1 Implicitní funkce

Implicitní funkce nejsou funkce ve smyslu definice, že funkce bodu z definičního oboru $\mathscr{D}$ přiřadí právě jednu hodnotu z oboru hodnot $\mathscr{H}$. Přesnější termín je funkce zadaná implicitně. Rovnice $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ totiž určuje množinu $\mathscr{F}$ v prostoru $\mathbb{R}^n$. Tato množina se může skládat z jedné nebo několika tzv. větví, tj. souvislých množin, které jsou grafem nějaké „skutečné“ funkce např. $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Budou nás zajímat body množiny $\mathscr{F}$, v okolí kterých je množina $\mathscr{F}$ grafem nějaké větve. Protože těchto bodů je většinou nekonečně mnoho, spíše se budeme zajímat o body $\mathscr{F}$, v okolí kterých množina $\mathscr{F}$ není grafem žádné funkce. Ke zjištění „průběhu“ množiny $\mathscr{F}$ pomůže také zjištění bodů, kde funkce-větev má derivaci nulovou, a dále, jak je v tomto bodě funkce „prohnutá“, zda je konvexní nebo konkávní.

1.1 Implicitní funkce v rovině

Rovnice $F(x,y) = 0$ určuje množinu

$$\mathscr{F} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}. \tag{1}$$

Tato množina nemusí být jenom křivkou jako v případě $F(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ je to kružnice, ale také kusem plochy, např. pro $F(x,y) \equiv \sqrt{x^2y^2} - xy = 0$ množina $\mathscr{F}$ je celý první a třetí kvadrant včetně souřadných os x a y, nebo jeden bod $[0,0]$ pro $F(x,y) \equiv x^2 + y^2 = 0$, nebo pro $F(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 1 = 0$ množina prázdná.

Definice 1.1 Funkci $y = \varphi(x)$ na intervalu $I = (\alpha, \beta)$ nazveme větví implicitní funkce $F(x,y) = 0$, jestliže funkce $\varphi(x)$ je spojitá na I a platí

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in I. \tag{2}$$

Navíc se často předpokládá, že v okolí U každého bodu grafu $(x, f(x))$, $x \in I$ nejsou jiné body množiny $\mathscr{F}$, tj. pro každé $x \in I$ existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že $\mathscr{F} \cap (x - \delta, x + \delta) \times (f(x) - \Delta, f(x) + \Delta) = \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$.

Otázku, kterými body prochází větev implicitní funkce řeší následující věta.

Věta 1.2 *Nechť funkce $F(x,y)$ je spojitá a má spojité parciální derivace v oblasti Ω, množina $\mathscr{F}$ je neprázdná a bod $[x_0, y_0] \in \mathscr{F}$. Jestliže*

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0, \tag{3}$$

potom bodem prochází větev implicitní funkce, tj. existuje $\delta > 0$ a spojitá funkce $f(x)$ definovaná na okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ taková, že

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Co se děje v bodech, kde $F'_y(x_0, y_0) = 0$? Pokud současně $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, křivka v tomto bodě má tečnu $x = x_0$, tj. rovnoběžnou s osou y. Jestliže také $F'_x(x_0, y_0) = 0$, tj. obě parciální derivace jsou nulové, nelze rozhodnout: v tomto bodě se mohou křížit dvě větve, může to být izolovaný bod, bodem může také procházet větev, například bodem $[0,0]$ implicitní funkce $F(x,y) \equiv x^3 - y^3 = 0$ prochází větev $y = x$.

Derivace větve $y = f(x)$ implicitní funkce $F(x, y) = 0$

Podmínka (3) plyne z definiční rovnosti $F(x, f(x)) = 0$. Tuto rovnost derivujme podle proměnné x. Protože F závisí na x také prostřednictvím druhé proměnné y složené s $f(x)$ dostáváme rovnost:

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0. \tag{4}$$

Pokud derivace $F'_y(x, f(x))$ není nulová, z poslední rovnosti lze vyjádřit derivaci

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \ . \tag{5}$$

Odsud je také vidět smysl podmínky (3): pokud F'_y je nenulová v bodě $[x_0, f(x_0)]$, díky spojitosti je nenulová i v okolí tohoto bodu a lze jí vydělit ve vzorci (5).

