2. Lineární algebra

Verze 5. října 2015

Teorie matic a determinantů představuje úvod do lineární algebry. Nejrozsáhlejší aplikace mají matice a determinanty při řešení systémů lineárních rovnic. Pojem determinantu zavedl již v roce 1693 německý matematik W. G. Leibniz (1646–1716), ale jeho objev upadl v zapomenutí. V roce 1750 dospěl znovu k pojmu determinantu švýcarský matematik G. Cramer (1704–1752). Všeobecně se začalo v matematice používat determinantů až koncem 18. století. Zasloužili se o to zejména matematici A.-T. Vandermonde (1735–1796) a A. L. Cauchy (1789–1857). Současně s teorií determinantů se rozvíjela teorie matic, jejímž zakladatelem je anglický matematik A. Cayley (1821–1895). Na dalším rozvoji teorie matic se podíleli zejména G. Frobenius (1849–1917), J. J. Sylvester (1814–1897) a K. Weierstrass (1815–1897).

2A. Matice a maticové operace

Začneme intuitivní definicí matice:

Definice 2.1. Buď X neprázdná množina tzv. **skalárů** a m, n přirozená čísla. **Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n)** nad množinou X je schéma složené z m krát n prvků množiny X zapsaných tabulky s m řádky a n sloupci.

Přesněji **matice A typu (m, n) nad X je zobrazení množiny $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ do množiny X.**

Matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) budeme zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nebo jen krátce $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je prvek na i-tém řádku a j-tém sloupci.
První index i se přitom nazývá **řádkový index** a druhý j **sloupcový index**.
Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny X budeme označovat $X^{m \times n}$, například $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Množina skalárů X obvykle bývá množina číselná. V dalším budeme předpokládat, že X **je množina čísel reálných $\mathbb{R}$ nebo komplexních $\mathbb{C}$** s operacemi sčítání a násobení, které splňují obvyklé asociativní, komutativní a distributivní zákony. Nenulovým prvkem lze i dělit.

Prvky matic mohou být i komplikovanější objekty, například algebraické výrazy, nebo funkce.

Příklad: Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ je příkladem matice typu $(2, 3)$ nad množinou $\mathbb{N}$. Platí například, že $a_{23} = 4$, protože prvek a_{23} leží ve druhém řádku a třetím sloupci matice $\mathbf{A}$.

Význačné matice

Uveďme několik význačných matic, některé mají své zavedené symboly:

Definice 2.2.

(a) Je-li $m = n$, matice se nazývá **čtvercová**, v obecném případě $m \neq n$ **obdélníková**.

(b) Množina všech prvků a_{ij} s $i = j$ se nazývá **hlavní diagonála** matice;

(c) **Nulová matice 0** je matice, jejíž všechny prvky jsou nuly.

(d) **Jednotková matice E** je čtvercová matice, jejíž všechny prvky na hlavní digonále jsou rovny jedné, ostatní prvky jsou nuly.

(e) Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **trojúhelníková**, (přesněji **horní trojúhelníková**), pokud pod hlavní diagonálou jsou samé nuly, přesněji pro každé dva indexy $i > j$ platí $a_{ij} = 0$.

Analogicky **dolní trojúhelníková** matice má samé nuly nad hlavní diagonálou, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i < j$.

(f) Dvě **matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ se rovnají**, pokud jsou stejného typu a mají stejné prvky, tj. pro libovolné indexy i, j platí $a_{ij} = b_{ij}$. Pak píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(g) Matice typu $(1, n)$ má jenom jeden řádek a nazýváme ji **řádkový vektor**. Matice typu $(m, 1)$ má jenom jeden sloupec a nazýváme ji **sloupcový vektor**.

Příklad: Uveďme po řadě příklad matice jednotkové, nulové, horní a dolní trojúhelníkové:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Na množině matic lze definovat řadu operací. Operace transponování má jenom jeden argument, je tedy operací unární.

Definice 2.3. **(Transponování matice)** Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu (m, n).
Matice k ní **transponovaná** je matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ typu (n, m) s prvky (a_{ji}), tj. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})$.
Transponování matici „překlopí“ přes hlavní diagonálu, sloupce se mění na řádky a řádky na sloupce.

Poznámky:
Každou matici lze transponovat, z matice typu (m, n) se stane matice typu (n, m).
Sloupcový vektor se transponováním mění na řádkový a obráceně.
Dalším transponováním dostaneme původní matici: $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Příklad: Transponováním matice typu $(2, 3)$ dostáváme matici typu $(3, 2)$, například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.4. **(Násobení matice číslem)** Matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) lze vynásobit číslem $c \in X$.
Výsledkem násobku $c\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ stejného typu (m, n), s prvky $b_{ij} = ca_{ij}$. Součin je definován i v opačném pořadí: $(a_{ij})c = (a_{ij}c)$. Pokud násobení v X je komutativní, platí rovnost $c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$.

Poznámky: Matici $c\mathbf{A}$ se říká **skalární násobek matice A**. Skalárem c přitom násobíme každý prvek matice. V případě $c = 1$ se matice nezmění, pro $c = 0$ dostáváme matici nulovou.

