Kinematika – rektifikace oblouku (Sobotkova a Kochaňského),

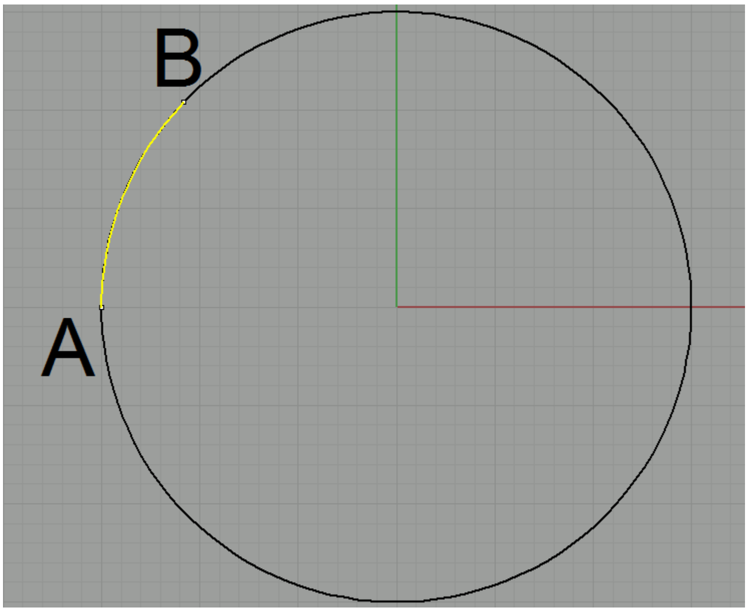
prostá cykloida, prostá epicykloida, úpatnice paraboly.

Výpočty trajektorií bodů při složených pohybech.

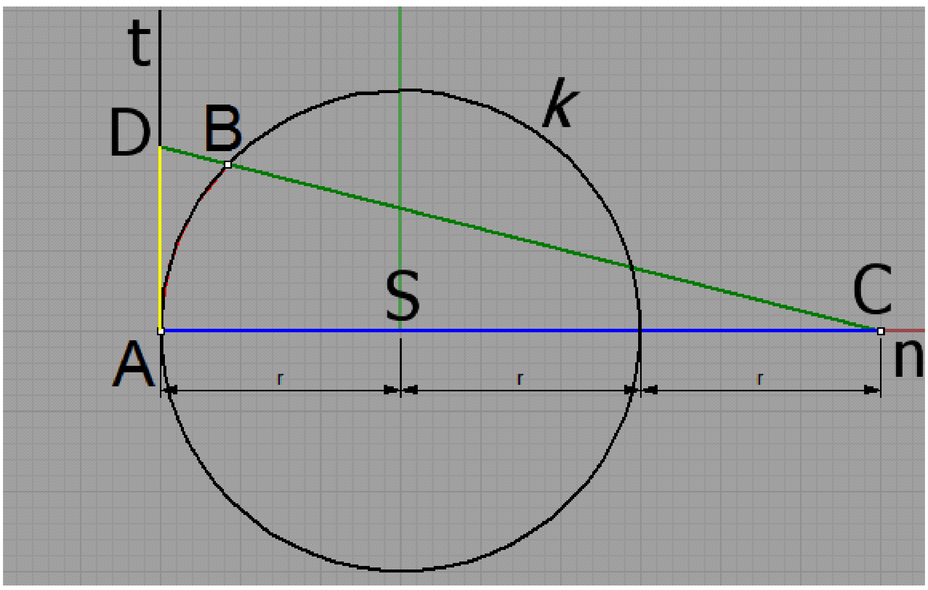
Příklad 1: Je dána kružnice *k* s poloměrem 30 a na ní je vyznačený oblouk AB. Sobotkovou rektifikací určete délku oblouku AB.

Návod: Sobotkova rektifikaci lze použít pro kruhové oblouky se středovým úhlem menším než 60°.

Na následujícím obrázku je zadána kružnice a vyznačen oblouk AB.



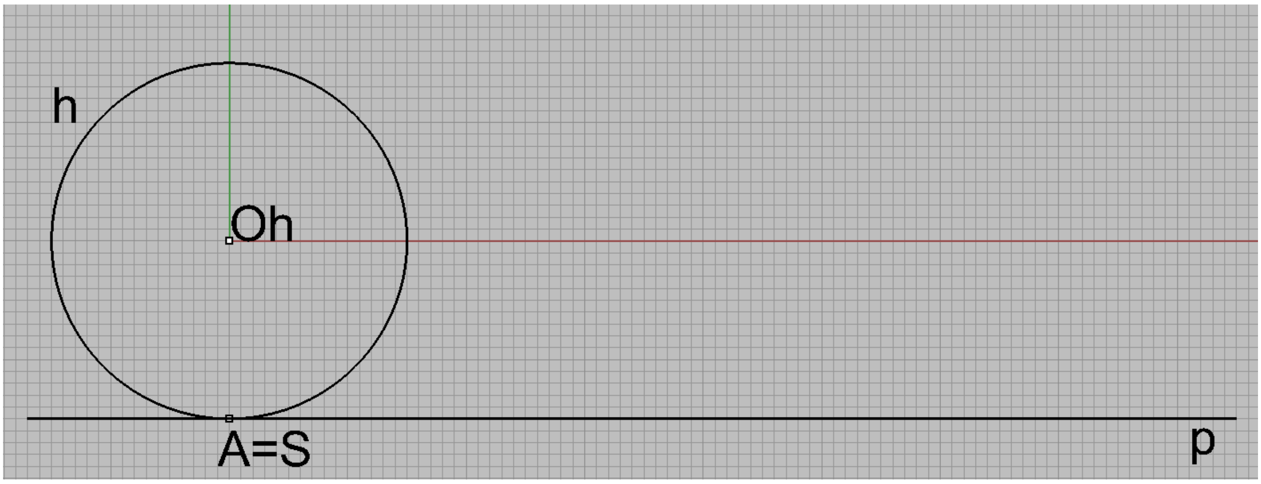
Od krajního bodu A daného oblouku naneseme 3x poloměr r=30 na polopřímku *n* jdoucí bodem A a středem kružnice S. Získaný bod C spojíme s bodem B a oblouk promítneme na tečnu *t* v bodě A ke kružnici *k*.



Úsečka AD zvýrazněná žlutou barvou má přibližně délku oblouku AB.

Příklad 2 (str. 121/10): Cykloidální pohyb je dán hybnou polodií *h* a pevnou polodií *p*. *h* je kružnice $x^2+y^2=15^2$ a *p* je přímka y=-15. Sestrojte část trajektorie bodu A[0,-15] a jejím obecném bodě sestrojte tečnu.

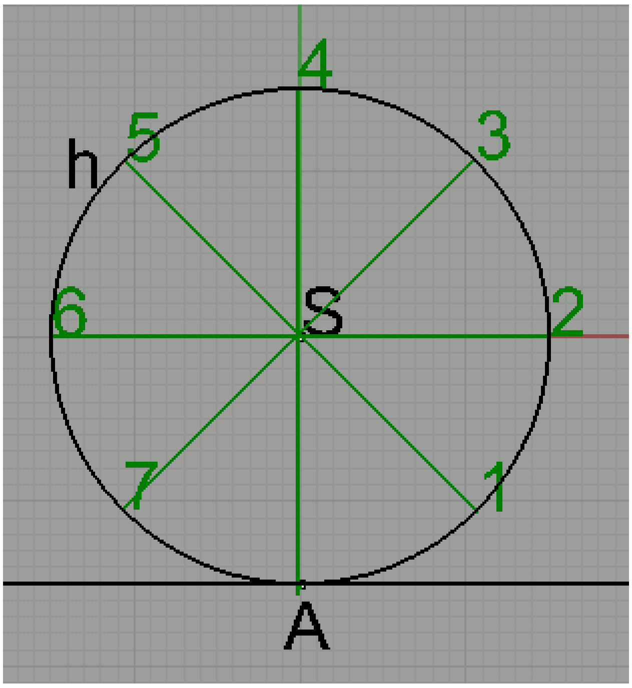
Návod: Zadání vypadá následovně.



