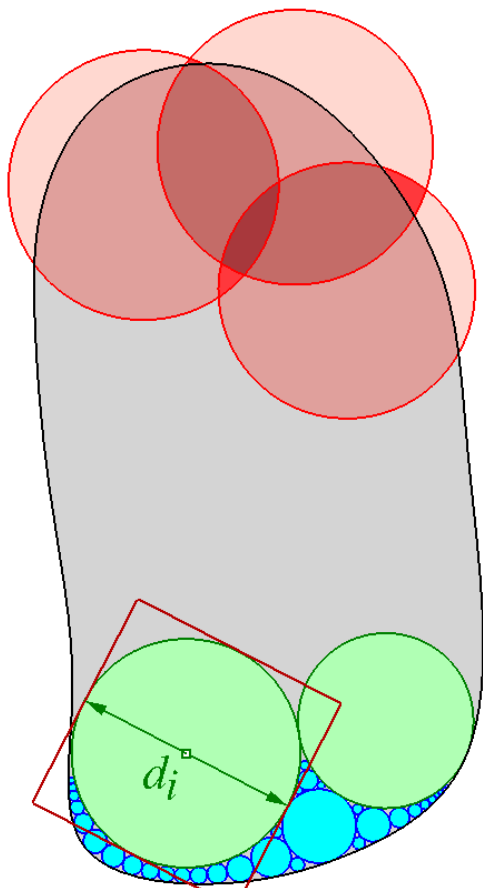
běžně chápanému obsahu a pro $d=3$ není roven objemu. Infimum sice zaručuje, že pokrývací koule se již nepřekrývají, výraz $[\text{diam}(K_i)]^2$ však není roven obsahu kruhu ale opsaného čtverce, výraz $[\text{diam}(K_i)]^3$ není roven objemu koule, ale jí opsané krychle. $\overline{H}^2(\mathcal{U})$ je tedy $\frac{4}{\pi}$ násobek hledaného obsahu; $\overline{H}^3(\mathcal{U})$ je $\frac{6}{\pi}$ násobek hledaného objemu. Výraz $\overline{H}^d(\mathcal{U})$ je tedy třeba násobit vhodnou funkcí $\alpha(d)$, jejíž funkční hodnoty jsou $\alpha(1)=1$; $\alpha(2)=\frac{\pi}{4}$ a $\alpha(3)=\frac{\pi}{6}$. Touto funkcí je funkce

$$\alpha(d) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}; \quad (2)$$

kde

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \quad (3)$$

je tzv. gama funkce. Je to vyšší transcendentní funkce, tj. funkce, jejíž hodnoty až na výjimky nelze určit metodami, které známe ze základního kurzu



matematiky. Existují však tabulky jejích funkčních hodnot i různé kalkulátory, které jsou schopny tyto hodnoty určit. Zde uveďme jen ty, které jsou potřeba k určování měr v celočíselných dimenzích:

$$\begin{aligned} d=1: \quad \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) &= \Gamma(1,5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ d=2: \quad \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) &= \Gamma(2) = 1 \\ d=3: \quad \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) &= \Gamma(2,5) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (4)$$

Výraz (1) korigovaný funkcí $\alpha(d)$ je pak již pro $d=1;2;3$ roven délce, obsahu a objemu útvaru \mathcal{U} a poskytuje i „velikost“ (míru) útvarů i v neceločíselných dimenzích. Můžeme tedy definovat:

Hausdorffovou mírou útvaru \mathcal{U} v dimenzi d rozumíme hodnotu výrazu

$$H^d(\mathcal{U}) = \alpha(d) \cdot \inf_{\mathcal{K}(\mathcal{U})} \sum_{K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{U})} \left[\frac{1}{2} \text{diam}(K_i) \right]^d \quad (5)$$

kde funkce $\alpha(d)$ je určena rovnicemi (2) a (3).

Lze dokázat, že pro každý ohraničený geometrický útvar je

bud' a) pro každé $d \geq 0$: $H^d(\mathcal{U}) = 0$

anebo b) existuje $D > 0$ tak, že $0 < H^D(\mathcal{U}) < \infty$

a pro každé $d < D$ je $H^d(\mathcal{U}) = \infty$

a pro každé $d > D$ je $H^d(\mathcal{U}) = 0$

Tyto vlastnosti Hausdorffovy míry umožňují definovat Hausdorffovu dimenzi:

Hausdorffova dimenze útvaru \mathcal{U} : Útvar \mathcal{U} má Hausdorffovu dimenzi nula ($D=0$) právě tehdy, když pro každé $d \geq 0$ je $H^d(\mathcal{U}) = 0$. Útvar \mathcal{U} má Hausdorffovu dimenzi $D > 0$ právě tehdy, když $0 < H^D(\mathcal{U}) < \infty$.

3. Příklad: Určete Hausdorffovu míru kruhu a koule.

Řešení: Infimální (v tomto případě dokonce minimální) pokrytí kruhu resp. koule o poloměru r je jediná koule o poloměru r . Kruh má $D=2$, koule $D=3$. Je tedy

$$\text{Kruh:} \quad H^2(\mathcal{U}) = \alpha(2) \cdot \inf_{\mathcal{K}(\mathcal{U})} \sum_{K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{U})} \left[\frac{1}{2} \text{diam}(K_i) \right]^2 = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)} \cdot r^2 = \frac{\pi}{1} \cdot r^2 = \pi r^2$$

$$\text{Koule:} \quad H^3(\mathcal{U}) = \alpha(3) \cdot \inf_{\mathcal{K}(\mathcal{U})} \sum_{K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{U})} \left[\frac{1}{2} \text{diam}(K_i) \right]^3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} \cdot r^3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Jak je vidět z předchozích příkladů, výpočet Hausdorffovy míry je velmi komplikovaný už i u velmi jednoduchých útvarů (trojúhelník, čtverec, krychle...). U všech nefraktálních útvarů (tj. útvarů s celočíselnou Hausdorffovou dimenzí) jsou však míry H^1 ; H^2 a H^3 rovny jejich délce, obsahu resp. objemu. Na pracné výpočty Hausdorffových měr jsme tak odkázáni jen u fraktálů. Zde ovšem nemají takový praktický význam jako dimenze, jejich určování je přece jen jednodušší.

13. 3 Mřížková dimenze a Box Counting

Výhodou Hausdorffovy dimenze je skutečnost, že je velmi obecná, a tedy použitelná na velmi širokou třídu množin. Nevýhodou této obecnosti je však velmi obtížný výpočet. Proto existuje řada dalších dimenzí, které jsou jednodušší, vhodné pro počítačové zpracování a ve většině případů poskytují tytéž výsledky. Uvedme nejznámější z nich – dimenzi **mřížkovou**.

Základní myšlenka je stejná jako u dimenze fraktální resp. Hausdorffovy s tím, že pokrývání měřeného útvaru je přizpůsobeno možnostem výstupních zařízení počítačů. Tvoří ho čtvercová či krychlová mřížka. Dimenze, která se takto zjišťuje, se proto nazývá dimenze mřížková a metoda, kterou se měření provádí, je známa jako **Box Counting**.

