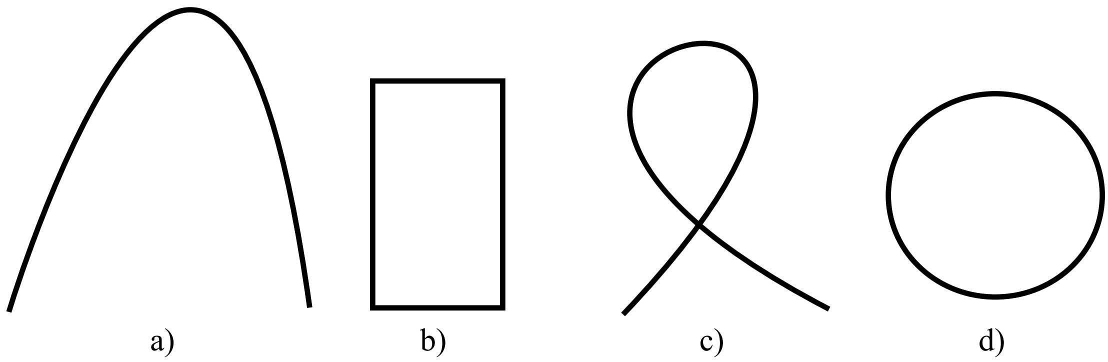
12. Křivkové integrály

Definice 12.1. **Jednoduchou po částech hladkou křivkou v prostoru $\mathbb{R}^n$** rozumíme množinu bodů $[x_1, \dots, x_n]$, které jsou dány parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t), \\ x_2 &= \varphi_2(t), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t), \quad t \in \langle a, b\rangle, \end{aligned} \tag{12.1}$$

kde

a) funkce $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a mají zde i po částech spojité derivace,
b) funkce $\dot{\varphi}_1(t), \dots, \dot{\varphi}_n(t)$ nejsou pro žádné $t \in \langle a, b\rangle$ zároveň rovny nule,
c) pro žádnou dvojici $t_1, t_2 \in (a, b)$ neplatí zároveň $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2), \dots, \varphi_n(t_1) = \varphi_n(t_2)$.



Obr. 12.1: Příklady křivek a) jednoduchá otevřená hladká, b) jednoduchá uzavřená po částech hladká, c) není jednoduchá, d) jednoduchá hladká uzavřená

Poznámka 12.2.

1. Podmínka c) v Definici 12.1 vyjadřuje, že křivka sama sebe neprotíná.
2. V případě, že platí $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, pak se jedná o křivku *uzavřenou*, viz například situace na Obrázku 12.1 d).

Definice 12.3. Nechť je dána jednoduchá konečná po částech hladká křivka Γ (čti Gama), která je dána parametrickými rovnicemi (12.1). Pak křivku Γ lze orientovat dvěma způsoby:

- Bod $A(t_1)$ je před bodem $B(t_2)$, když a jen když $t_1 < t_2$. Pak řekneme, že křivka Γ je orientována **souhlasně se svým parametrickým vyjádřením**.
- Bod $A(t_1)$ je před bodem $B(t_2)$, když a jen když $t_2 < t_1$. Pak řekneme, že křivka Γ je orientována **nesouhlasně se svým parametrickým vyjádřením**.

Následující pasáž bude věnována **křivkovému integrálu prvního druhu**. Pro tento integrál se užívá několik ekvivalentních pojmenování, která velmi výstižně vyjadřují jeho hlavní vlastnosti. Používá se označení **neorientovaný křivkový integrál**, nebo též **křivkový integrál skalárního pole**.

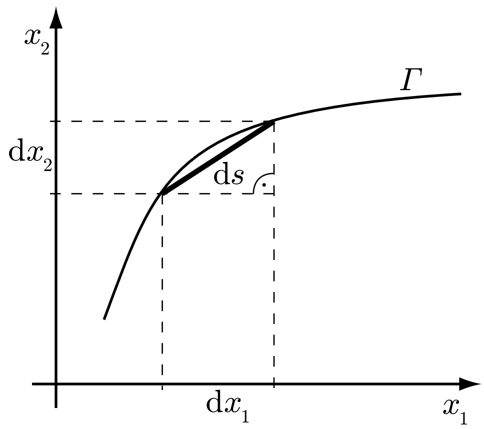
Definice 12.4. (Křivkový integrál skalárního pole) Nechť Γ je jednoduchá hladká křivka o parametrických rovnicích (12.1). Nechť $f(x_1,\dots,x_n)$ je spojitá funkce v nějaké oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, v níž leží křivka Γ, tj. uvažujeme příslušné skalární pole. Pak **integrál prvního druhu** zavedeme následovně:

a) Pro jednoduchou hladkou křivku Γ v $\mathbb{R}^n$, která je vyjádřena parametrickými rovnicemi (12.1) platí

$$\int_\Gamma f(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)\big)\sqrt{\big(\dot\varphi_1(t)\big)^2+\dots+\big(\dot\varphi_n(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{12.2}$$

b) Pro jednoduchou hladkou křivku Γ v $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, kterou lze explicitně vyjádřit ve tvaru $y = g(x)$, $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\big(x,g(x)\big)\sqrt{1+\big(g'(x)\big)}\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 12.2: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2} = \sqrt{\big(\dot\varphi_1(t)\big)^2+\big(\dot\varphi_2(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t$

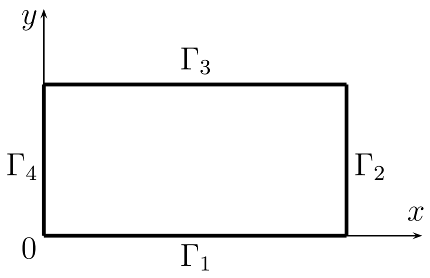
Poznámka 12.5.