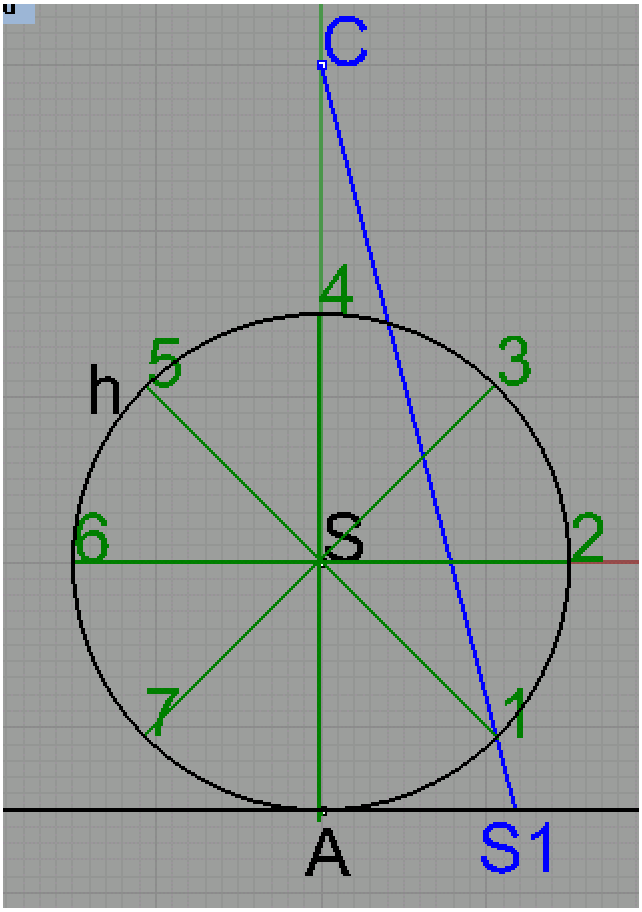
Sledujeme trajektorii bodu A při odvalování kružnice *h* po přímce *p*.

Postup konstrukce:

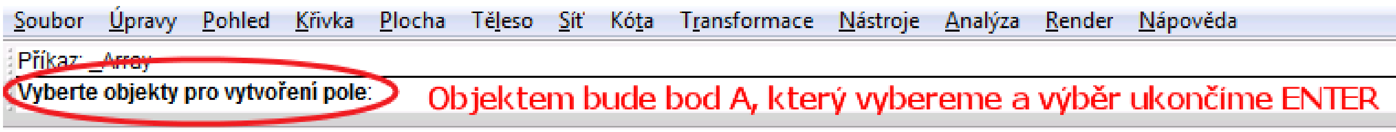
1. Rozdělíme kružnici *h* na 8 (případně i více) dílů a označíme získané body postupně 1, …,7. Podstatné je, abychom následně mohli použít například Sobotkovu rektifikaci oblouku, která je dostatečně přesná pro úhly do 60^{o}.
   Upozornění: V dalších obrázcích je špatně uvedeno značení. Místo bodu S si nechte označeno O_h jako střed hybné polodie a bod A je současně bodem S, tj. okamžitým středem otáčení.



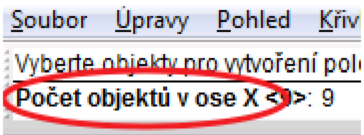
2. Sobotkovou rektifikací přeneseme délku oblouku A1 na přímku *p* a získáme úsečku AS1, která má přibližně délku oblouku A1.



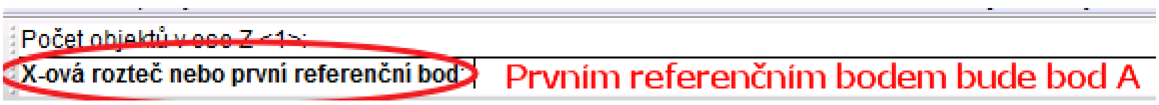
3. Na přímku p vyznačíme body S1, S2, ..., pro které platí |A1|=|AS1|=|S1S2|=…
   Body S1, S2, … jsou okamžité středy otáčení.
   K vynesení bodů použijeme příkaz **Transformace/Pole/Pravoúhlé**

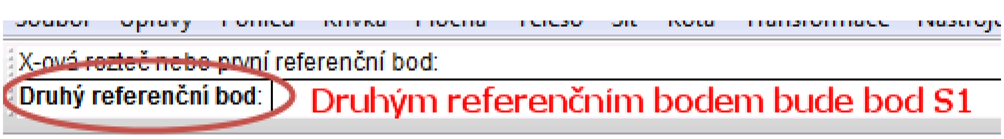


Zadáme 9 objektů ve směru osy x, 1 ve směru osy y a 1 ve směru osy z.

