Určitý Riemannův integrál

1. $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x$; *[$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, (per partes)]*
2. $\int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; *[$-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, (substituce: $x^2+1=t^2$)]*
3. $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$; *[$2\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}$, (substituce: $x=t^2$)]*
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos^2 x\mathrm{d}x$; *[$\frac{1}{12}(4-\sqrt{2})$, (substituce: $\cos x = t$)]*
5. $\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}}\mathrm{d}x$; *[$\frac{3\sqrt{2}}{2}$, (substituce: $4x-2=t^2$)]*
6. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$; *[$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)$, (substituce: $\mathrm{e}^x=t$)]*

Aplikace

	explicitní rovnice $y=f(x),\quad x\in\langle a,b\rangle$	parametrické rovnice $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in\langle\alpha,\beta\rangle$
PLOŠNÝ OBSAH	$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$S=\left\vert\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\vert$
OBJEM	$V=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$	$V=\pi\left\vert\int_\alpha^\beta [\psi(t)]^2\cdot\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\vert$
DÉLKA KŘIVKY	$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\mathrm{d}x$	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\dot\varphi(t)\right]^2+\left[\dot\psi(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$
POVRCH PLÁŠTĚ	$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\mathrm{d}x$	$P=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left[\dot\varphi(t)\right]^2+\left[\dot\psi(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$

1. Určete obsah plochy ohraničené křivkou $y=x^2$ a osou x pro $x\in\langle-3,3\rangle$. *[18]*
2. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y=x^3$ a $y=x$ pro $x\in\langle1,2\rangle$. *[$\frac{9}{4}$]*
3. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y=\frac{2}{1+x^2}$ a $y=x^2$. *[$\pi-\frac{2}{3}$]*
4. Určete obsah plochy ohraničené křivkou $y=x^3+x^2-6x$ a osou x pro $x\in\langle-3,3\rangle$. *[$28\frac{2}{3}$]*
5. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y=2x^2$, $y=x^2$ a $y=1$. *[$2\frac{2-\sqrt{2}}{3}$]*
6. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y=\mathrm{e}^x-1$, $y=\mathrm{e}^{2x}$ a $x=0$. *[$\ln 4-\frac{1}{2}$]*
7. Určete obsah půlkruhu zadaného parametrickými rovnicemi $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle0,\pi\rangle$. *[$\frac{\pi r^2}{2}$]*
8. Vypočtěte objem kuželu, který vznikne rotací přímky $y=\frac{1}{2}x-1$ kolem osy x pro $x\in\langle2,6\rangle$. *[$\pi\frac{16}{3}$]*
9. Vypočtěte Příklad 8 pomocí vhodné parametrizace.
10. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy mezi křivkami $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$ a $x=0$ kolem osy y. *[$\frac{3}{2}\pi$]*
11. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy mezi křivkami $y=5x$, $y=5x^2$:
    a) kolem osy x; *[$\frac{10}{3}\pi$]*
    b) pro $x\in\langle1,4\rangle$ kolem osy y. *[4590π]*
12. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy mezi křivkami $y=\frac{1}{2}x^2+1$, $y=-\frac{1}{2}x+4$ a $x=0$:
    a) kolem osy x; *[$\frac{92}{5}\pi$]*
    b) kolem osy y. *[4π]*
13. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy mezi křivkami $y=9-x^2$, $y=x$ pro $x\in\langle1,2\rangle$:
    a) kolem osy x; *[...]*
    b) kolem osy y. *[...]*

14. Odvoďte vztah pro objem rotačního komolého kuželu s poloměry podstav $0 < r_1 \leq r_2$ a výškou v.
$[\, V = \pi \int\limits_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1 \right) \mathrm{d}x = \dots]$

15. Pomocí Riemannova integrálu určete povrch koule o poloměru r, je-li tvořící půlkružnice dána:
    a) explicitně $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$; $[\, 4\pi r^2]$
    b) parametricky $x = r\cos t$, $y = r \sin t$, kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$. $[\, 4\pi r^2]$

16. Určete objem elipsoidu, který vznikne rotací elipsy dané parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x. $[\frac{4}{3} ab^2 \pi]$

17. Určete délku asteroidy dané parametrickými rovnicemi $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $[6a]$

18. Určete povrch pláště a objem tělesa, které vznikne rotací části asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ kolem osy x. $[P = \frac{6}{5}\pi a^2,\ V = \dots]$

19. Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru r. $[\frac{4}{3}\pi r^3]$

20. Pomocí určitého integrálu určete obsah trojúhelníka ABC, kde $A = [-1, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 2]$. $[\, 3]$

21. Určete plošný obsah oblasti ohraničené křivkami $y = \cos^3 x$, $y = \sin^3 x$, $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{4}$. $[\dots]$