Dalším derivováním rovnosti (4) podle x, v druhém členu derivujeme součin dvou funkcí, dostáváme

$$F''_{xx} + F''_{xy} \cdot f' + \left(F''_{yx} + F''_{yy} \cdot f'\right) f' + F'_y \cdot f'' = 0,$$

kde pro přehlednost jsme vynechali argument $(x, f(x))$ u derivací funkce F a argument (x) u derivací funkce f. Úpravou dostáváme rovnost

$$F''_{xx} + 2\, F''_{xy} \cdot f' + F''_{yy} \cdot (f')^2 + F'_y \cdot f'' = 0, \tag{6}$$

z které lze vyjádřit vztah pro druhou derivaci

$$f'' = -\frac{F''_{xx} + 2\, F''_{xy} \cdot f' + F''_{yy} \cdot (f')^2}{F'_y} \tag{7}$$

a dále dosazením za f' z (5)

$$f'' = -\frac{F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 + 2\, F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot (F'_x)^2}{(F'_y)^3} \ . \tag{8}$$

Dalším derivováním rovnosti (6) podle x po úpravě dostaneme

$$F'''_{xxx} + 3\, F'''_{xxy} \cdot f' + 3\, F'''_{xyy} \cdot (f')^2 + F'''_{yyy}(f')^3 + 2\, F''_{xy} \cdot f'' + 2\, F''_{yy} \cdot f' \cdot f'' + F'_y \cdot f''' = 0,$$

z které už lze snadno vyjádřit třetí derivaci f'''

$$f''' = -\frac{F'''_{xxx} + 3\, F'''_{xxy} \cdot f' + 3\, F'''_{xyy} \cdot (f')^2 + F'''_{yyy}(f')^3 + 2\, F''_{xy} \cdot f'' + 2\, F''_{yy} \cdot f' \cdot f''}{F'_y}$$

Derivace větve $x = g(y)$ implicitní funkce $F(x, y) = 0$

Záměnou proměnných můžeme studovat větve $x = g(y)$ s nezávislou proměnnou y na ose y. Podmínka $F'_x(x, y) \neq 0$ a $F(x, y) = 0$ zaručí, že bodem $[x, y]$ prochází větev $x = g(y)$. Tato větev je spojitá funkce splňující $F(g(y), y) = 0$. Derivováním této rovnice dostáváme

$$F'_x(g(y), y) \cdot g'(y) + F'_y(g(y), y) = 0, \tag{9}$$

odkud lze za podmínky $F'_x \neq 0$ spočítat derivaci větve $x = g(y)$:

$$g' = -\frac{F'_y}{F'_x}. \tag{10}$$

Dalším derivováním (9) dostáváme rovnost, z které lze vyjádřit druhou derivaci

$$g'' = -\frac{F''_{xx} \cdot (g')^2 + 2\, F''_{xy} \cdot g' + F''_{yy}}{F'_x} \tag{11}$$

Standardní postup při vyšetřování implicitní funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjistíme několik druhů bodů množiny $\mathscr{F}$:
(a) body, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x
(b) body, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou y.
(c) případně další výjimečné body.

Předpokládáme, že funkce $F(x, y)$ má spojité parciální derivace. Body, ve kterých parciální derivace neexistují, je nutné vyšetřit zvlášť.

Spočítáme parciální derivace F'_x, F''_{xx}, F'_y a F''_{yy}.

(a) Řešením soustavy rovnic

$$F'_x(x, y) = 0\,, \qquad F(x, y) = 0 \tag{12}$$

dostaneme body $[x_i, y_i]$. Pokud parciální derivace $F'_y(x_i, y_i) \neq 0$, množina $\mathscr{F}$ má v bodě tečnu rovnoběžnou s osou x. V těchto bodech díky $f'(x) = 0$ se vzorec (7) zjednoduší na tvar

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{13}$$

Znaménko f'' v bodě $[x_i, y_i]$ proto určí, jak je křivka prohnutá, pokud je kladná, větev v tomto bodě je konvexní a pokud je záporná, větev je konkávní. Pokud je druhá derivace f'' nulová, nutno spočítat třetí derivaci f'''.