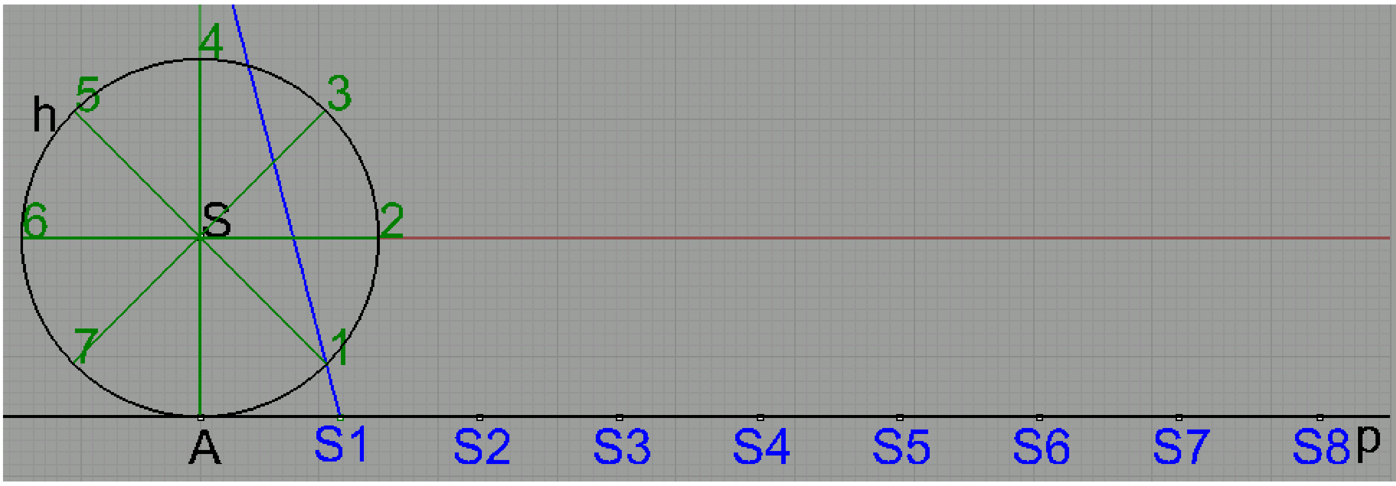


Zadáme vzdálenost, kam má umístit objekty

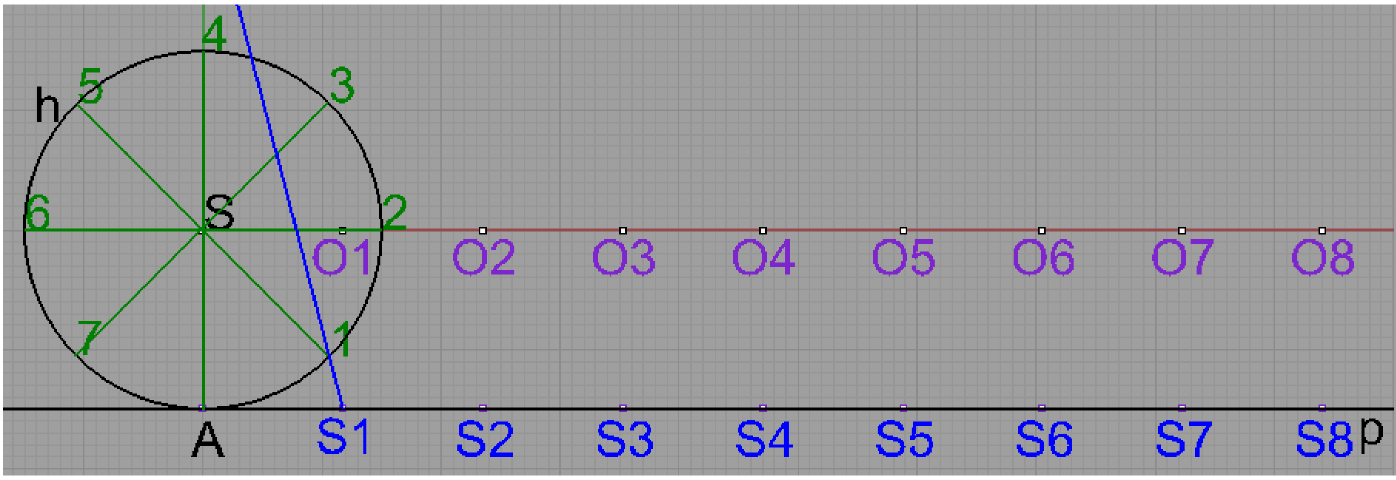




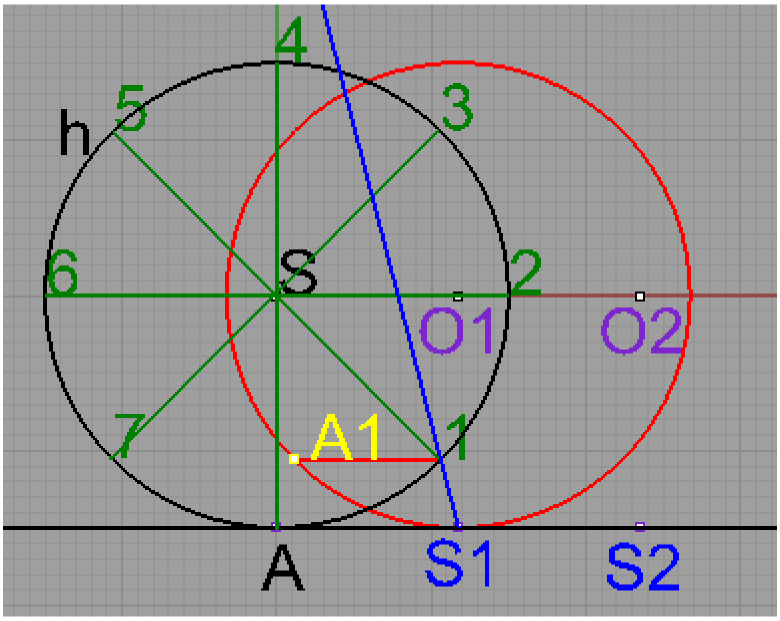
Získané body označíme S2, …, S8.



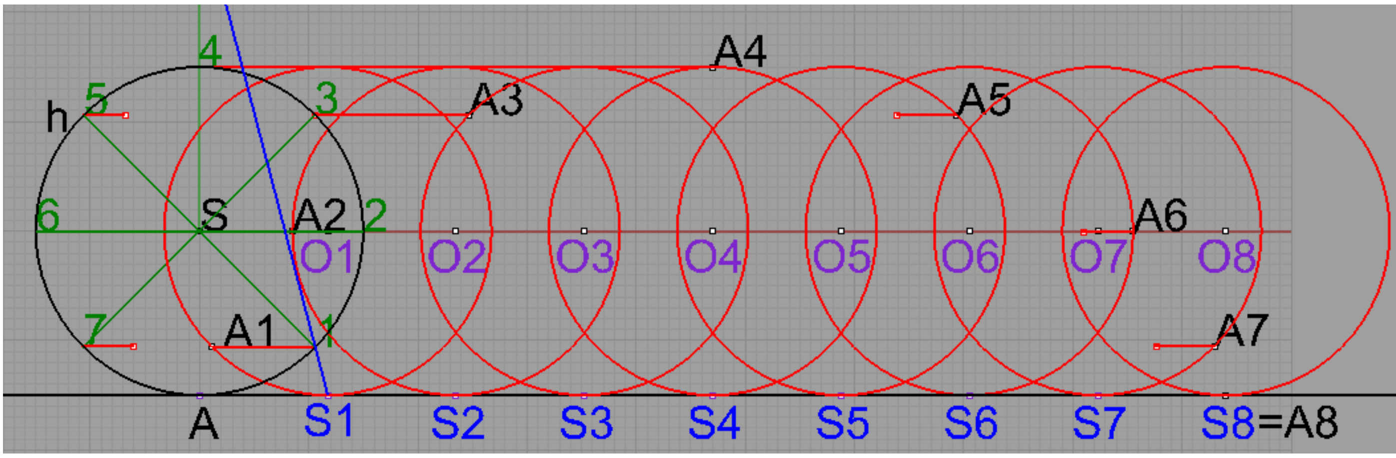
4. Na přímku jdoucí středem S rovnoběžně s pevnou polodií *p* naneseme odpovídající pozice středů O1, …, O8 hybné polodie *h*.



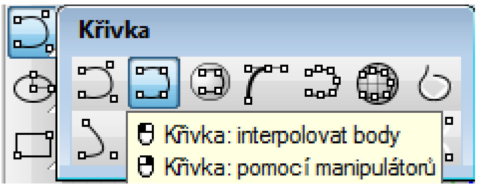
5. Provedeme odvalení kružnice *h* tak, aby se bodem 1 dotkla přímky *p* v bodě S1. Pozici bodu A1 určíme jako průsečík odvalené kružnice a rovnoběžky s přímkou *p* jdoucí bodem 1.

