Plošný integrál

Jednoduchý integrál jsme rozšířili zavedením křivkového integrálu. Rozlišovali jsme dva druhy integrálu, přičemž křivkový integrál 2. druhu závisel na orientaci křivky. Podobně rozšíříme dvojný integrál plošným integrálem a také zde bude plošný integrál 2. druhu záviset na orientaci plochy.

Uvažujme plochu $\mathscr{S}$ danou explicitně rovnicí $z = f(x, y)$ nebo parametricky.

1. Definice Plochu $\mathscr{S}$ danou explicitně rovnicí $z = f(x, y)$ nazveme **hladkou plochou** jestliže pro všechny body $[x, y] \in \mathscr{S}_{xy}$ platí, že funkce $f(x, y)$ je spojitá i se svými parciálními derivacemi na $\mathscr{S}_{xy}$. (Volně řečeno - v každém bodě dokážeme sestrojit tečnou rovinu.)

V některých případech bývá praktičtější pracovat raději s parametrickým vyjádřením plochy $\mathscr{S}$ a vzhledem k potřebám plošného integrálu dokonce s hladkým parametrickým vyjádřením.

2. Definice Řekneme, že plocha $\mathscr{S}$ má **hladké parametrické vyjádření**

$$x = X(u, v), y = Y(u, v), z = Z(u, v), [u, v] \in M, \tag{1}$$

jestliže jsou funkce $X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)$ spojité i se svými prvními parciálními derivacemi X_u, X_v, Y_u, Y_v, Z_u, Z_v v M, kde množina M je uzavřená a ohraničená jednoduše souvislá (tzn. „bez děr“) dvojrozměrná oblast a platí

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} \neq (0, 0, 0).$$

3. Pojmy **Jednoduchou hladkou plochou** rozumíme plochu, která sama sebe neprotíná.

Jednoduchou po částech hladkou plochou rozumíme plochu, která je sjednocením konečného počtu hladkých ploch.

Normálou plochy rozumíme přímku kolmou k tečné rovině plochy v bodě dotyku T.

4. Poznámka V případě explicitního vyjádření (tj. $z = f(x, y)$) hladké plochy $\mathscr{S}$ je normála

$$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1). \tag{2}$$

U hladkého parametrického vyjádření je

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix}, \tag{3}$$

kde vektory $\vec{t_u} = (X_u, Y_u, Z_u)$ a $\vec{t_v} = (X_v, Y_v, Z_v)$ jsou tečnými vektory k ploše $\mathscr{S}$.

5. Poznámka Rozlišujeme plochy jednostranné (např. Mőbiův list) a dvoustranné. U dvoustranných můžeme zadat orientaci. Ta se zadává buď slovy (např. normála plochy svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel), nebo se zakreslí do obrázku, nebo se specifikuje jinak, třeba pojmem vnější normála. Zadaná orientace bude buď v souladu nebo v nesouladu s explicitním nebo parametrickým vyjádřením plochy, což bude mít vliv na znaménko $\pm$ u plošného integrálu 2. druhu.

Plošný integrál 1. druhu (neorientovaný)

- nezávisí na orientaci plochy;
- jde o integrál ze skalární funkce $F(x, y, z)$.

6. Definice Nechť $\mathscr{S}$ je jednoduchá hladká plocha a skalární funkce $F(x, y, z) : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ spojitá na $\mathscr{S}$. Pak definujeme **plošný integrál 1. druhu**

a) pro hladké parametrické vyjádření (1)

$$\iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{M} F\big(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)\big) \cdot |\vec{n}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{4}$$

kde $|\vec{n}|$ je velikost normály dané vztahem (3).

b) pro explicitní vyjádření plochy $z = f(x, y)$

$$\iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathscr{S}_{xy}} F\big(x, y, f(x, y)\big) \cdot |\vec{n}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

kde $\mathscr{S}_{xy}$ je průmět plochy $\mathscr{S}$ do roviny (x, y) a $|\vec{n}|$ je velikost normály dané vztahem (2), tj. $|\vec{n}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$.