(b) Řešením soustavy rovnic

$$F'_x(x, y) = 0\,, \qquad F(x, y) = 0 \tag{14}$$

dostaneme body $[x_i, y_i]$, kterými podle Věty 1.2 neprochází žádná větev. Pokud současně $F'_x(x_i, y_i) \neq 0$, množina $\mathscr{F}$ má v tomto bodě tečnu rovnoběžnou s osou y. Analogicky předchozímu případu výraz

$$g''(y) = -\frac{F''_{yy}(x, y)}{F'_x(x, y)} \tag{15}$$

dává druhou derivaci větve $x = g(y)$ a určuje tak prohnutí křivky $\mathscr{F}$ v tomto bodě: pokud je hodnota kladná, křivka je prohnutá vpravo, pokud je záporná, křivka je prohnutá vlevo.

(c) V bodech $\mathscr{F}$, kde jsou obě parciálních derivace nulové (pokud existují), tj.

$$F'_x(x, y) = 0\,, \qquad F'_y(x, y) = 0 \ \text{ a } \ F(x, y) = 0 \tag{16}$$

se může dít cokoliv: mohou se tam větve křížit, může to být izolovaný bod, může to být i bod větve. V těchto bodech nutno využít vyšší derivace a chování derivací v okolí těchto bodů, což je už mimo rámec tohoto textu.

Spočítané body s tečnami a „prohnutím“ zakreslíme do grafu. Potom často už tyto body lze „spojit“ a množinu $\mathscr{F}$ načrtnout. Využijeme přitom skutečnosti, že mimo tyto body křivka nemůže mít tečnu rovnoběžnou s osou x ani s osou y. Důležitým poznatkem je také skutečnost, zda množina $\mathscr{F}$ je nebo není omezená. V případě neomezené množiny $\mathscr{F}$ pomůže také výpočet asymptoty.

Příklady

V následujících příkladech určíme postupně body předchozích typů (a), (b) a případně (c), zakreslíme je do grafu a načrtneme množinu.

Příklad 1.3 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Řešení: Funkce $F(x,y)$ má všechny parciální derivace spojité. Spočítáme první parciální derivace

$$F'_x(x,y) = 2x\,, \quad F'_y(x,y) = 18y\,, \quad F''_{xx} = 2\,, \quad F''_{yy} = 18\,.$$

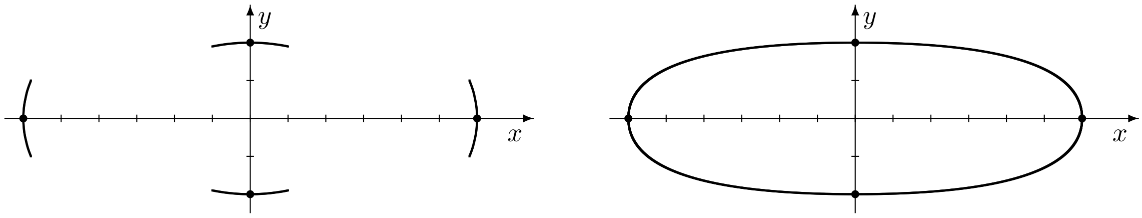
(a) Řešíme rovnice (12). Z $2x = 0$ plyne $x = 0$ a tudíž $9y^2 = 36$, odkud $y = \pm 2$, tedy body $[0,2]$ a $[0,-2]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x. Dosazením do (13) vychází $f''(x) = -2/18y$, v bodě $[0,2]$ je křivka konkávní a v $[0,-2]$ konvexní.

(b) Řešíme rovnice (14). Z $18y = 0$ plyne $y = 0$ a $x^2 = 36$ dává $x = \pm 6$, tedy body $[6,0]$ a $[-6,0]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou y. Dosazením do (15) vychází $g''(y) = -18/2x$, v bodě $[-6,0]$ je křivka prohnutá vpravo a v $[6,0]$ vlevo.

Body typu (c) zde nejsou. Z rovnice $F(x,y) = 0$ plyne, že množina $\mathscr{F}$ je omezená:

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + 9y^2 = 36 \qquad \Longrightarrow \qquad |[x,y]| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 6.$$

Vykreslíme-li tyto hodnoty do grafu, snadno je spojíme do elipsy:



Příklad 1.4 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv x^2 + xy + y^2 + x - y - 11 = 0$.