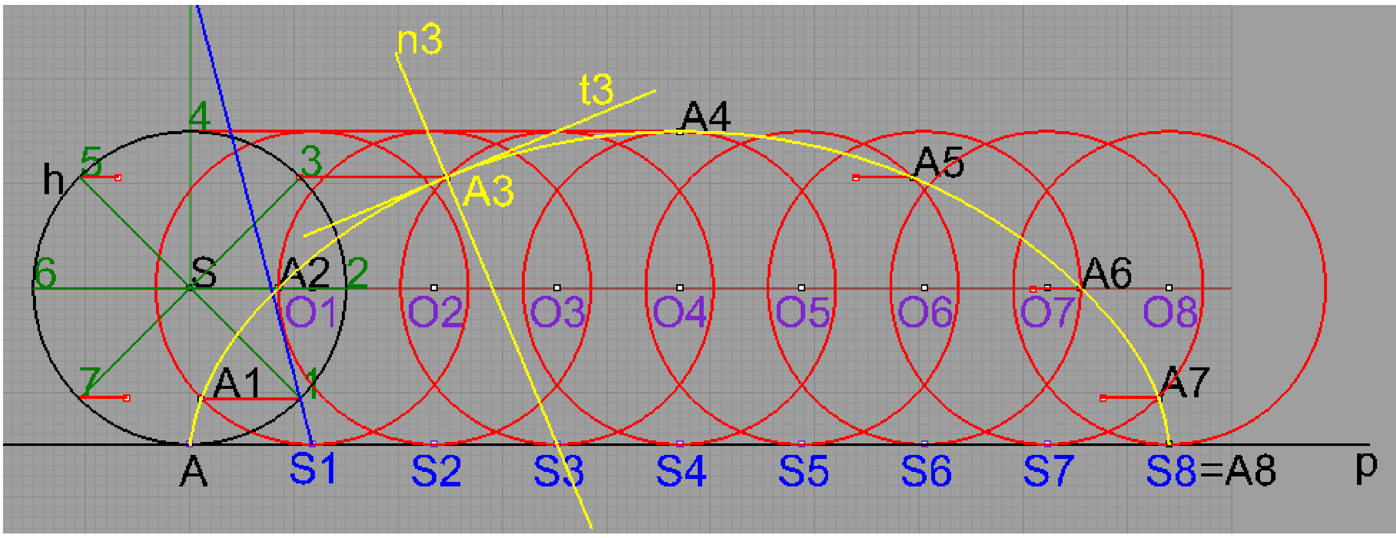


Postupně odvalujeme kružnici *h* do dalších poloh a získáme body A2, …, A8.



6. Dříve, než vytáhneme křivku procházející body A1, .., A8 (tedy hledanou cykloidu), sestrojíme v obecném bodě tečnu k této křivce, která zpřesní průběh funkce v okolí tohoto bodu.
    - Vybereme si obecný bod, např. bod A3.
    - Sestrojíme normálu n3 jako spojnici bodu A3 a okamžitého středu otáčení, tj. bodu S3.
    - Tečna t3 je kolmá na normálu n3
    -
7. Body A, A1, …, A8 proložíme křivkou pomocí

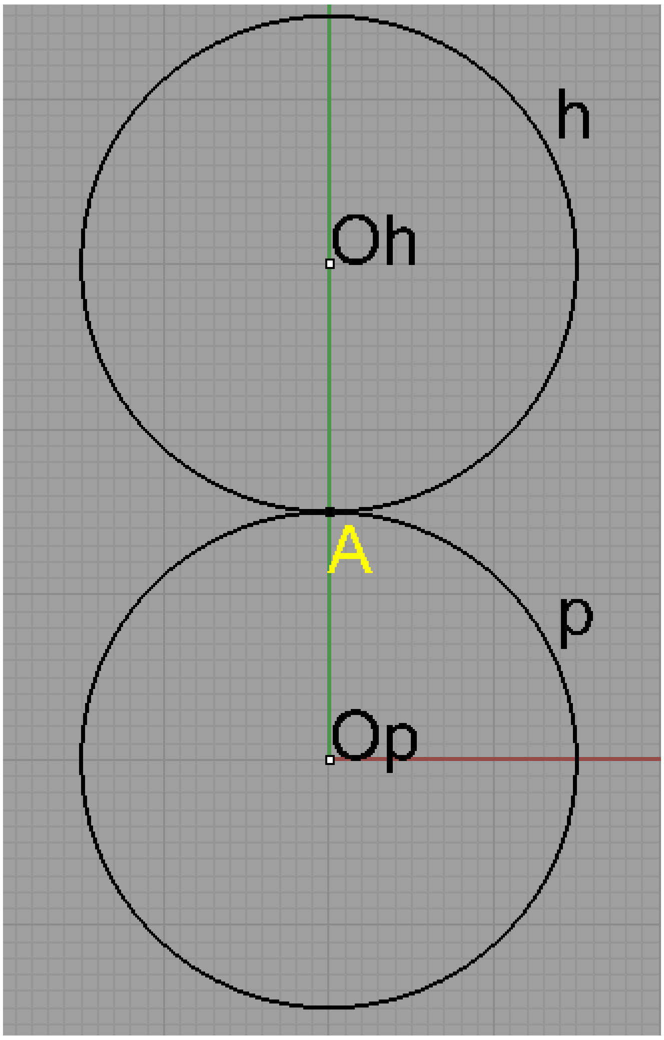




Výsledkem je prostá cykloida

Příklad 3 (str. 122/12): Je dán epicykloidální pohyb hybnou polodií *h* (střed O_h[0,0], poloměr r_h=15) a pevnou polodií $_p$ (střed O_p[0,30], r_p=15). Sestrojte trajektorii bodu A[0,15] a jejím obecném bodě tečnu.

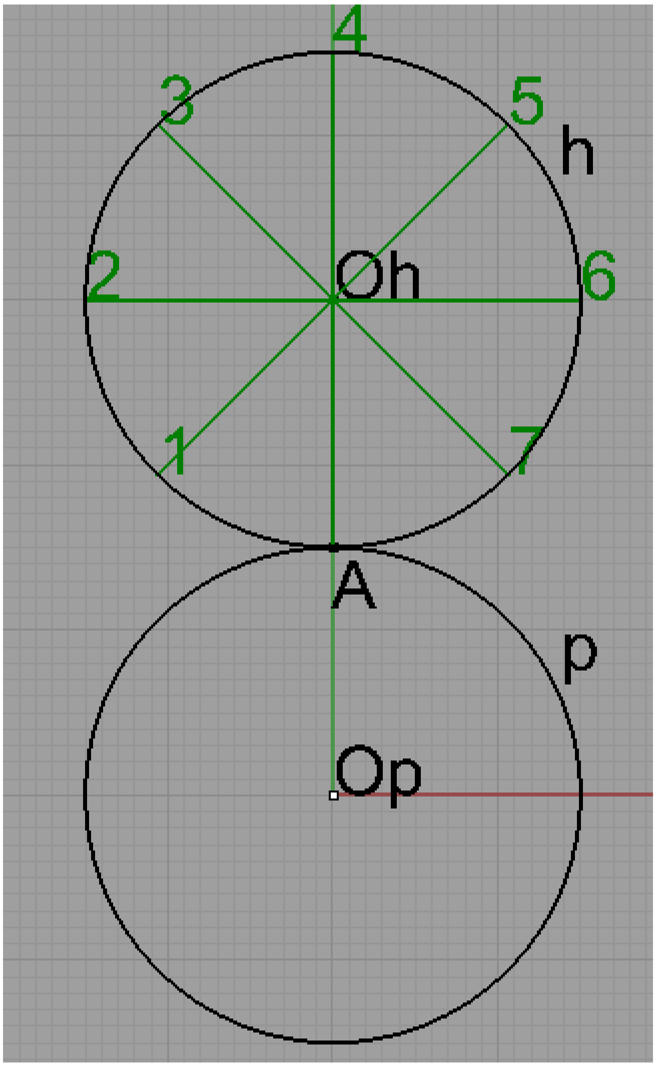
Návod: Zadání vypadá následovně



Sledujeme trajektorii bodu A (ten je pevně spjat s kružnicí *h*) při odvalování kružnice *h* po kružnici *p*.