Předpokládejme, že měřenou množinu máme zobrazenou na výstupním zařízení počítače. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že náš obrázek má rozlišení 1024×1024 a budeme ho pokládat za jednotkový čtverec. Vyjdeme z definičního vztahu fraktální míry (viz odst. 6 kpt. 13. 1), tj.

$$M^D(\mathcal{U}) = \lim p_n v_n^D$$

s tím, že v_n tentokrát není průměr pokrývajících koulí, ale strana čtverce resp. hrana krychle sítě. Měříme-li dimenzi z obrázku na výstupním zařízení, nemůžeme samozřejmě pracovat s limitou, takže položíme přímo

$$M^{(D)}(\mathcal{U}) \approx v_n^D p_n$$

Měřenou množinu pokryjme čtvercovou sítí, jejíž jedna

„buňka“ je čtverec o straně $v_n = \frac{1}{n}$, dostáváme tedy

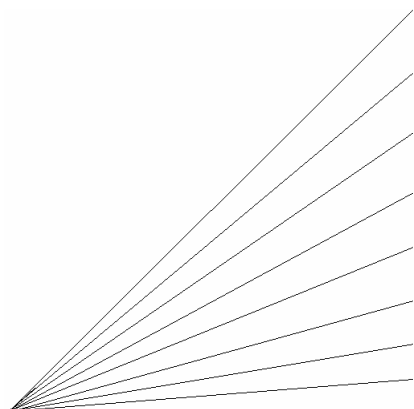
$$M^{(D)}(\mathcal{U}) \approx \left(\frac{1}{n}\right)^D p_n$$

$$\ln[M^{(D)}(\mathcal{U})] \approx D \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln p_n$$

$$\ln[M^{(D)}(\mathcal{U})] \approx -D \ln n + \ln p_n$$

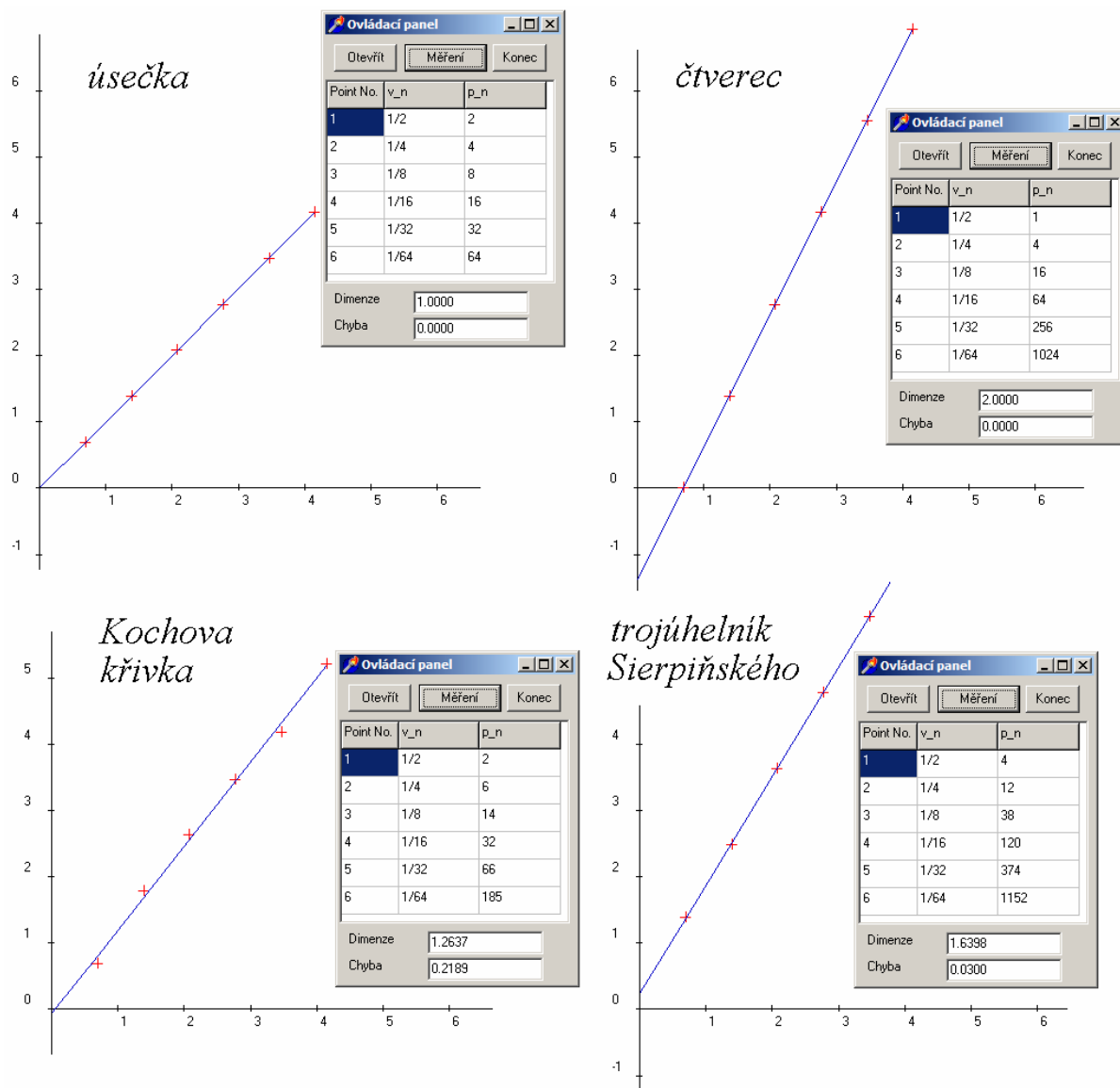
$$\ln p_n \approx D \ln n + \ln[M^{(D)}(\mathcal{U})]$$

$$y \approx k \cdot x + q$$



Při našem rozlišení nemůžeme samozřejmě v nejjednodušší variantě využít všechna $n \in \mathbb{N}$, ale pouze mocniny dvou. Dále je třeba sestavit body $P_n \equiv [x, y] \equiv [\ln n; \ln p_n]$ a těmito body proložit přímkou metodou nejmenších čtverců (s touto metodou se seznámíte ve druhém semestru v numerické matematice). Směrnice této přímky je hledaná dimenze D měřené množiny. Úsek q této přímky, resp. výraz $M^{(D)}(\mathcal{U}) = e^q$ je jakási „mřížková míra“ měřeného útvaru, která má však značně nepříjemné vlastnosti. Například úsečky na připojeném obrázku mají v „míře“ $M^{(1)}$ všechny stejnou délku, což je jistě velmi nepříjemné. Tato nepříjemnost souvisí s tím, že k pokrytí měřené množiny nejsou použity kruhy resp. koule, ale čtverce resp. krychle. Přesné objasnění příčiny tohoto jevu přesahuje rámec textu, proto od něj upustíme. Míra fraktálních útvarů, tj. míra v neceločíslných dimenzích však nemá praktický význam, v naprosté většině případů se spokojíme se znalostí mřížkové dimenze. Ta může být obecně poněkud vyšší než dimenze Hausdorffova, většinou se však hodnoty těchto dimenzí shodují.