Poznamenejme, že na levé straně vztahů (4) a (5) vystupují plošné integrály a na straně pravé jsou integrály dvojné.

7. Věta Je-li $\mathscr{S}$ jednoduchá po částech hladká plocha skládající se z jednoduchých hladkých částí $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \dots, \mathscr{S}_n$, potom

$$\iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathscr{S}_i} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S.$$

8. Aplikace $|\mathscr{S}| = \iint_{\mathscr{S}} 1\,\mathrm{d}S$ vyjadřuje plošný obsah jednoduché hladké plochy $\mathscr{S}$.

$m(\mathscr{S}) = \iint_{\mathscr{S}} \varrho(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ vyjadřuje hmotnost plochy $\mathscr{S}$ při plošné hustotě $\varrho(x, y, z)$.

9. Příklad Vypočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} xy\,\mathrm{d}S$, kde $\mathscr{S} = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \le z \le 3, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\big\}$. [12]

10. Příklad Určete plošný obsah vrchlíku rotačního paraboloidu $z = 6 - x^2 - y^2$ nad rovinou $z = 0$. $[\frac{62}{3}\pi]$

11. Příklad Určete povrch horní části kulové plochy $\mathscr{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0\}$. $[8\pi]$

12. Příklad Vypočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,\mathrm{d}S$, kde $\mathscr{S}$ je plášť čtvrtiny kruhového válce $x^2 + y^2 = r^2$, $r > z > 0$ v prvním oktantu a je omezený rovinami $z = 0$ a $z = h$, kde $r \ge h > 0$. $[\frac{\pi r}{4} \arcsin \frac{h}{r}]$

13. Příklad Určete povrch části zeměkoule ($R \doteq 6400$km) vymezený poledníkem 0° a 30° v.d. a rovnoběžkami 45° s.š. a 60° s.š. $[\frac{\pi R^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{12}]$

14. Příklad Vypočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathscr{S} = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 9(x^2 + y^2), -1 \le z \le 2\big\}$. $[5\pi\frac{17}{81}]$

Plošný integrál 2. druhu (orientovaný)

- závisí na orientaci plochy;
- jde o integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\big)$.

15. Definice Nechť $\mathscr{S}$ je jednoduchá hladká **orientovaná** plocha a vektorová funkce $\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\big)$ má složky P, Q, R spojité na $\mathscr{S}$:

Pak definujeme **plošný integrál 2. druhu**

a) pro hladké parametrické vyjádření (1)

$$\iint_{\mathscr{S}} \vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S} \equiv \iint_{\mathscr{S}} \Big(P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big) = \tag{6}$$

$$= \beta \iint_{M} \Big(P\big(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)\big), Q\big(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)\big), R\big(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)\big)\Big) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{7}$$

kde $\vec{n}$ je normála daná vztahem (3) a $\beta = \pm 1$ podle toho, zda orientace normály $\vec{n}$ souhlasí se zadanou orientací plochy.

b) při explicitním vyjádření plochy $z = f(x,y)$ platí

$$\iint_{\mathscr{S}} \vec{F}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \beta \iint_{\mathscr{S}_{xy}} \vec{F}\big(x,y,f(x,y)\big) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{8}$$

kde $\mathscr{S}_{xy}$ je průmět plochy $\mathscr{S}$ do roviny (x,y) a $\beta = \pm 1$ podle toho, zda orientace normály $\vec{n}$ souhlasí se zadanou orientací plochy.

I pro plošný integrál 2. druhu platí analogická věta jako Věta 7 pro plochu po částech hladkou.

16. Aplikace $T(\mathscr{S}) = \iint_{\mathscr{S}} \vec{v}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}$ vyjadřuje tok rychlostního pole $\vec{v}(x,y,z)$, což je vektor rychlosti kapaliny proudící jednoduchou hladkou orientovanou plochou $\mathscr{S}$.