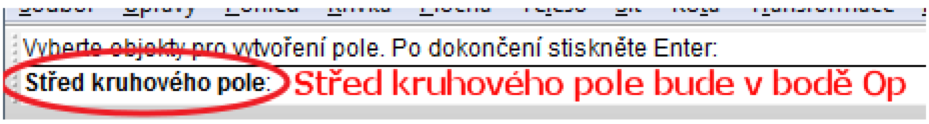
Postup konstrukce:

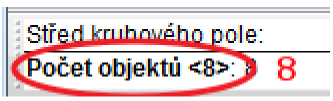
1. Rozdělíme kružnici *h* na 8 (případně i více) dílů a označíme získané body postupně 1, …,7.

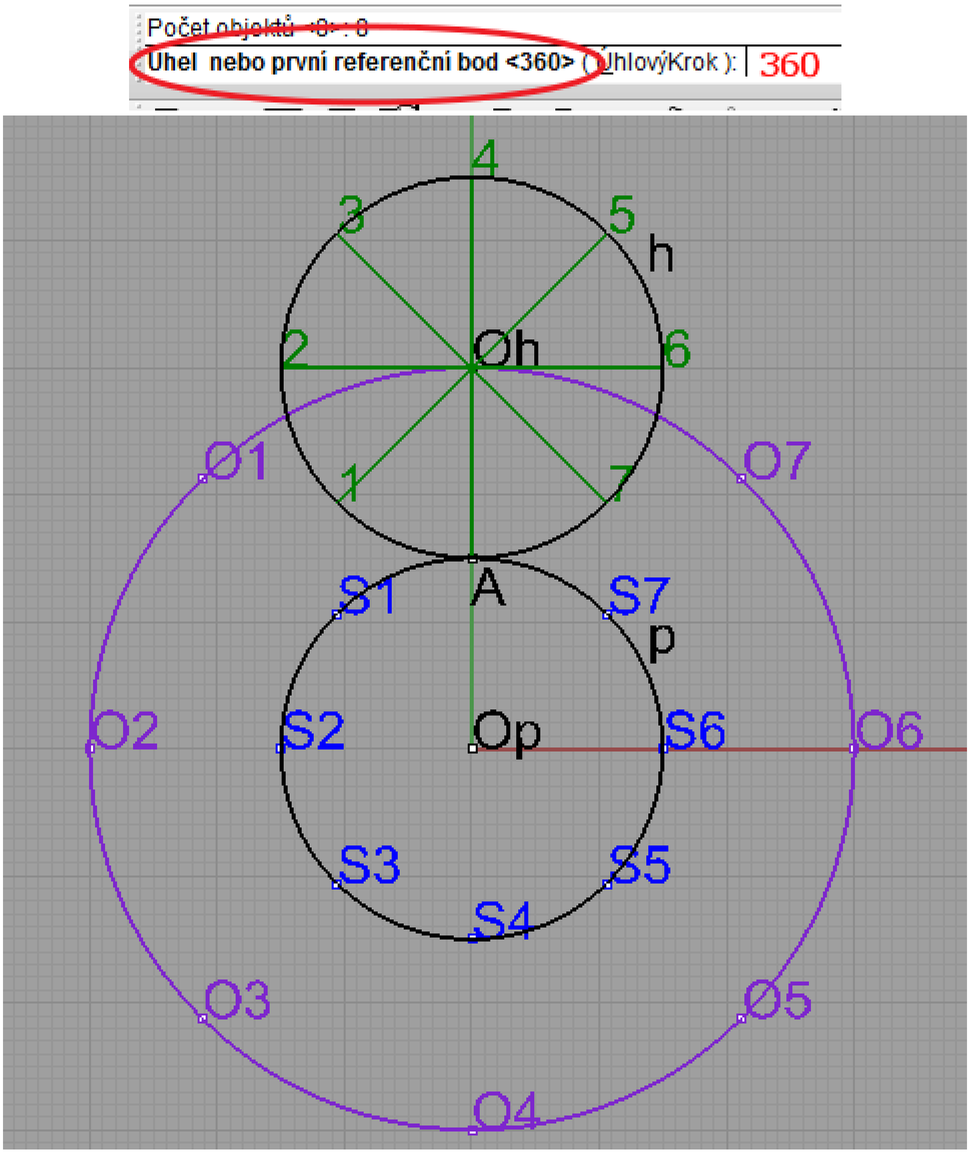


2. Vzhledem k tomu, že pevná i hybná polodie mají stejné poloměry, tak pro získání okamžitých středů otáčení S1, …, S7 stačí rozdělit na stejný počet dílů i pevnou polodii a není potřeba získávat přibližnou délku oblouku rektifikací.

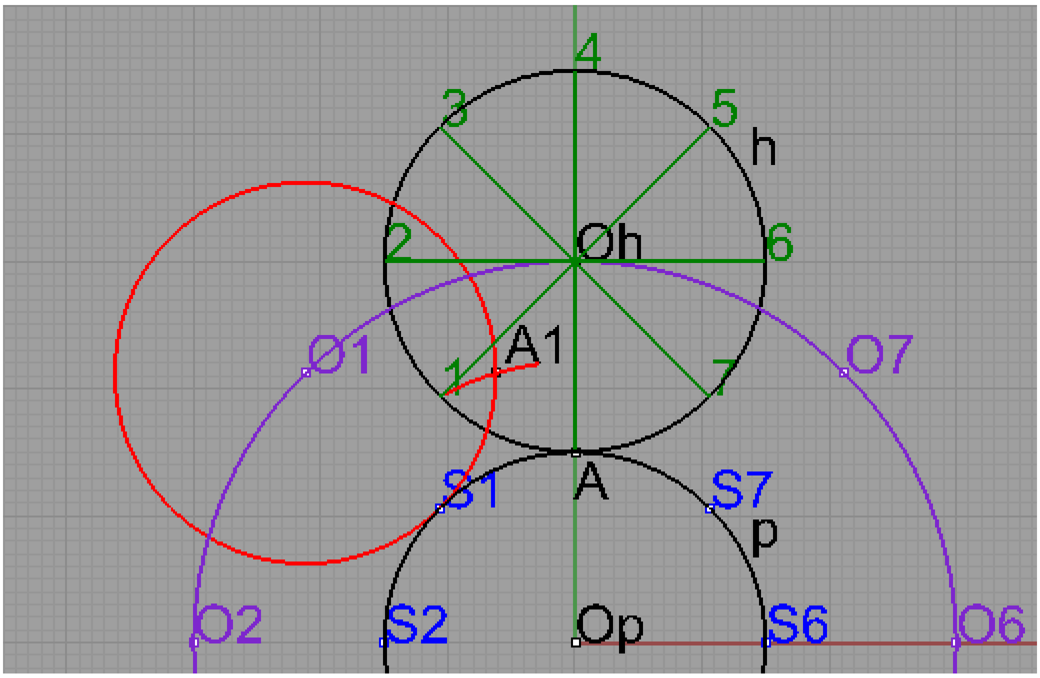
3. Středy O1, …, O7 hybné polodie v jednotlivých pozicích odvalení budou ležet na soustředné kružnici s pevnou polodií a poloměrem 30. Body O1, …O7 na tuto kružnici rozmístíme například pomocí **Transformace/Pole/Kruhové** takto.