Na připojených obrázcích si můžete prohlédnout některé výsledky. Měřené útvary byly vygenerovány na obrázku s rozlišením 1024×1024 . U úsečky a čtverce program zaznamenal přesně lineární resp. kvadratickou závislost mezi celkovým počtem čtverců a čtverců potřebných k pokrytí. Přímka tedy prochází přesně zadanými body a dimenze těchto útvarů vychází zcela přesně. U složitějších útvarů dává tento nejjednodušší algoritmus výsledky pouze přibližné, přesnost měření závisí do značné míře také na kvalitě vygenerovaného obrázku a jeho vzájemné poloze s pokrývací sítí.



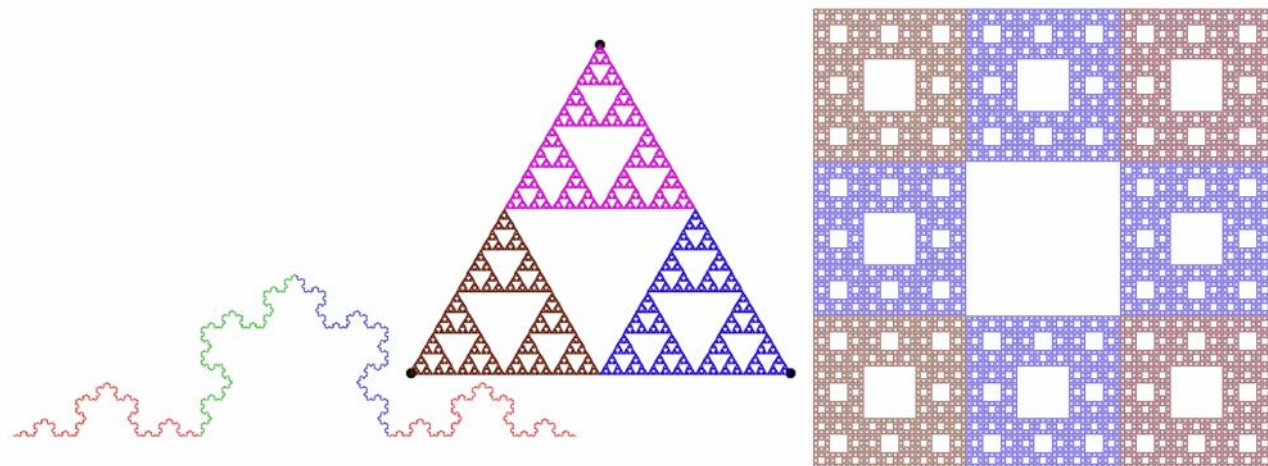
13. 4 Soběpodobnost a soběpříbuznost

Sierpiňského trojúhelník, čtverec i Kochova křivka mají ještě jednu zajímavou vlastnost, která je znázorněna na připojeném obrázku: Sierpiňského trojúhelník vznikne sjednocením tří „kopií“ sebe sama. Přesněji řečeno: zobrazíme-li tento útvar ve stejnolehlostech se středy ve vrcholech výchozího trojúhelníka s koeficientem $\frac{1}{2}$ a tyto obrazy sjednotíme, dostaneme původní útvar. Podobnou vlastnost mají i Sierpiňského čtverec a Kochova křivka.

1. Soběpodobnost: Útvar \mathcal{U} je soběpodobný právě tehdy, když existují podobná zobrazení \mathcal{I}_i ; $i = 1; 2; \dots; p$ taková, že

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{I}_i(\mathcal{U}) \quad (1)$$

Soběpodobný je trojúhelník i čtverec Sierpiňského (zde jsou podobnými zobrazeními stejnolehlosti) i Kochova křivka (zde jsou to dvě stejnolehlosti a dvě obecnější podobná zobrazení složená ze stejnolehlosti a rotace). Soběpodobné jsou i mnohé útvary, které nejsou fraktály („obyčejný“ trojúhelník a čtverec, rovnoběžník apod.).



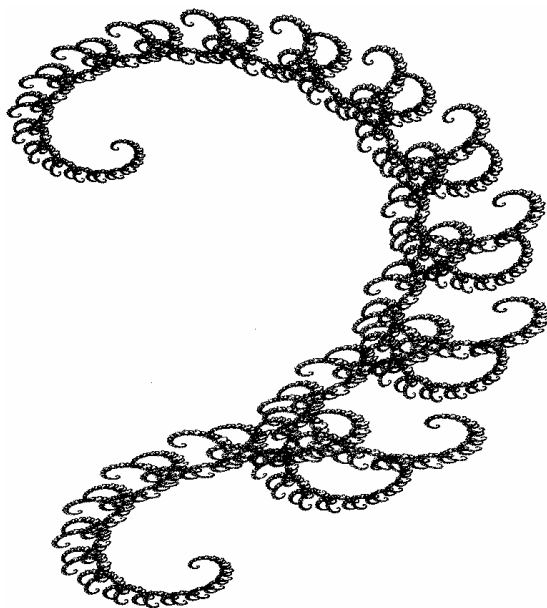
Zajímavý je vztah mezi soběpodobností a Hausdorffovou dimenzí. Jsou-li totiž $k_1; k_2; \dots; k_p$ koeficienty „tvořících“ podobných zobrazení \mathcal{I}_i z (1), pak pro Hausdorffovu dimenzi útvaru \mathcal{U} platí

$$k_1^D + k_2^D + \dots + k_p^D = 1.$$

Speciálně v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_p = \frac{1}{\lambda}$, je

$$k_1^D + k_2^D + \dots + k_p^D = \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^D + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^D + \dots + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^D}_{p \times} = \frac{p}{\lambda^D} = 1 \Rightarrow D = \frac{\ln p}{\ln \lambda}$$

Např. Sierpiňského trojúhelník je sjednocením tří svých kopií ($p=3$) zmenšených na třetinu ($\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 2$), dimenze je $D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. U Sierpiňského čtverce je $p=8$; $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = 3$, $D = \frac{\ln 8}{\ln 3}$. Kochova křivka: $p=4$; $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = 3$, $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. „Obyčejný“ čtverec je sjednocením např. čtyř kopií zmenšených na polovinu ($D = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$) nebo devíti kopií zmenšených na třetinu ($D = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$). „Obyčejný“ trojúhelník $p=4$; $\lambda=2$ nebo $p=16$; $\lambda=4$, opět $D=2$. Promyslete pro úsečku!