Řešení: Spočítáme parciální derivace

$$F'_x(x,y) = 2x + y + 1\,, \quad F'_y(x,y) = x + 2y - 1\,, \quad F''_{xx} = 2\,, \quad F''_{yy} = 2\,.$$

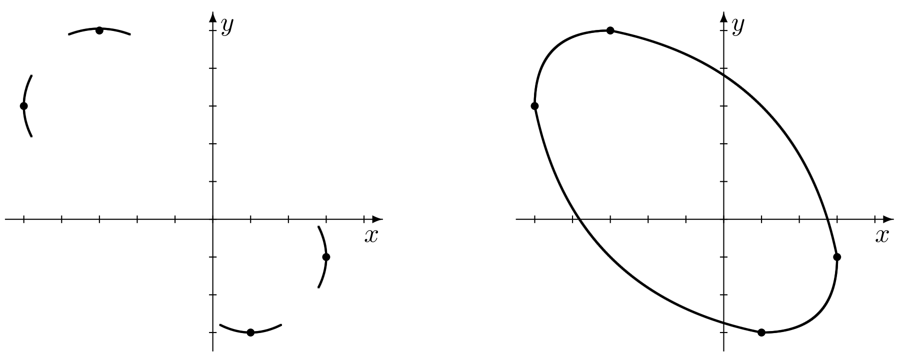
(a) Řešíme rovnice (12). Z $2x + y + 1 = 0$ plyne $y = -2x - 1$. Dosazením do $F(x,y) = 0$ dostáváme $3x^2 + 6x - 9 = 0$, odkud máme $x = -1 \pm 2$. Dopočítáním souřadnice y dostáváme dva body $[-3,5]$ a $[1,-3]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x. Dosazením do (13) vychází $f''(x) = -2/(x + 2y - 1)$. V bodě $[-3,5]$ je tedy křivka konkávní a v $[1,-3]$ konvexní.

(b) Řešíme rovnice (14). Z $x + 2y - 1 = 0$ plyne $x = 1 - 2y$. Dosazením do $F(x,y) = 0$ dostáváme rovnici $3y^2 - 6y - 9 = 0$ s kořeny $y = 1 \pm 2$. Dopočítáním x-souřadnic dostáváme body $[-5,3]$ a $[3,-1]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou y. Dosazením do (15) vychází $g''(y) = -2/(2x + y + 1)$, v bodě $[-5,3]$ je křivka prohnutá vpravo a v $[3,-1]$ vlevo.

Body typu (c) zde nejsou. Z rovnice $F(x,y) = 0$ plyne, že množina $\mathscr{F}$ je omezená:

$$\frac{1}{2}\left[(x+1)^2 + (y-1)^2\right] \leq \frac{1}{2}\left[(x+1)^2 + (x+y)^2 + (y-1)^2\right] = 11.$$

Vykreslíme-li tyto hodnoty do grafu, snadno je spojíme do elipsy:



PŘÍKLAD 1.5 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv x^2 - 3xy + 2y^2 + 1 = 0$.

Řešení: Spočítáme parciální derivace

$$F'_x(x,y) = 2x - 3y\,, \quad F'_y(x,y) = -3x + 4y\,, \quad F''_{xx} = 2\,, \quad F''_{yy} = 4\,.$$

Dál už počítejte sami. V tomto případě je množina $\mathscr{F}$ neomezená, je to hyperbola.

PŘÍKLAD 1.6 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$.

PŘÍKLAD 1.7 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = 0$.

PŘÍKLAD 1.8 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 = 0$.

PŘÍKLAD 1.9 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + .5 = 0$.

PŘÍKLAD 1.10 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x,y) \equiv x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 1 = 0$.

1.2 Dvojrozměrné implicitní funkce v prostoru - plochy

Rovnice $F(x,y,z) = 0$ opět určuje množinu v $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{F} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}. \tag{17}$$

Opět předpokládáme, že tato množina je neprázdná a funkce $F(x,y,z)$ je diferencovatelná. Potom můžeme definovat větev funkce jako část množiny $\mathscr{F}$, která je grafem nějaké spojité funkce $f(x,y)$:

DEFINICE 1.11 *Funkci* $z = f(y,z)$ *na oblasti* $U \subset \mathbb{R}^2$ *nazveme větví implicitní funkce* $F(x,y,z) = 0$, *jestliže* f *je spojitá na* U *a platí*

$$F(x,y,f(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in U. \tag{18}$$

Ne každým bodem (x_0,y_0,z_0) implicitní funkce $\mathscr{F}$ však prochází nějaká větev.