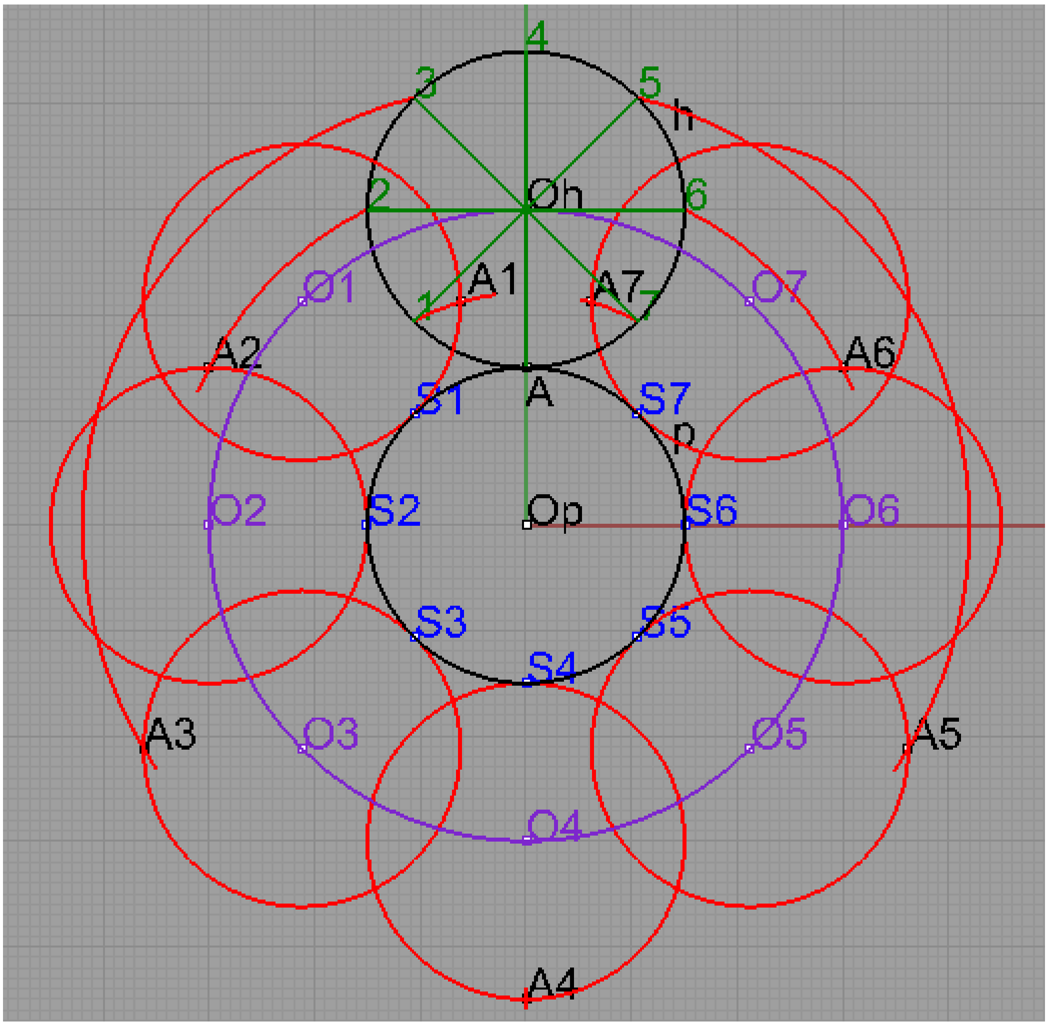




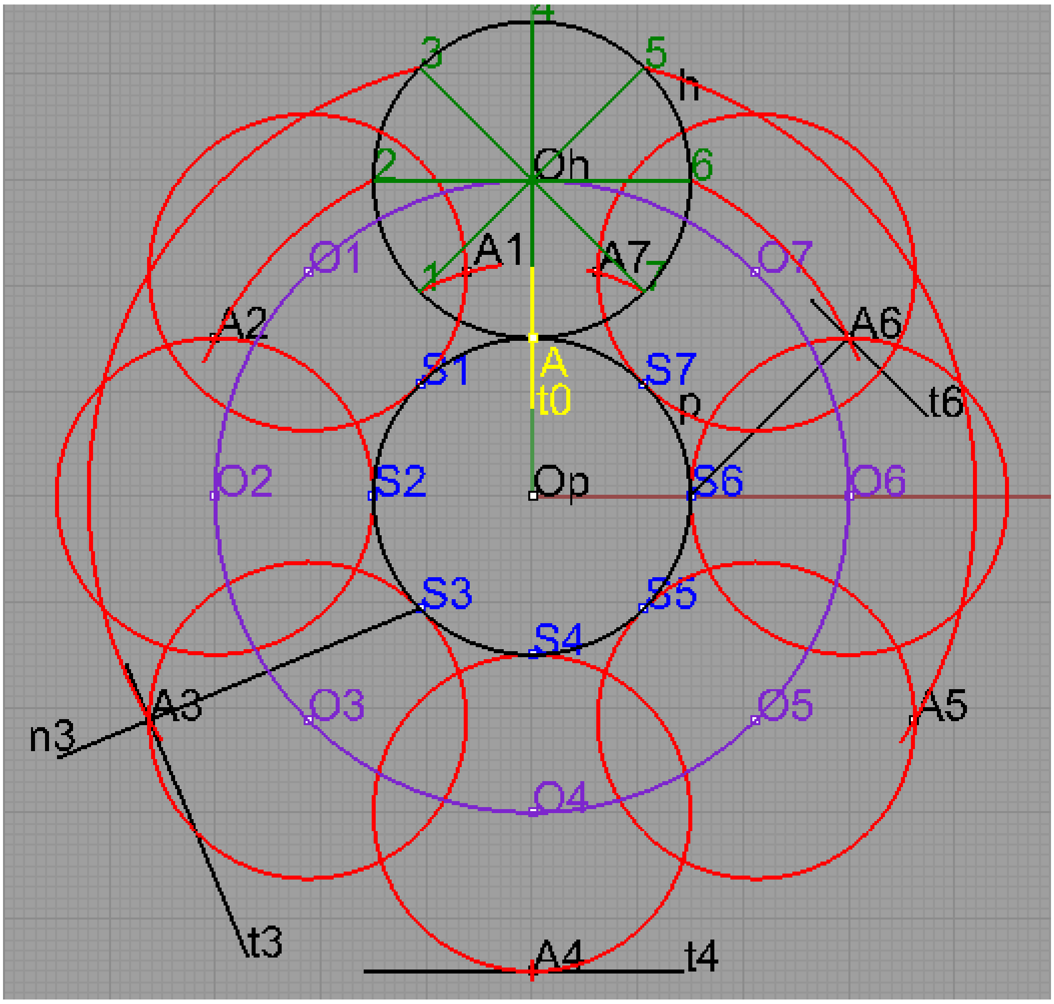
4. Odvalíme hybnou polodii *p* tak, aby se bod 1 dotknul bodu S1 a sledujeme pohyb bodu A, který je s kružnicí *p* pevně spjatý. Získáme bod A1.



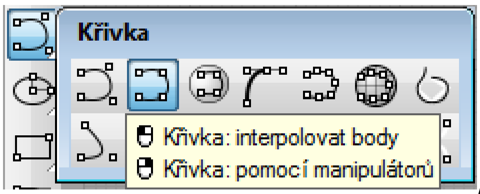
5. Podobně získáme body A2, …, A7.



6. Dříve, než body proložíme křivku (půjde o epicykloidu), sestrojíme v několika obecných bodech tečny. Půjde o kolmice k příslušným normálám, kde normály jsou spojnice okamžitých středů otáčení a bodů, ve kterých je konstruujeme. Velkou roli bude hrát tečna t0 v bodě A, která je na obrázku zvýrazněná.