2. Soběpříbuznost: je zobecněním soběpodobnosti. Soběpříbuzným útvarem nazýváme útvar, který je sjednocením konečného počtu svých vlastních obrazů v libovolných kontraktivních zobrazeních, tj. v zobrazeních, která „zkracují“ vzdálenost. Pro kontraktivní zobrazení \mathcal{I} tedy platí

$|\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)| \leq k \cdot |AB|$, kde $k < 1$. Útvar \mathcal{U} je soběpříbuzný právě tehdy, když existují kontraktivní zobrazení \mathcal{I}_i ; $i = 1; 2; \dots; p$ taková, že

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{I}_i(\mathcal{U})$$

Kontraktivní zobrazení nemusí být podobností. Může to být např. afinita nebo i zobrazení, které nezobrazuje úsečku na úsečku. Soběpříbuzný útvar tedy není sjednocením svých zmenšených kopií, díky konečnému počtu kontrakcí však v útvaru můžeme vyzorovat donekonečna se opakující části, které se svým tvarem příliš neliší a lidské oko je schopno je identifikovat jako stále se opakující motivy. Fraktál na připojeném obrázku je sjednocením dvou svých obrazů v afinitách určených maticemi

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 & 3 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.4 & 8 \\ 0.3 & -0.3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Právě soběpříbuznost je typická prakticky pro všechny přírodní útvary od vesmíru jako celku přes strukturu listu a tvar mraků či krajiny pokračující až po větvení žil v organismech (fraktál na připojeném obrázku nám při troše fantazie může připomínat mořského koníka).

13. 5 Iterační systémy

1. Obecná iterační metoda: se používá při hledání přibližného řešení rovnic tvaru $x = g(x)$. Spočívá v tom, že počáteční aproximace (startovací bod) x_0 se dosadí do pravé strany, čímž obdržíme první aproximaci tvaru $x_1 = g(x_0)$. Tento postup se neustále opakuje, takže obecně je $x_{k+1} = g(x_k)$. Například v rovnici $x = -\frac{1}{6} \cdot (x^2 + 5)$ zvolme $x_0 = 0$, pak je

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{6} \cdot (x_0^2 + 5) = -\frac{1}{6} \cdot (0^2 + 5) = -\frac{5}{6} \\ x_2 &= -\frac{1}{6} \cdot (x_1^2 + 5) = -\frac{1}{6} \cdot \left[\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + 5 \right] = -0,949... \\ x_3 &= -\frac{1}{6} \cdot (x_2^2 + 5) = -\frac{1}{6} \cdot \left[(-0,949...) ^2 + 5 \right] = -0,983... \end{aligned}$$

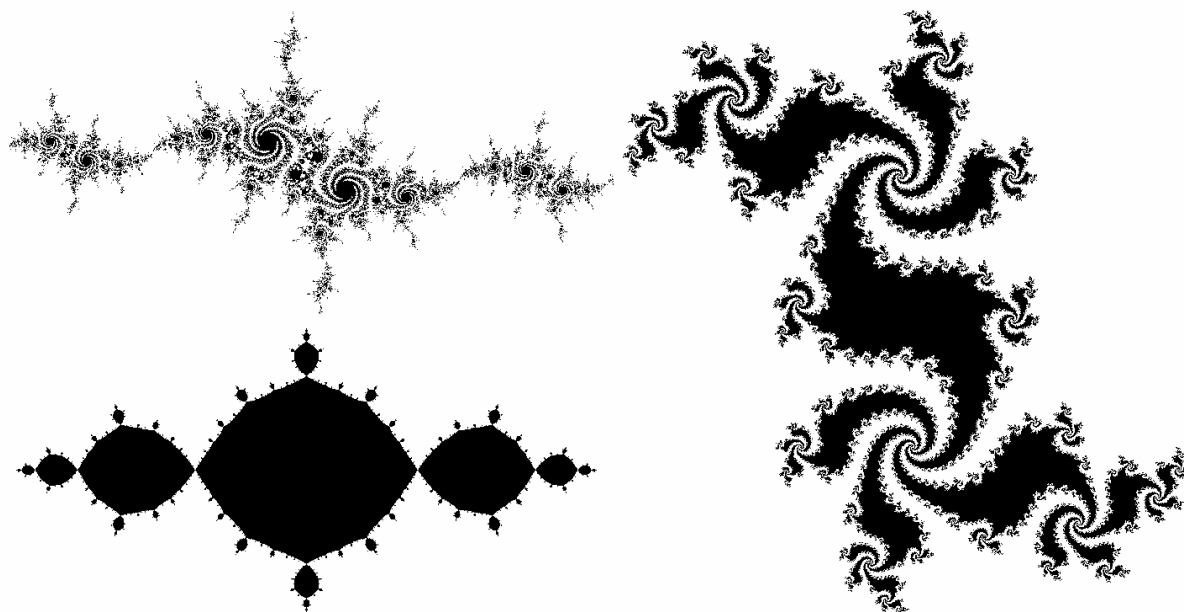
atd. Přitom přesné řešení rovnice je $x = -1$ (jak se můžeme snadno přesvědčit dosazením). Tato metoda ovšem funguje (konverguje) pouze za předpokladu, že rovnice $x = g(x)$ definuje kontraktivní zobrazení. S těmito otázkami se podrobněji seznámíte v numerické matematice ve 2. semestru.

2. Iterační systém: je systém rovnic tvaru

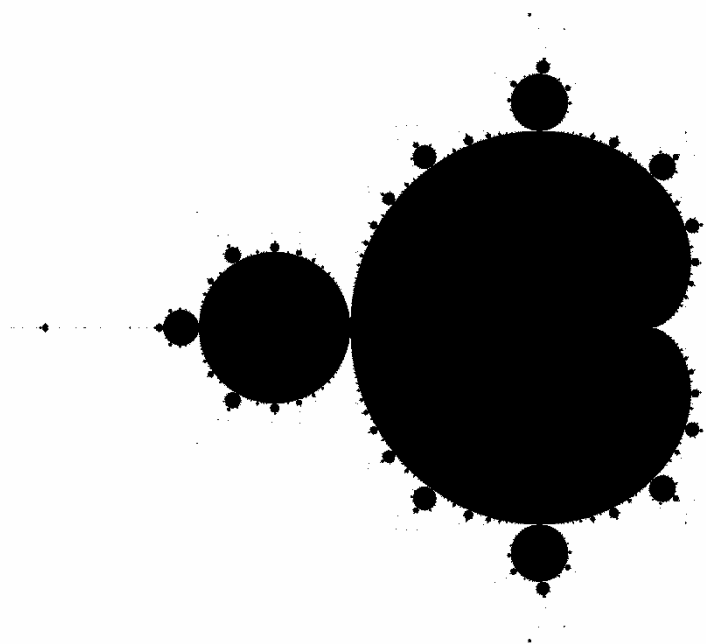
$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

a studium podmínek, za kterých systém konverguje, je obecně velmi složité. Moderní výpočetní technika umožňuje iterační procesy efektně vizualizovat.

3. Juliovy množiny: Jsou množiny všech startovacích bodů, ze kterých iterační proces systému (1) konverguje. Množiny nesou jméno francouzského matematika **Gastona Maurice Julia** (1893 – 1978), který zkoumal konvergenční procesy rovnic tvaru $z = z^2 + C$ v oboru komplexních čísel. Pro každé komplexní číslo C dostáváme jinou Juliovu množinu. Na připojeném obrázku jsou Juliovy množiny pro $C = -1.2 + 0.154i$; $C = -1 + 0i$ a $C = 0.24 + 0.54i$.



4. Mandelbrotovy množiny: Benoît Mandelbrot se zabýval problémem, pro která C je Juliova množina souvislá, a sestrojil tímto způsobem množinu, která dnes nese jeho jméno. Zatímco k rovnici $z = z^2 + C$ existuje nekonečně mnoho Juliových množin, Mandelbrotova množina této rovnice je generována jen jedna.