VĚTA 1.12 *Nechť* $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{F}$ *a funkce* F *má spojité derivace v okolí* $[x_0,y_0,z_0]$. *Jestliže* $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, *potom bodem* (x_0,y_0,z_0) *prochází větev* $z = f(x,y)$.

Body (pokud existují), kterými neprochází větev, tvoří obvykle jednorozměrnou množinu, tj. křivku. Podobně jako v rovinném případě spočítáme derivace větve. Derivováním rovnosti (18) podle x a podle y dostáváme rovnice

$$F'_x + F'_z f'_x = 0, \qquad F'_y + F'_z f'_y = 0 \tag{19}$$

odkud v případě $F'_z \neq 0$ lze vyjádřit parciální derivace větve

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\,, \qquad f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\,. \tag{20}$$

Vyhledáme stacionární body větve, tj. body, ve kterých je gradient $\nabla\varphi = (0,0)$ a tečná rovina je kolmá na osu z. Tyto body jsou řešením soustavy rovnic

$$F'_x(x,y,z) = 0, \qquad F'_y(x,y,z) = 0, \qquad F(x,y,z) = 0. \tag{21}$$

V těchto bodech lze také určit „prohnutí“ plochy pomocí druhých parciálních derivací větve $f(x,y)$. Dalšími derivováním rovnic (19) dostáváme rovnice, z nichž lze odvodit vzorce pro druhé parciální derivace větve $f(x,y)$. Ve stacionárních bodech díky $F'_x = 0$ a $F'_y = 0$ jsou se vzorce zjednoduší na

$$f''_{xx} = -\frac{F''_{xx}}{F'_z}, \qquad f''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z}, \qquad f''_{yy} = -\frac{F''_{yy}}{F'_z}, \tag{22}$$

odkud lze určit, zda je zde minimu, maximum nebo sedlový bod.

Podobně lze vyšetřovat stacionární body a „prohnutí“ větve typu $y = g(x,z)$ definované rovnicí $F(x, g(x,z), z) = 0$ a také větve typu $x = h(y,z)$ definované rovnicí $F(h(y,z), y, z) = 0$.

Příklad 1.13 Vyšetřete větve $z = \varphi(x,y)$ implicitní funkce

$$F(x,y,z) \equiv \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Řešení: Implicitní funkce je elipsoid se středem v počátku a poloosami délky 3, 2 a 1. Podmínka $F'_z = 0$ dává $z = 0$ odkud po dosazení do $F(x,y,z) = 0$ vidíme, že body, kterými neprochází větev $z = f(x,y)$, tvoří elipsu $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ a $z = 0$. Dalším výpočtem zjistíme, že stacionárními body větve je bod $[0,0,1]$, kde je maximum a bod $[0,0,-1]$, kde je minimum. Analogicky můžeme zjistit stacionární body větví $y = g(x,z)$ a $x = h(y,z)$.

1.3 Jednorozměrné implicitní funkce v prostoru - křivky

V tomto případě implicitní funkce $\mathscr{F}$ je určena dvěmi rovnicemi:

$$F(x,y,z) = 0\,, \qquad G(x,y,z) = 0. \tag{23}$$

Větev v tomto případě definujeme jako spojitou vektorovou funkce se souřadnicemi $y = f(x), z = g(x)$ pro $x \in (a,b)$ splňující

$$F(x, f(x), g(x)) = 0\,, \qquad G(x, f(x), g(x)) = 0. \tag{24}$$

Derivováním těchto rovností podle x dostáváme rovnice

$$F'_x + F'_y f' + F'_z g' = 0 \qquad G'_x + G'_y f' + G'_z g' = 0, \tag{25}$$

které představují soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé f', g'. Pokud matice soustavy

$$\begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} \tag{26}$$

je regulární, soustava má řešení, které lze pomocí inverzní matice vyjádřit ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix}. \tag{27}$$

V tomto případě platí tvrzení:

Věta 1.14 *Nechť funkce F, G mají spojité parciální derivace a v bodě $[x_0, y_0, z_0] \in \mathscr{F}$ je matice (26) je regulární. Potom tímto bodem prochází větev typu $y = f(x), z = g(x)$. Její derivace je dána vztahem (27).*

Analogicky lze definovat větve typu $x = h(y), z = k(y)$ a také typu $x = p(z)$, $y = q(z)$. Podmínkou existence větve procházející daným bodem $[x_0, y_0, z_0]$ je regulárnost příslušné matice parciálních derivací v tomto bodě.