Vektorový počet

30. srpna 2007

- 1. Skalární součin

- 2. Vektorový součin

- 3. Odchylka dvou vektorů

Příklad 1: Spočtěte skalární součin vektorů
$\mathbf{u} = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Příklad 1: Spočtěte skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Řešení: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 2, -2) \cdot (3, 0, 1)$

Lze postupovat jako při násobení matic: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Příklad 1: Spočtěte skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Řešení: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 2, -2) \cdot (3, 0, 1) = -3$

Násobíme prvky na odpovídajících pozicích

Příklad 1: Spočtěte skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Řešení: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 2, -2) \cdot (3, 0, 1) = -3 + 0$

Výsledky násobení mezi sebou sčítáme

Příklad 1: Spočtěte skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Řešení: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 2, -2) \cdot (3, 0, 1) = -3 + 0 + (-2)$

Příklad 1: Spočtěte skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Řešení: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 2, -2) \cdot (3, 0, 1) = -3 + 0 - 2 = -5$

Příklad 2: Spočtěte vektorový součin vektorů
$\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 1)$.

Příklad 2: Spočtěte vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 1)$.

Řešení:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jsou bázové vektory prostoru $\mathbb{R}^3$ o souřadnicích $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

Příklad 2: Spočtěte vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1,2,2)$, $\mathbf{v} = (3,-1,1)$.

Řešení:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k} - (6\mathbf{k} + \mathbf{j} - 2\mathbf{i}) =$$

$$= 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

K výpočtu determinantu jsme použili Sarrusova pravidla.

Příklad 2: Spočtěte vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 1)$.

Řešení:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k} - (6\mathbf{k} + \mathbf{j} - 2\mathbf{i}) =$$

$$4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (4, 5, -7)$$

Pomocí skalárního součinu ověřte, že výsledný vektor je kolmý na oba vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Příklad 3: Určete úhel při vrcholu B v trojúhelníku ABC, kde $A = [0,0]$, $B = [7,1]$, $C = [2,6]$.

Příklad 3: Určete úhel při vrcholu B v trojúhelníku ABC, kde $A = [0, 0]$, $B = [7, 1]$, $C = [2, 6]$.

Řešení: Určíme dva vektory $\mathbf{u} = A - B$, $\mathbf{v} = C - B$ s počátečním bodem B.

$\mathbf{u} = A - B = (-7, -1)$, $\mathbf{v} = C - B = (-5, 5)$.

Příklad 3: Určete úhel při vrcholu B v trojúhelníku ABC, kde $A = [0,0],\ B = [7,1],\ C = [2,6]$.

Řešení: Určíme dva vektory $\mathbf{u} = A - B,\ \mathbf{v} = C - B$ s počátečním bodem B.

$\mathbf{u} = A - B = (-7,-1),\ \mathbf{v} = C - B = (-5,5).$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50},\ |\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50},$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cancel{40}$

K určení odchylky použijeme vzorec $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$, kde v čitateli je skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů.

Příklad 3: Určete úhel při vrcholu B v trojúhelníku ABC, kde $A=[0,0]$, $B=[7,1]$, $C=[2,6]$.

Řešení: Určíme dva vektory $\mathbf{u}=A-B$, $\mathbf{v}=C-B$ s počátečním bodem B.

$\mathbf{u}=A-B=(-7,-1)$, $\mathbf{v}=C-B=(-5,5)$.

$|\mathbf{u}|=\sqrt{(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{50}$, $|\mathbf{v}|=\sqrt{(-5)^2+5^2}=\sqrt{50}$,

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\cancel{40}$

$\cos\varphi=\frac{\cancel{40}}{\sqrt{50}^2}=\frac{\cancel{40}}{50}=\frac{\cancel{4}}{5}$, tedy

$\varphi=\arccos\frac{4}{5}=\cancel{0.643501}\text{ rad}\doteq\cancel{36.87^\circ}$

Odchylka se definuje jako ostrý úhel.