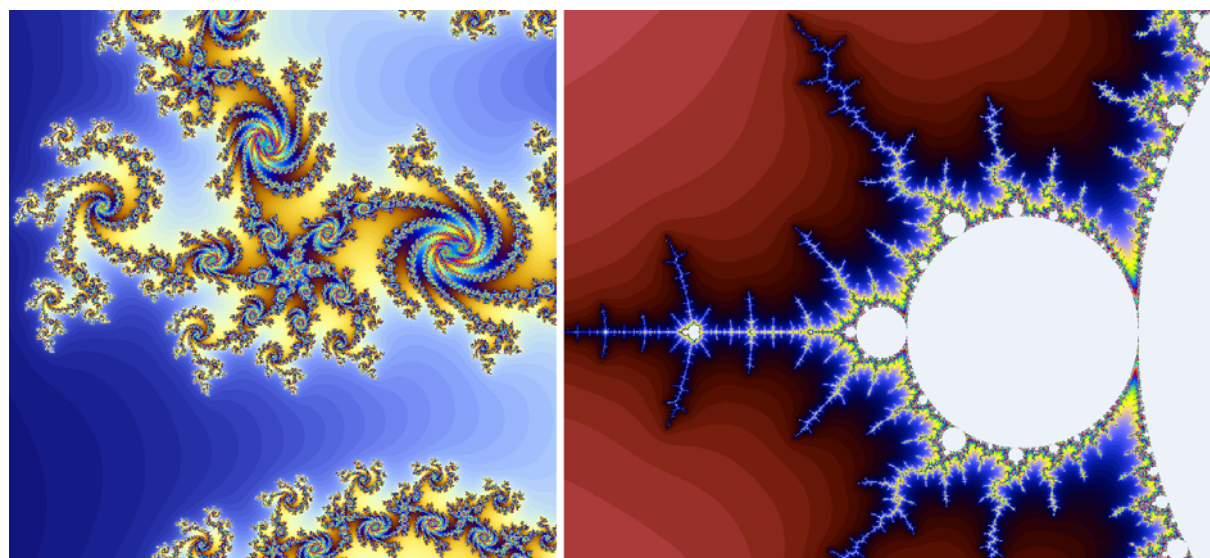


Přesto je množné číslo v úvodu tohoto odstavce oprávněné – podobným způsobem lze totiž použít i jiné rovnice. Na připojeném obrázku je Mandelbrotova množina rovnice $z = \cos z + C$. Množina rovnice $z = z^2 + C$ je souměrná podle reálné osy, množina $z = \cos z + C$ je navíc díky (komplexnímu) kosinu „periodická“.

Hranice Juliových resp. Mandelbrotových množin patří k „nejčlenitějším“ množinám. Jsou to křivky – mají topologickou dimenzi jedna, jsou však členitější než Sierpiňského čtverec – Hausdorffova dimenze Mandelbrotovy množiny je dvě.



5. Obarvovací algoritmy – při vykreslování Juliovy a Mandelbrotovy množiny se používají nejrůznější obarvovací algoritmy. Ten nejjednodušší (**Escape algorithm**) obarvuje každý pixel, který do množiny nepatří, podle rychlosti, s jakou je tato skutečnost zjištěna. Byly to právě barevné Juliovy a Mandelbrotovy množiny, které podstatně přispěly k popularizaci fraktální geometrie.



6. Projektivní systémy – iterační systémy definované soustavou (1) podrobují každý bod transformacím, které obecně nezobrazují přímku na přímku. Je-li však soustava (1) lineární, definuje projektivní zobrazení, které lze definovat maticí. Projektivní systémy jsou tedy definovány konečným počtem projektivních zobrazení, kterými v každém kroku prochází startovací bod. Je-li např. tento systém tvořen třemi stejnolehlostmi se středy ve třech nekolineárních bodech a s koeficienty 0.5, pak startovací bod vytvoří Sierpiňského trojúhelník. Na připojeném obrázku si můžeme prohlédnout množiny vytvořené projektivními systémy určenými maticemi

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.05 & 0 \\ -0.05 & 0.83 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resp.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0.195 & -0.488 & 0.4431 \\ 0.344 & 0.443 & 0.2452 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.462 & 0.414 & 0.2511 \\ -0.252 & 0.361 & 0.5692 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -0.058 & -0.07 & 0.5976 \\ 0.453 & -0.111 & 0.0969 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} -0.637 & 0 & 0.8562 \\ 0 & 0.501 & 0.2513 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

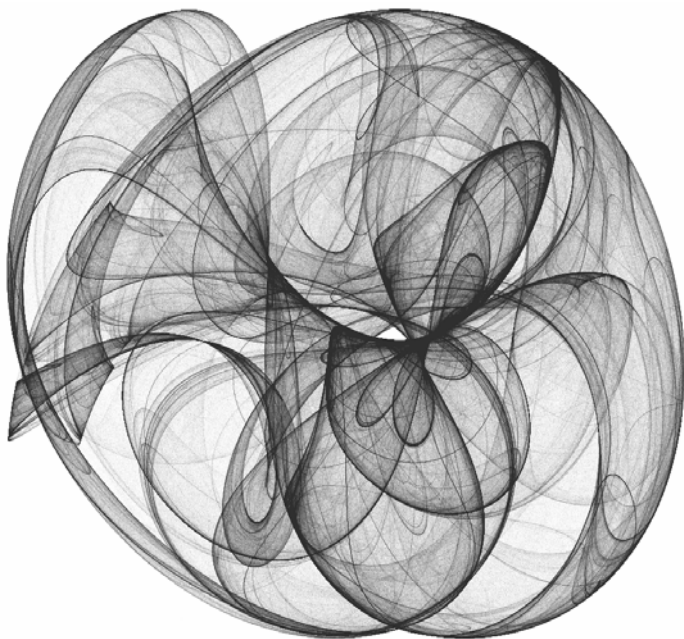


V konkrétních algoritmech ovšem není možné startovací bod podrobovat vždy všem transformacím, neboť počet takto generovaných bodů by exponenciálně narůstal a způsobil by přetečení sebevětší paměti. Tento problém se většinou řeší tak, že v každém kroku je generátorem náhodných čísel vybrána vždy jen jedna transformace, které je bod podroben. V každém kroku se tedy bod ocitne jakoby na křižovatce, kde si vylosuje další cestu. Proto je tento algoritmus nazýván **metodou náhodné procházky**.

13. 6 Dynamické systémy

Dynamický systém rozumíme systém, který je definován pomocí konečného počtu podmínek, které popisují změnu systému v čase. Množina všech možných stavů systému tvoří tzv. **stavový prostor**, konkrétní stav systému v libovolném časovém okamžiku je opět popsán konečnou posloupností hodnot – stavovým vektorem. Jestliže podle daných podmínek necháme systém vyvíjet se v čase, vzniká ve stavovém prostoru buď křivka (jestliže parametr reprezentující čas je spojitý), anebo množina bodů reprezentujících konkrétní stavy (je-li časový parametr diskrétní). Množina stavů, ke kterým systém konverguje pro $t \rightarrow \infty$, se nazývá **atraktor**. Dynamické systémy mohou být **stabilní**, anebo **nestabilní**, a to podle toho, jak reagují na změnu vstupních parametrů. Atraktorem stabilního systému je buď bod nebo uzavřená křivka, atraktorem nestabilního systému jiná množina.