1. Integrál prvního druhu nezávisí na orientaci křivky a jedná se o integrál ze skalární funkce $f(x_1,\dots,x_n)$.
2. Myšlenka přechodu od křivkového integrálu k integrálu určitému ve vztahu (12.2) je názorně naznačena na Obrázku 12.2.

Věta 12.6. Aplikace křivkového integrálu 1. druhu. Nechť Γ je jednoduchá hladká křivka. Pak křivkový integrál 1. druhu můžeme aplikovat následovně:

- $L(\Gamma) = \int_\Gamma 1\mathrm{d}s$, kde $L(\Gamma)$ je délkou křivky Γ;
- $P(\Gamma) = \int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$, kde $P(\Gamma)$ je plošným obsahem válcové plochy nad rovinnou křivkou Γ shora ukončeným plochou $z = f(x,y)$;
- $m(\Gamma) = \int_\Gamma \mu(x,y)\mathrm{d}s$, kde $m(\Gamma)$ je hmotností rovinné křivky Γ s lineární (délkovou) hustotou $\mu(x,y)$.

Příklad 12.7. Vypočtěte $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$, kde křivka Γ je obvod obdélníka vymezeného přímkami $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 2$, viz Obrázek 12.3.



Obr. 12.3: K příkladu 12.7

Řešení: Křivka Γ je po částech hladká a lze ji zapsat jako sjednocení hladkých křivek. Potom $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, kde parametrické vyjádření jednotlivých úseků je následující:

$\Gamma_1:\quad \varphi_1(t) = x = t,$

$\qquad \varphi_2(t) = y = 0, \quad t \in \langle 0, 4\rangle$ a platí $\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\dot\varphi_1(t)\right)^2 + \left(\dot\varphi_2(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1^2+0^2}\mathrm{d}t = 1\mathrm{d}t;$

$\Gamma_2:\quad x = 4,$

$\qquad y = t, \quad t \in \langle 0, 2\rangle$ a platí $\mathrm{d}s = \sqrt{0^2+1^2}\mathrm{d}t = 1\mathrm{d}t;$

$\Gamma_3:\quad x = t,$

$\qquad y = 2, \quad t \in \langle 0, 4\rangle$ a platí $\mathrm{d}s = 1\mathrm{d}t;$

$\Gamma_4:\quad x = 0$

$\qquad y = t, \quad t \in \langle 0, 2\rangle$ a platí $\mathrm{d}s = 1\mathrm{d}t.$

Pak hledaný integrál vypočteme následovně:

$$\int_\Gamma xy\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} xy\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} xy\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_3} xy\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_4} xy\mathrm{d}s.$$

Protože $\int_{\Gamma_1} xy\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_4} xy\mathrm{d}s = 0$, dostaneme

$$\int_\Gamma xy\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} xy\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_3} xy\mathrm{d}s = \int_0^2 4t\mathrm{d}t + \int_0^4 2t\mathrm{d}t = \left[2t^2\right]_0^2 + \left[t^2\right]_0^4 = 24.$$

Déle se zabývejme **křivkovým integrálem druhého druhu**. Opět se používá ekvivalentní značení **orientovaný křivkový integrál** nebo **křivkový integrál vektorového pole**, které vystihuje základní vlastnosti tohoho integrálu.

Definice 12.8. (Křivkový integrál vektorového pole) Mějme vektorovou funkci $\vec{F}(x_1,\dots,x_n)=\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)\big)$ se spojitými složkami $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$ v nějaké oblasti $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, v níž leží křivka Γ, tj. uvažujme příslušné vektorové pole. Pak **křivkový integrál druhého druhu** zavedeme následovně:

a) Pro jednoduchou hladkou **orientovanou** křivku Γ v $\mathbb{R}^n$, která je vyjádřena parametrickými rovnicemi (12.1) platí