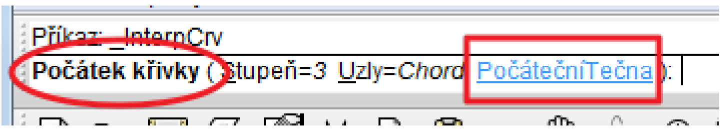


7. Body proložíme křivkou pomocí tohoto příkazu

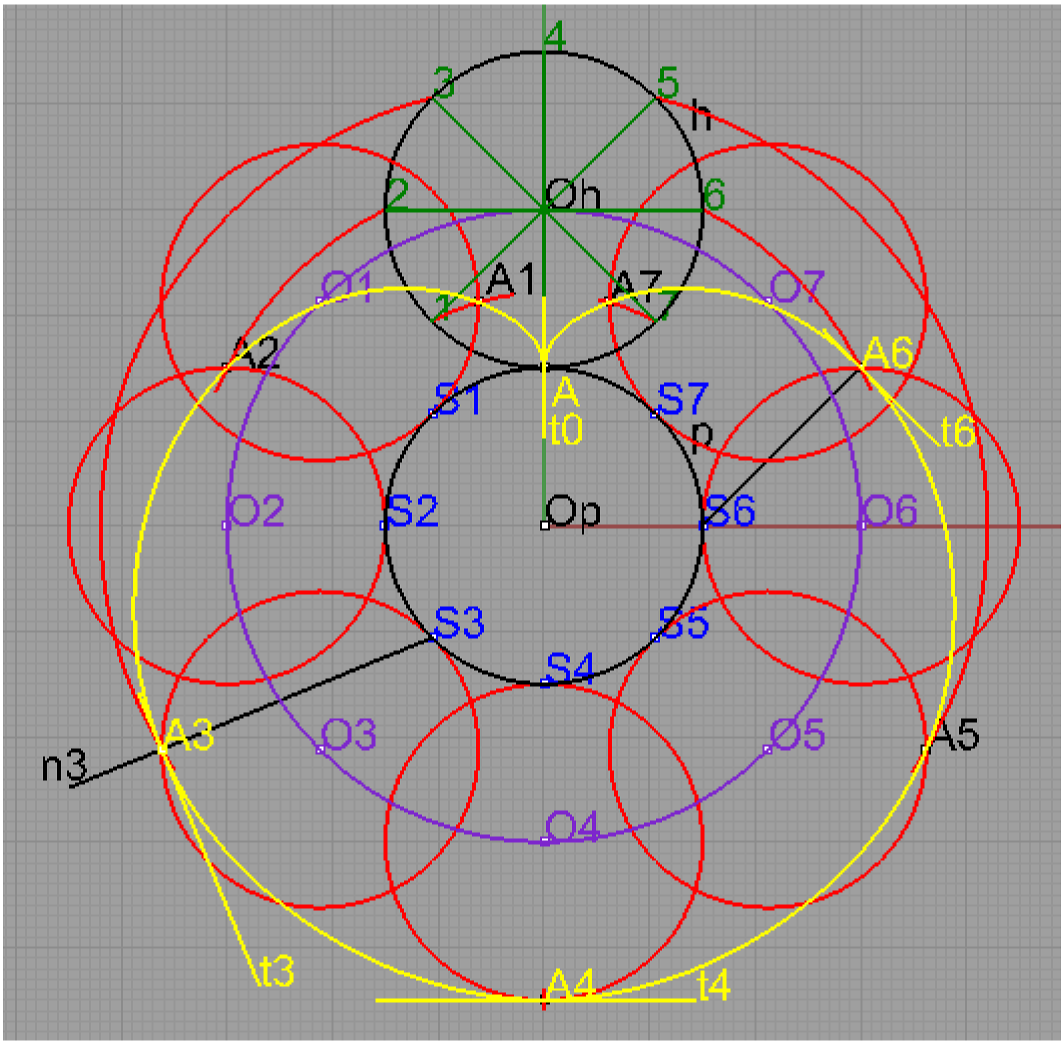


,

kde zvolíme příkazovou volbu **Počáteční tečna** a dál se řídíme pokyny v příkazovém řádku.



Doporučuji nechat vykreslit jen polovinu hledané epicykloidy a před kliknutím na bod A4 zvolit příkazovou volbu **Koncová tečna** (a pak zadat bod A4 a směr tečny).
Pravou část epicykloidy získáme pomocí **Transformace/Zrcadlit**.



Příklad 4 (str. 121/8): Sestrojte úpatnici paraboly *k* (dáno ohnisko F[30,0], vrchol V[15,0]) pro pól P[15,0] V obecném bodě úpatnice sestrojte její tečnu.

Návod: Návod najdete na straně 118.

Kinematika - výpočty

Pojmy:

1. Pohyb bodu v rovině: Podívejme se nejdříve na pohyb objektu, který fyzikové označují jako hmotný bod – tedy objektu zanedbatelných rozměrů. Pohyb probíhá v čase, který lze modelovat reálným číslem $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$. Pro každý časový okamžik musí být k dispozici přímá shodnost, která umožní ze znalosti počáteční polohy $X = (x_1; x_2; 1) \in {}_\infty E^2$ získat aktuální polohu $X' = (x'_1; x'_2; 1) \in {}_\infty E^2$. Pohybem $\mathcal{P}$ tedy bude množina zobrazení

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{33}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \mathbf{X'}^T = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{X}^T \qquad t \in \langle t_1; t_2 \rangle \qquad (1)$$

kde prvky matice $\mathbf{M}(t)$ jsou spojité funkce a pro každé $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$ je $\det \mathbf{M}(t) = 1$. Tuto matici nazýváme maticí pohybu.

Příklad 1: Určete rovnice křivky, po které se bude pohybovat bod A=[20,0], jestliže je pohyb zadán maticí **M**(*t*)= $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Řešení: Zapíšeme projektivní souřadnice bodu A, tedy **A**=(20,0,1), kde jednička na poslední pozici informuje o tom, že jde o bod vlastní.

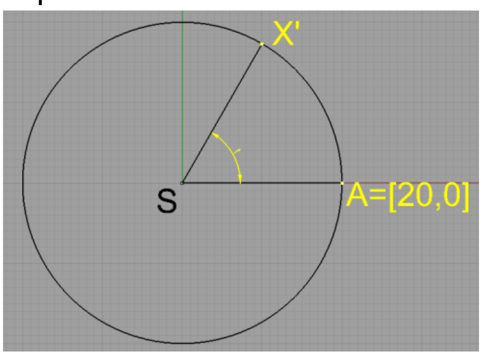
Vypočteme souřadnice bodů **X'**=(x_1', x_2',1), které vzniknou transformací bodu **A** maticí **M**(t).

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cos t \\ 20\sin t \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Když tento maticový zápis převedeme na parametrické rovnice

x_1'=20 cos t
x_2'=20 sin t, kde $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

vidíme, že jde o rovnice kružnice s poloměrem 20.



Příklad 2: Určete rovnice trajektorie bodu A=[0,0], který vykonává pohyb složený ~~z otočení a z posunutí~~. Posunutí je dáno vektorem **v**=(*t/2,0*) a otáčení je dáno středem otáčení v počátku a úhlem *t*, kde *t* je z intervalu <0, 4π>.

Řešení: Zapíšeme projektivní souřadnice bodu A a vektoru **v**.

A=[0,0]=(0,0,1), **v**=(*t/2,0,0*).