V tomto smyslu je dynamickým systémem např. i metoda náhodné procházky zmiňovaná v závěru předchozí kapitoly. Počátečním stavem je startovací bod, počátečními podmínkami jsou transformace, kterým má být vystaven. Každý iterační krok představuje časový okamžik, atraktorem je množina sestavená po „dostatečném počtu kroků“. Projektivní systémy jsou zcela necitlivé pokud jde o startovací bod – metodu náhodné procházky můžeme startovat ze zcela libovolného bodu, výsledkem je vždy identický atraktor (strom či kapradina podle zvolených transformací). S citlivostí vůči nepatrným změnám transformací to už je složitější.



Například Juliova množina je extrémně citlivá na změnu parametru C , citlivost projektivních systémů závisí na tzv. podmíněnosti matic projektivních transformací (podmíněnost matic budeme studovat v numerické matematice).

Pomocí dynamických systémů lze studovat jevy závislé na mnoha parametrech, jejichž přesný vliv lze obtížně předvídat, např. vodní víry, turbulence apod. Na připojeném obrázku si můžeme prohlédnout tzv. Cliffordův atraktor – atraktor dynamického systému popsáno soustavou rovnic

$$\begin{aligned}x &= \sin 1.5y + 1.6 \cdot \cos 1.5x \\y &= 0.9 \cos 1.8y - \sin 1.8x\end{aligned}$$

13. 7 L-systémy

L-systémy byly navrženy maďarským biologem **Aristidem Lindenmayerem** v r. 1968 (**Lindenmayerovy systémy**) jako formální matematický nástroj popisu růstu řas. Dnes jsou využívány především k modelování morfologie rostlin. Ve své nejjednodušší podobě je L-systém formálně trojice množin $L = (\Sigma; S; P)$, kde Σ je množina přípustných symbolů, S je množina axiomů, které definují počáteční stav systému a P je množina přepisovacích pravidel, která umožňují generovat další stavy. Tyto stavy se posléze interpretují pomocí tzv. želví grafiky, kde želva reprezentuje kreslicí zařízení. Její stav je popsán polohou a orientací.

1. Příklad – Kochova křivka jako L-systém: Uvažujme L-systém $L = (\Sigma; S; P)$, v němž je

abeceda obsahuje tři znaky $\Sigma = \{F; +; -\}$

axiomem je znak F , tedy $S = \{F\}$

a přepisovacím pravidlem $P = \{F \rightarrow F + F - -F + F\}$

(což značí, že znak F se vždy přepisuje posloupností $F + F - -F + F$)

Možné stavy tohoto L-systému tedy jsou:

$$\begin{aligned}&F \\&F + F - -F + F \\&\overbrace{F + F - -F + F}^F + \overbrace{F + F - -F + F}^F - - \overbrace{F + F - -F + F}^F + \overbrace{F + F - -F + F}^F \text{ atd.}\end{aligned}$$

Grafická interpretace určuje „cestu“ pro kreslicí zařízení (želvu):

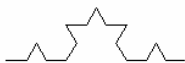
F - krok vpřed; $+$ otoč se o 60° v kladném smyslu; $-$ otoč se o 60° v záporném smyslu

Je-li tedy želva v počátku souřadné soustavy a orientována ve směru osy x , je

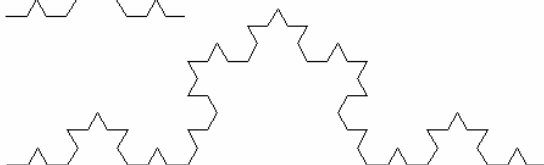
první možný stav



druhý možný stav



třetí možný stav



atd.

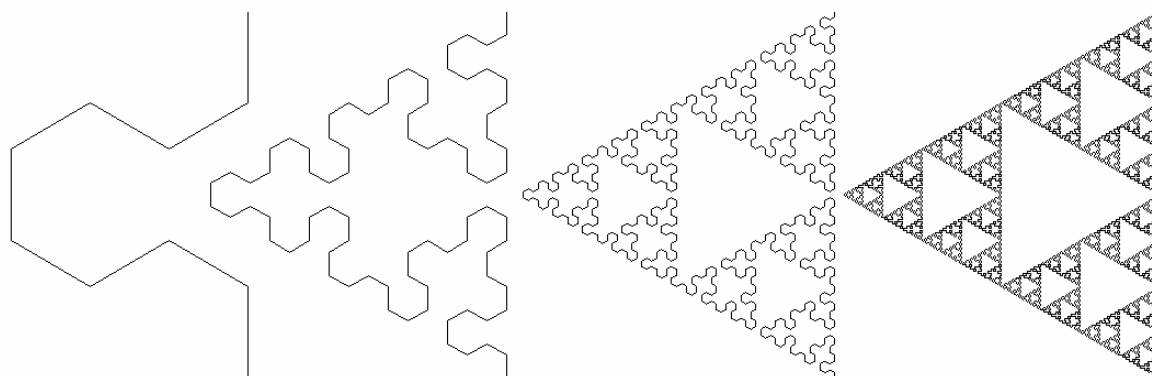
2. Příklad – Sierpiňského trojúhelník jako L-systém: Vhodným L-systémem lze rovněž „uplést“ Sierpiňského trojúhelník, tak, jak jsme slíbili v př. 11 kpt. 2. 4. Přidáme jeden znak a jedno přepisovací pravidlo:

abeceda: $\Sigma = \{F; G; +; -\}$

axiom: $S = \{F\}$

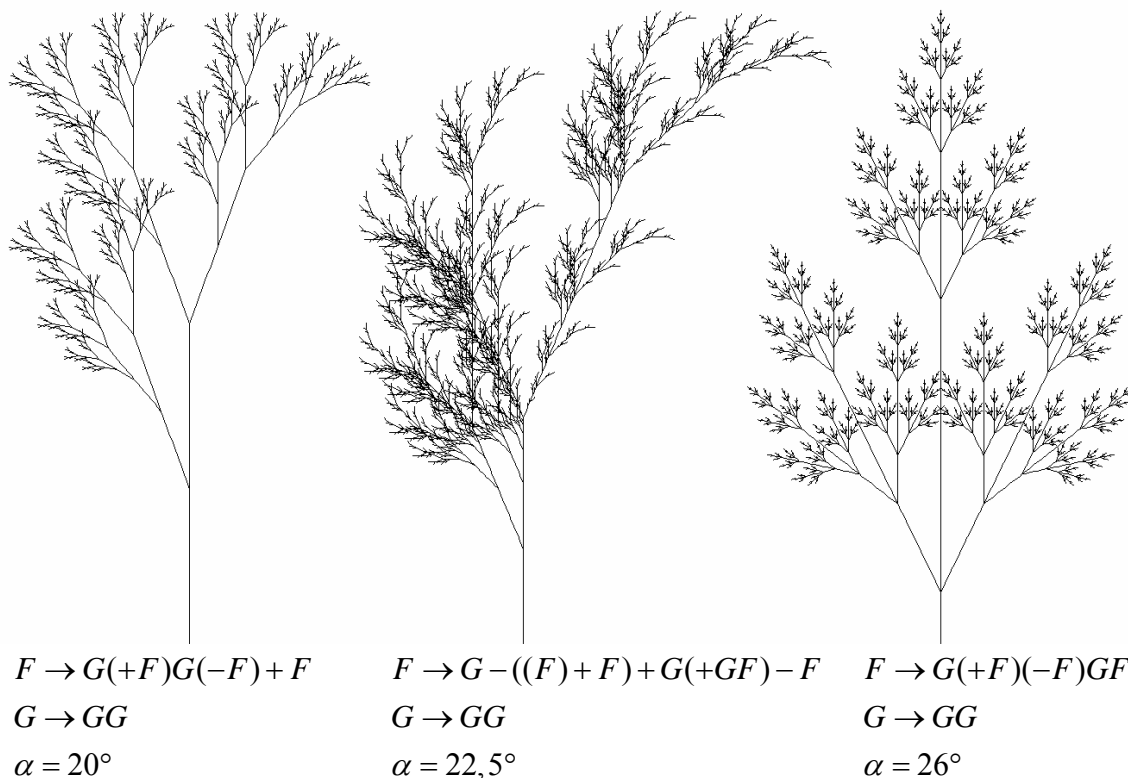
přepisovací pravidla: $P = \{F \rightarrow G - F - G; G \rightarrow F + G + F\}$

Interpretace je stejná jako v předchozím příkladě: $F; G$ - krok vpřed; $+$ otoč se o 60° v kladném smyslu; $-$ otoč se o 60° v záporném smyslu. Na následujícím obrázku vidíme některé možné stavy (krok každého následujícího stavu je z technických důvodů vždy zkrácen):



Jak bylo řečeno v úvodu této kapitoly, jsou L-systémy využívány především k modelování morfologie rostlin. K tomu je třeba umožnit L-systému větvení, a to pomocí závorek.

3. Příklad – modelování morfologie rostlin: Abeceda, axiom i grafická interpretace jsou stejné, jako v předchozím případě. Levá závorka znamená uložení stavu želvy do zásobníku, pravá pak vyzvednutí stavu ze zásobníku. Modely se liší přepisovacími pravidly a úhlem α , o který se otáčí (uvedeno u jednotlivých výstupů):



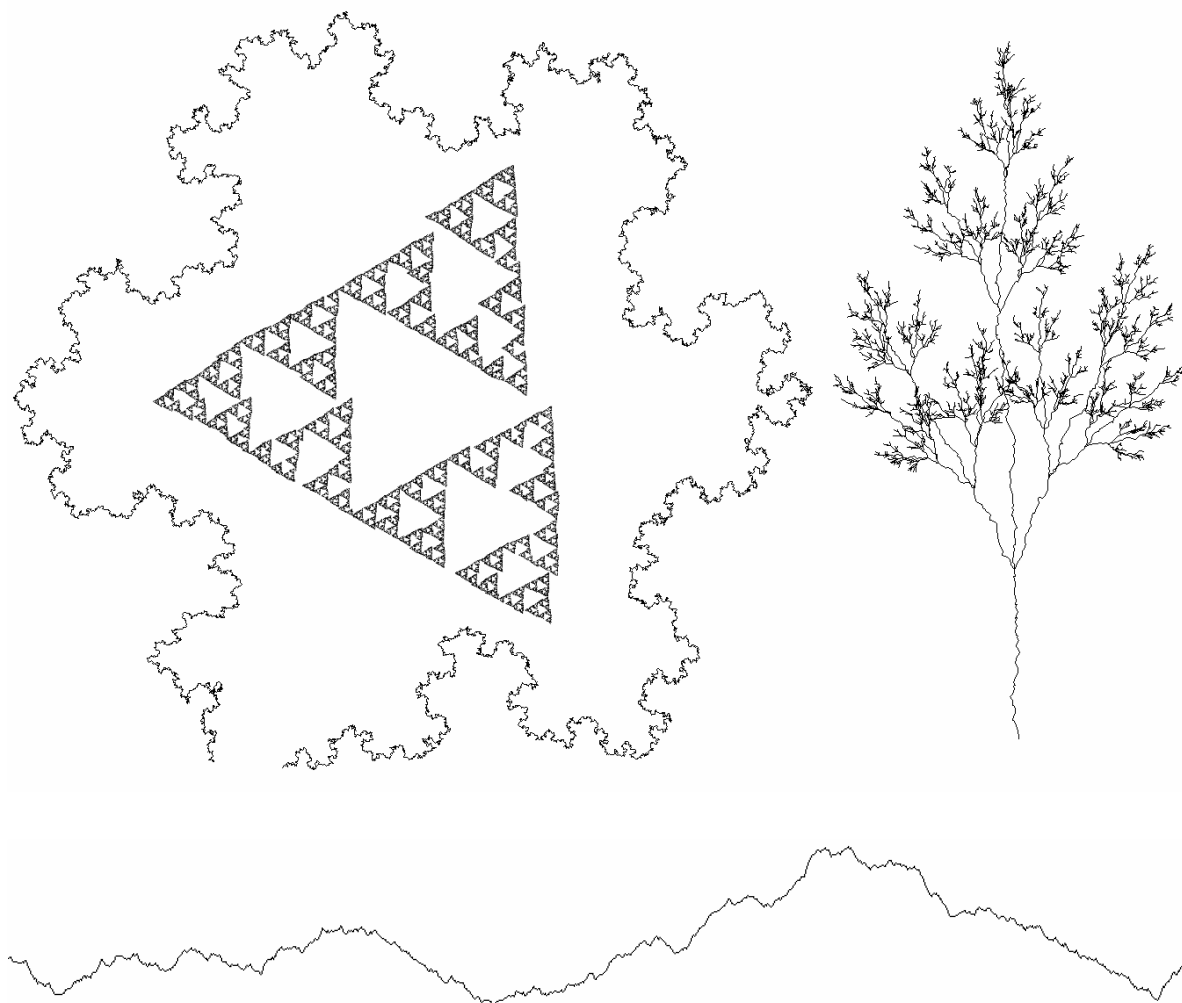
13. 8 Náhodné fraktály

V předchozích kapitolách jsme se zabývali tzv. deterministickými fraktály – tedy fraktály, které jsou plně určeny několika relativně jednoduchými počátečními podmínkami, kde nebylo místo pro náhodu. Tyto fraktály mají z hlediska popisu přírodních útvarů jednu zásadní vadu - jsou totiž příliš pravidelné. Při popisu přírodních útvarů je třeba pracovat i s náhodou - dostaneme útvary, které mnohem lépe odpovídají reálným objektům.