17. Poznámka Plošný integrál 1. a 2. druhu nezávisí na zvolené parametrizaci.

18. Příklad Spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathscr{S} = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\big\}$. Normála míří ven. $[2\pi]$

19. Příklad Spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathscr{S} = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 2\Big\}$. Normála míří ven. $[-4\pi]$

U křivkového integrálu 2. druhu platí Greenova věta pro orientovanou křivku Γ, která je hranicí rovinné oblasti Ω. Pokud se zaměříme na neuzavřenou plochu $\mathscr{S}$, jejíž okraj tvoří orientovaná křivka Γ, pak můžeme vyslovit analogickou větu – Stokesovu. K tomu potřebujeme několik pojmů.

20. Definice Nechť je dána jednoduchá po částech hladká **orientovaná** plocha $\mathscr{S}$ s okrajem tvořeným jednoduchou po částech hladkou křivkou Γ. Řekneme, že křivka Γ je **orientována souhlasně s plochou $\mathscr{S}$**, pokud platí: položíme-li dlaň pravé ruky kolmo k ploše $\mathscr{S}$ na její okraj Γ tak, že palec ukazuje směr normály plochy a prsty ukazují orientaci křivky Γ.

21. Věta **Stokesova věta**
Nechť $\mathscr{S}$ je jednoduchá po částech hladká **orientovaná** plocha $\mathscr{S}$, jejíž okraj je uzavřená křivka Γ orientovaná souhlasně s plochou $\mathscr{S}$. Nechť vektorová funkce $\vec{F}\big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\big)$ má složky P, Q, R spojité i se svými prvními derivacemi na $\mathscr{S}$. Pak platí

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{rot}\vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}. \tag{9}$$

Ekvivalentní forma zápisu:

$$\iint_{\mathscr{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Gamma} \big(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\big). \tag{10}$$

22. Příklad Pomocí Stokesovy věty spočtěte $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, kde $\Gamma = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,$ $x + z = 1\big\}$. $[-2\pi]$

23. Příklad Je dána funkce $\vec{F} = (z, xy, xy)$ a plocha $\mathscr{S}$ parametrickými rovnicemi:

$\mathscr{S}:\quad x = u\cos v$
$\quad y = u\sin v$
$\quad z = u^2\cos^2 v,\quad$ kde $0 \le u \le 1$ a $0 \le v \le 2\pi$.

Ověřte platnost Stokesovy věty, tj. spočtěte:

a) $\int_{\Gamma}(z, xy, xy)\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je okraj plochy $\mathscr{S}$. $[-\frac{\pi}{2}]$

Nápověda: Parametrické rovnice křivky Γ získáte pro $u = 1$.

b) $\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{rot}(z, xy, xy)\,\mathrm{d}\vec{S}$. $[-\frac{\pi}{2}]$

24. Příklad Je dána funkce $\vec{F} = (-y, x, z)$ a plocha $\mathscr{S}$ parametrickými rovnicemi:

$\mathscr{S}:\quad x = u\sin v$
$\quad y = u\cos v$
$\quad z = u^2\sin^2 2v,\quad$ kde $0 \le u \le 1$ a $0 \le v \le 2\pi$.

Ověřte platnost Stokesovy věty, tj. spočtěte:

a) $\int_{\Gamma}(-y, x, z)\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je okraj plochy $\mathscr{S}$. $[-2\pi]$

Nápověda: Parametrické rovnice křivky Γ získáte pro $u = 1$.

b) $\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{rot}(-y, x, z)\,\mathrm{d}\vec{S}$. $[-2\pi]$

25. Příklad Je dána funkce $\vec{F} = (x\ln z, y\ln z, xy)$ a plocha $\mathscr{S}$ parametrickými rovnicemi:

$\mathscr{S}:\quad x = u$
$\quad y = v$
$\quad z = uv,\quad$ kde $1 \le u \le 2$ a $1 \le v \le 3\pi$.