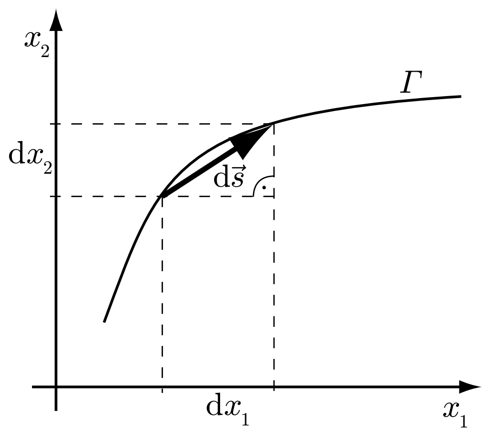
$$\int\limits_\Gamma \vec{F}(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}\vec{s}\equiv\int\limits_\Gamma f_1\mathrm{d}x_1+\dots+f_n\mathrm{d}x_n=$$
$$=\pm\int\limits_a^b\underbrace{\Big(f_1\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)\big),\dots,f_n\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)\big)\Big)}_{vektor}\cdot\underbrace{\big(\dot\varphi_1(t),\dots,\dot\varphi_n(t)\big)}_{vektor}\mathrm{d}t, \tag{12.3}$$

přičemž znaménko + píšeme při souhlasné, znaménko − při nesouhlasné orientaci křivky Γ s daným parametrickým vyjádřením.

b) Pro jednoduchou hladkou **orientovanou** křivku Γ v $\mathbb{R}^2$, kterou lze explicitně vyjádřit ve tvaru $y=g(x)$ platí

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}(x,y)\mathrm{d}\vec{s}\equiv\int\limits_\Gamma f_1(x,y)\mathrm{d}x+f_2(x,y)\mathrm{d}y=\pm\int\limits_\alpha^\beta\Big(f_1\big(x,g(x)\big),f_2\big(x,g(x)\big)\Big)\cdot\big(1,g'(x)\big)\mathrm{d}x$$

a α,β jsou x-ové souřadnice průmětu křivky Γ na osu x.



Obr. 12.4: $\mathrm{d}\vec{s}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2)=\big(\dot\varphi_1(t),\dot\varphi_2(t)\big)\ \mathrm{d}t$

Poznámka 12.9.

1. Integrál druhého druhu závisí na orientaci křivky a jedná se o integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x_1,\dots,x_n)=\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)\big)$.
2. Myšlenka přechodu od křivkového integrálu k integrálu určitému ve vztahu (12.3) je názorně naznačena na Obrázku 12.4.

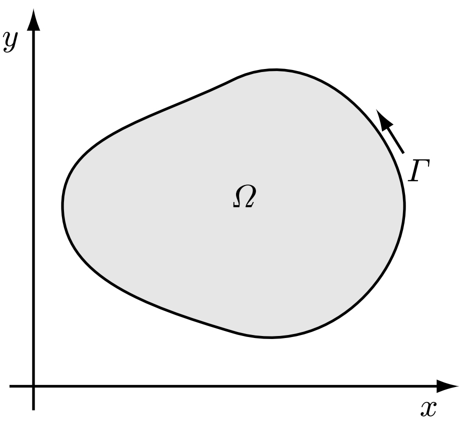
Věta 12.10. Aplikace křivkového integrálu 2. druhu. Nechť Γ je jednoduchá hladká křivka. Pak platí $A(\Gamma)=\int\limits_\Gamma\vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$, kde $A(\Gamma)$ je práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$ po orientované křivce Γ.

Nyní zavedeme některé pojmy, které využijeme při formulaci Greenovy věty, která je hojně využívána při výpočtech v technické praxi i v důkazových technikách a která vyjadřuje vztah mezi křivkovým integrálem 2. druhu po uzavřené křivce Γ a dvojným integrálem přes oblast Ω, jejíž hranici křivka Γ tvoří.

Definice 12.11. (Oblast typu A) Nechť Ω je omezená (nikoliv nutně jednoduše souvislá) oblast v $\mathbb{R}^2$. Tvoří-li její hranici konečný počet jednoduchých konečných po částech hladkých uzavřených křivek, budeme říkat, že **oblast Ω je typu A**.

Věta 12.12. Greenova věta.
Nechť $\overline{\Omega}$ je uzavřená oblast typu A s hranicí Γ kladně orientovanou vzhledem k Ω (tzn. oblast Ω zůstává po levé straně, probíháme-li křivku Γ v kladném smyslu), viz Obrázek 12.5. Dále nechť funkce $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ jsou spojité v oblasti $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\int\limits_{\Gamma} f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



Obr. 12.5: Ke Greenově větě

Definice 12.13. Nechť $\Gamma \in \Omega$ je orientovaná křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Jestliže hodnota integrálu

$$I = \int_{\Gamma} f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y \tag{12.4}$$

závisí jen na volbě bodů A, B, a nikoliv na tom, kterou křivku Γ z oblasti Ω spojující tyto body zvolíme, říkáme, že **integrál I nezávisí v oblasti Ω na integrační cestě**.

Věta 12.14. Nechť funkce $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ jsou spojité v jednoduše souvislé oblasti Ω. Pak platnost rovnice

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y), \qquad \forall [x, y] \in \Omega$$

je nutnou a postačující podmínkou, aby integrál (12.4) nezávisel v oblasti Ω na integrační cestě. Navíc pak výraz

$$f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y$$

je v Ω totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Hodnota integrálu (12.4) je pak dána rozdílem $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$, kde $[x_1, y_1]$ je počáteční a $[x_2, y_2]$ koncový bod křivky Γ.