1. Základní princip: S náhodnými procesy lze pracovat v podstatě dvojím způsobem:

a) Pomocí generátoru náhodných čísel „rozmazávat“ souřadnice bodů, které určuje deterministický algoritmus. Aby výsledek nebyl úplně chaotický, je třeba vhodně volit jednak typ generátoru (nejčastěji se používá generátor s normálním rozložením, se kterým se seznámíte ve statistice) a také rozpětí (u rovnoměrného rozložení) resp. rozptyl (u normálního). Tyto parametry se musejí zmenšovat úměrně úrovni rekurze. Na připojeném obrázku si můžeme prohlédnout takto upravený Kochův ostrov, Sierpiňského trojúhelník a jednu z rostlin generovanou L-systémem.

b) Používat algoritmy náhodné již ze své podstaty. Ve 20. letech minulého století modeloval **Norbert Wiener** Brownův pohyb tzv. **metodou přesouvání středního bodu** (Midpoint Displacement Method - MDM). V jednorozměrném případě je princip metody následující: zvolme úsečku AB , najdeme její střed a jeho y -ovou souřadnici změníme o náhodné číslo. Na vzniklé dvě úsečky aplikujeme tentýž postup, atd., teoreticky do nekonečna. Vzniklá křivka je příkladem grafu funkce, která je na daném intervalu spojitá, ale nemá nikde derivaci. V praktických situacích algoritmus opět ukončíme tehdy, jestliže se rozdíl x -ových souřadnic sousedních bodů dostane pod rozlišovací schopnost výstupního zařízení. Výsledkem je křivka, která ne náhodou připomíná profil či horizont reálné krajiny

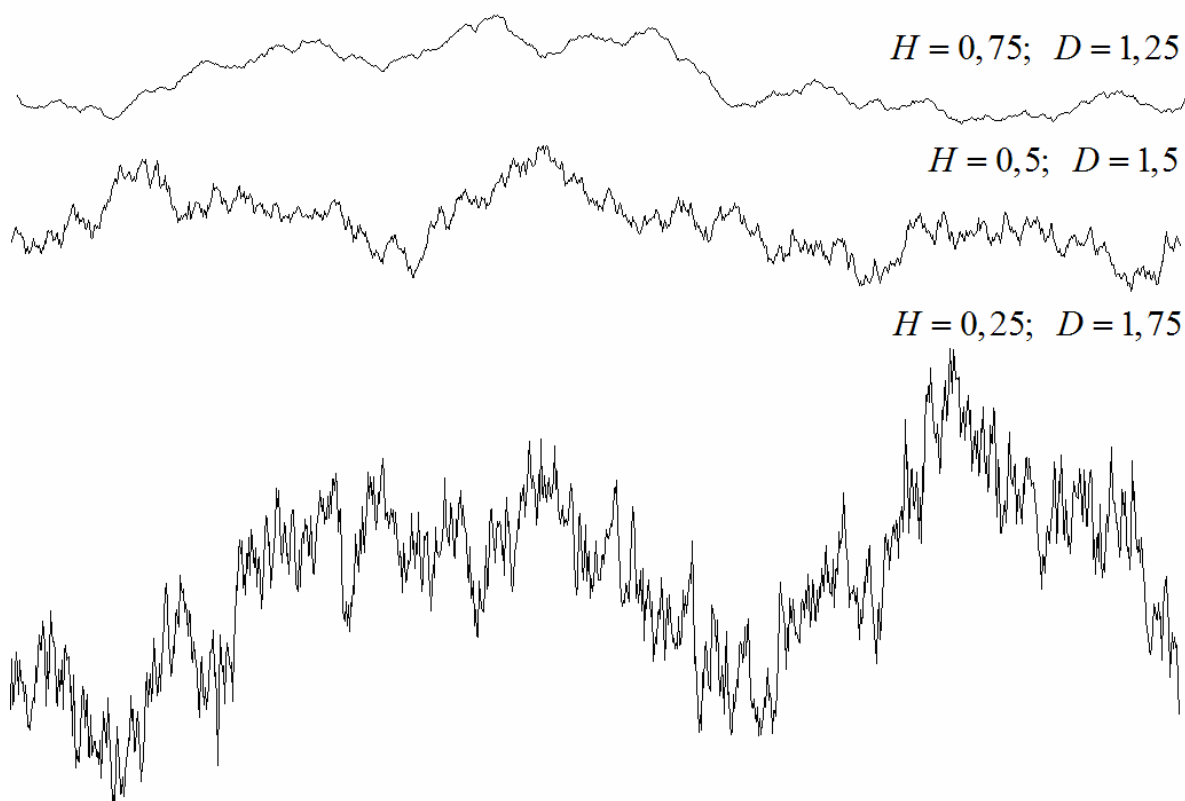


2. Hurstův exponent: Jak jsme konstatovali v předchozím odstavci, při generování náhodných fraktálů je třeba velmi pečlivě volit rozpětí resp. rozptyl generátoru náhodných čísel. Tyto parametry ovlivňují členitost výsledného fraktálu, a tím i jeho fraktální dimenzi. Při generování fraktálů metodou přesouvání středního bodu lze pomocí vhodně voleného rozptylu gaussovského generátoru vygenerovat fraktál s předem danou fraktální dimenzí. Použijeme-li totiž generátor, jehož rozptyl v n -té iteraci je dán vztahem

$$\sigma_n^2 = \sigma_0^2 \cdot 2^{-2(n+1) \cdot H}$$

kde σ_0 je počáteční rozptyl, pak fraktální dimenze fraktálu vygenerovaného metodou MDM je $D = 2 - H$. Číslo $H \in \langle 0; 1 \rangle$ je tzv. Hurstův exponent – čím je jeho hodnota menší, tím větší je dimenze vygenerované křivky a tím je tedy fraktál členitější. Na připojeném obrázku je několik křivek s různými hodnotami H .

3. MDM ve 2D: Výše popsany algoritmus pro úsečku je možné rozšířit na obdélník. V tomto případě vytváříme náhodně funkci dvou proměnných – např. model terénu. V tom nejjednodušším případě definujeme funkční hodnoty ve vrcholech obdélníka, poté jsou počítány a náhodně přesouvány další body. Možností, jak je postupně procházet, je víc. Nejčastěji se najdou a posunou středy obvodových úseček aktuálně zpracovávaného obdélníka a pomocí nich se náhodně přesune jeho střed. Podobně jako v jednorozměrném případě je možno ovlivňovat fraktální dimenzi volbou Hurstova koeficientu.



Popsané rekurzivní dělení čtverce je možné využít jak pro vytváření prostorových modelů terénu (viz připojený obrázek), tak i pro tvorbu výstupů, kterým se v počítačové grafice říká **plasma**. Ta se používá pro modelování nejrůznějších objektů – oblačnosti, barevných odstínů půdy apod. Na připojeném obrázku si můžeme prohlédnout obrázek kapradiny, k jehož vygenerování bylo použito několik výše popsaných technik. Půdní profil byl vytvořen metodou MDM v 1D. Barva půdy a obloha je plasma vytvořená metodou MDM ve 2D. Listy jsou projektivní IFS vytvořené dle odst. 6 kpt. 13. 3, konečně kořenový systém je L-systém dle kpt. 13. 4.