Matice posunutí je $$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matice otáčení je $$R=\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

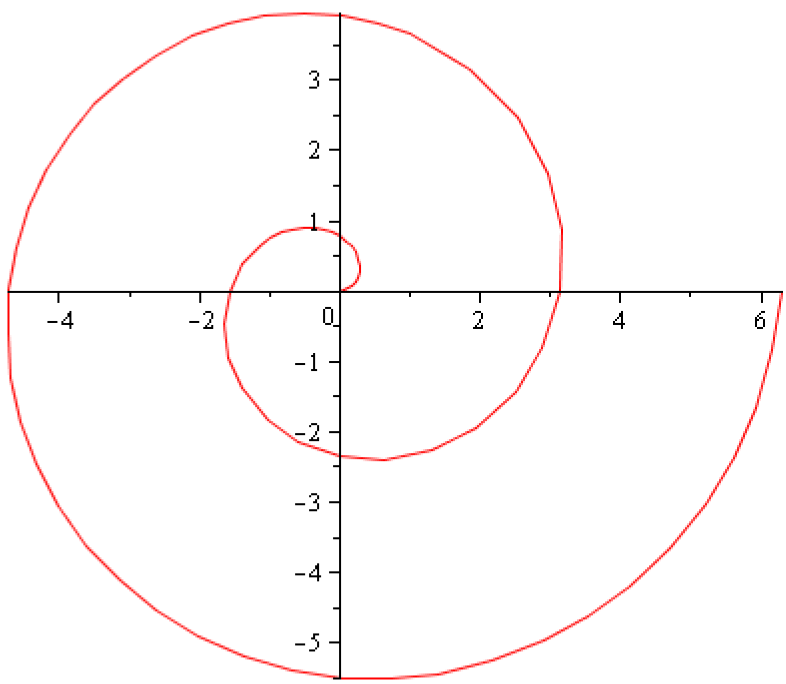
Matice složeného pohybu je **M**=**R**·**T**, tedy $$M=\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & \frac{1}{2}\cos(t)\,t \\ \sin(t) & \cos(t) & \frac{1}{2}\sin(t)\,t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sledujeme-li pohyb bodu A=(0,0,1), pak dostáváme rovnici trajektorie tohoto bodu ve tvaru

$$\mathbf{X}'^{T}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{A}^{T}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(t)\,t & \frac{1}{2}\sin(t)\,t & 1 \end{bmatrix}$$, kde t je z intervalu <0, 4π>.

Přepíšeme-li maticový zápis do parametrických rovnic, získáme

$x_1'=t/2\cdot \cos t$
$x_2'=t/2\cdot \sin t$, kde t je z intervalu <0, 4π>.



Příklad 3: Určete rovnice trajektorie bodu A=[0,0], jehož pohyb je složením rotace okolo počátku o úhel *t*, kde *t* je z intervalu <0, 4π> a pohybu daného maticí T.

Řešení: Zapíšeme projektivní souřadnice bodu A=[0,0]=(0,0,1).

Matice otočení je $R = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matice druhého zadaného pohybu je $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t\cos(t) \\ 0 & 1 & t\sin(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matice složeného pohybu je **M**=**R**·**T**, tedy $M = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & t\cos(t)^2 - \sin(t)^2 t \\ \sin(t) & \cos(t) & 2\sin(t)\, t\cos(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

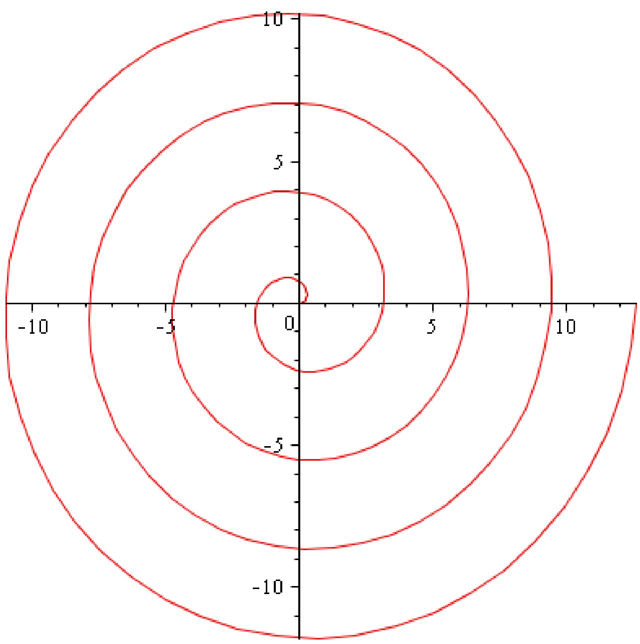
Sledujeme-li pohyb bodu A=(0,0,1), pak dostáváme rovnici trajektorie tohoto bodu ve tvaru

$\mathbf{X}'^{T}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{A}^{T}=$ $\begin{bmatrix} t\cos(t)^2 - \sin(t)^2 t & 2\sin(t)\, t\cos(t) & 1 \end{bmatrix}$, kde *t* je z intervalu <0, 4π>.

Přepíšeme-li maticový zápis do parametrických rovnic, získáme

$x_1' = t\cos t^2 - t\sin t^2$
$x_2' = 2t\sin t\cos t$, kde t je z intervalu <0, 4π>.

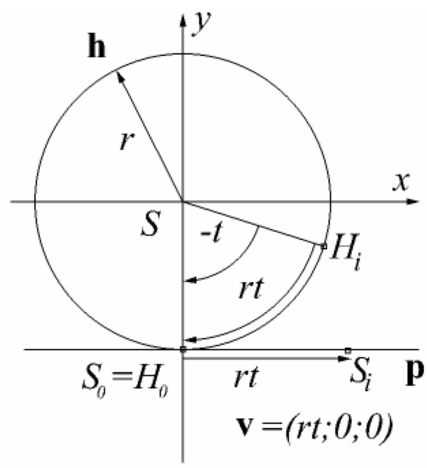
Po vykreslení získáme jasnější představu o této křivce, jde opět o spirálu, která ovšem v daném intervalu má více oblouků, protože v matici T "je ukrytý" nejen posuv, ale i otáčení "navíc".



Příklad 4: Určete rovnice dráhy bodu A, který vykonává pohyb složený z posunutí a rotace tak, že vzniká:

a) prostá cykloida,
b) prodloužená cykloida.

Řešení:



Analytická konstrukce: Hybnou polodii (kružnici) a pevnou polodii (přímku) zvolíme tak, aby složení translace a rotace bylo co nejjednodušší. Tedy

$$\boldsymbol{h} \equiv x^2 + y^2 = r^2 \equiv (r\cos t; r\sin t; 1)$$

$\boldsymbol{p} \equiv y = -r$, bod S v počátku (viz obrázek). Valivý pohyb se skládá z rotace o úhel $-t$ a posunutí o vektor $\mathbf{v} = (rt; 0; 0)$ (neboť délka příslušného oblouku je $r \cdot t$).

Jeho matice je tedy

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{-t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & rt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) & 0 \\ \sin(-t) & \cos(-t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & rt \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ad a) Prostá cykloida:

Spojíme-li tedy s valící se kružnicí bod $A = (0; -a; 1)$, obdržíme jeho dráhu ve tvaru

$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & rt \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a'_1 = -a\sin t + rt \\ a'_2 = -a\cos t \end{array}$$

ad b) Prodloužená cykloida:

Spojíme-li s valící se kružnicí bod, který leží vně kružnice (zvolme např. bod B=(0,-b,1), kde b>r), pak jde o rovnice prodloužené cykloidy.

Na následujícím obrázku je zobrazena prostá cykloida pro a=r=2, prodloužená cykloida pro a=3 a zkrácená pro a=1.