Ověřte platnost Stokesovy věty, tj. spočtěte:

a) $\int_{\Gamma}(x\ln z, y\ln z, xy)\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je okraj plochy $\mathscr{S}$. $[4\ln 2 - \frac{3}{2\ln 3}]$

Nápověda: Okraj plochy $\mathscr{S}$ je složený ze čtyř částí, tedy $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Je tedy potřeba spočítat čtyři samostatné integrály.

b) $\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{rot}(x\ln z, y\ln z, xy)\,\mathrm{d}\vec{S}$. $[4\ln 2 - \frac{3}{2\ln 3}]$

26. Věta Gaussova–Ostrogradského věta

Nechť $\mathscr{S}$ je po částech hladká jednoduchá **uzavřená** plocha, která je orientovaná kladně. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je trojrozměrná oblast, jejíž hranicí je plocha $\mathscr{S}$. Nechť vektorová funkce $\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ má složky P, Q, R spojité na $\partial\Omega \equiv \mathscr{S}$ a spojité derivace Q_y, P_x, R_z na Ω. Pak platí

$$\iint_{\mathscr{S}} \vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{11}$$

Ekvivalentní forma věty zní:

$$\iint_{\mathscr{S}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{12}$$

27. Aplikace $V(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\mathscr{S}}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}$ vyjadřuje objem tělesa Ω, jehož hranici tvoří plocha $\mathscr{S}$.

28. Příklad Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je povrch čtyřstěnu omezeného rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. Normála míří ven. $[\frac{1}{2}]$

29. Příklad Spočtěte $\iint_{\mathscr{S}}(x, y^2z, z^2)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je obdélník daný body $A[2,2,3]$, $B[2,2,5]$, $C[2,4,3]$, $D[2,4,5]$, jehož orientace je dána normálou $(1,0,0)$ v bodě $[2,3,4]$. [??]

30. Příklad Spočtěte $\iint_{\mathscr{S}}(x^2, y, 5)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je rovina daná body $A[1,0,0]$, $B[0,7,0]$, $C[0,0,5]$ a orientace je dána normálou, která míří do poloprostoru, který obsahuje počátek souřadného systému. [??]

31. Příklad Vypočtěte tok kapaliny přes boční stěny čtyřstěnu $ABCD$ s podstavou ABC. $A[0,0,0]$, $B[2,0,0]$, $C[0,1,0]$, $D[0,0,2]$. Stěny jsou orientovány ve směru vnější normály a vektor proudění $\vec{v} = (yz, zx, xy)$. $[\frac{1}{6}]$

32. Příklad Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}}\left(x^2, y^2, z^2\right)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde plocha $\mathscr{S}$ je vnější strana povrchu kvádru $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$. Normála míří ven z kvádru.
$[abc(a+b+c)]$

33. Příklad

Je dána funkce $\vec{F} = (x^2yz, xy^2z, z^3\sqrt{x^2+y^2})$ a plocha $\mathscr{S}$ je hranicí tělesa $\Omega = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4; 3(x^2+y^2) \le z; z \ge 0\big\}$.

Ověřte platnost Gaussovy-Ostrogradského věty, tj. spočtěte:

a) $\int_{\mathscr{S}}(x^2yz, xy^2z, z^3\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je hranice tělesa Ω. $[-\sqrt{3}\pi + \frac{4}{3}\pi^2]$

Nápověda: Plocha $\mathscr{S}$ je složená ze dvou částí, tedy $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$. Je tedy potřeba spočítat dva samostatné integrály a je to časově náročné.

b) $\iiint_{\Omega} \mathrm{div}(x^2yz, xy^2z, z^3\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. $[-\sqrt{3}\pi + \frac{4}{3}\pi^2]$