Příklad: Platí

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.5. **(Sčítání a odčítání matic)** Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ lze sečíst, jen když **jsou stejného typu** (m, n).
Součtem $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ stejného typu (m, n), kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Matice, pokud jsou stejného typu, lze také odečítat. **Rozdíl** $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ je definován jako součet matic, kde druhou matici násobíme číslem -1: $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} := \mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}$, tj. $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Poznámky: Pokud matice nemají stejný typ, nelze je sčítat ani odčítat. Při sčítání nebo odčítání matic sčítáme nebo odčítáme všechny odpovídající prvky matic. Matice stejného typu lze sčítat, odčítat a násobit skalárem stejně jako čísla (skaláry).

Příklad: Matici typu $(2, 3)$ můžeme sečíst jen s maticí typu $(2, 3)$, stejné pravidlo platí i pro rozdíl:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+2 & 2+4 \\ 0+2 & 1+5 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 & 5-4 & 6-2 \\ 2-0 & 6-3 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Násobení matic

Násobení matic je komplikovanější než součet a násobek matic. Záleží na pořadí matic a typy matic musejí na sebe navazovat. Maticové násobení nám později umožní jednoduchý zápis i řešení soustav lineárních rovnic.

Definice 2.6. (Násobení matic). Buď matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, p) a matice $\mathbf{B} = (b_{kj})$ typu (p, n). Potom součinem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu (m, n) s prvky

$$c_{ij} := \sum_{\mathbf{k}=1}^{p} a_{i\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}j} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{ip}\, b_{pj}. \tag{2.1}$$

Stejně jako při násobení čísel i při násobení matic se často symbol $\cdot$ vynechává a píše se jenom $\mathbf{AB}$.

Poznámky: Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ lze násobit, jen když typy matic na sebe navazují v následujícím smyslu: počet sloupců první matice se rovná počtu řádků druhé matice. Důvodem je definice součinu matic: pro prvek c_{ij} násobíme odpovídající prvky i-tého řádku (je jich p jako sloupců první matice) a prvků j-tého sloupce (těch je jako počet řádků druhé matice) a tyto součiny sečteme. Proto počet sloupců první matice se musí rovnat počtu řádků druhé matice, symbolicky pro typy matic platí: $(m, p) \cdot (p, n) = (m, n)$.

Prvek ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci výsledné matice tedy získáme tak, že procházíme i-tý řádek v matici $\mathbf{A}$ a jeho prvky postupně násobíme prvky ležícími v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ a součiny posčítáme.

Operace **násobení matic není komutativní**, tj. pořadí matic nelze měnit. Po přehození matic typu (m, p) a (p, n) nemusí matice na sebe navazovat pokud $m \neq n$. A i když $m = n$ po záměně pořadí dostáváme matici jiného typu (p, p) v případě, kdy $m \neq p$. A ani když $m = p = n$, tj. matice jsou čtvercové stejné velikosti, i v tomto případě jen výjimečně dostaneme stejnou matici.

Demonstrujme algoritmus násobení matic podle vztahu (2.1) na příkladu:

Příklad: Určete součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Příklad ukazuje, že násobení matic není komutativní: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Výsledné matice mají i odlišné typy.

Vlastnosti operací s maticemi shrneme v následující větě:

Věta 2.7. Vlastnosti maticových operací. Pokud typy matic operaci umožňují, operace sčítání, násobení i skalárního násobku matic splňuje asociativní zákon:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \qquad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \qquad (c \cdot d) \cdot \mathbf{A} = c \cdot (d \cdot \mathbf{A}).$$

Operace sčítání matic i skalární násobku jsou komutativní (násobení matic komutativní není):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot c, \qquad [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}]\,.$$

Operace sčítání je s oběma operacemi násobení spojena distributivními zákony:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

$$c \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c \cdot \mathbf{A} + c \cdot \mathbf{B} \qquad (c + d) \cdot \mathbf{A} = c \cdot \mathbf{A} + d \cdot \mathbf{A}$$

Jednotková matice $\mathbf{E}$ má podobnou vlastnost jako jednička a nulová matice se chová jako nula:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Pro transponování součtu a násobku matic platí $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ a $(c \cdot \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = c \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
Chování součinu vzhledem k transponování popisuje vztah $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

2B. Hodnost matice

Velmi důležitou charakteristikou matice je její hodnost. Je to počet nezávislých řádků nebo sloupců. Nejprve si ujasněme pojem nezávislosti.

Nezávislost řádků

Uvažujme matici čísel z množiny „skalárů“ X, obvykle je to množina reálných čísel $X = \mathbb{R}$. Řádky matice jsou vektory stejné délky, které můžeme násobit číslem a sčítat po složkách jako matice typu $(1, n)$:

Definice 2.8. Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu (m, n) s prvky $a_{ij} \in X$.
Matice $\mathbf{A}$ se skládá z m **řádků** $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, délky n: $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.
Pro $c_1, c_2, \ldots, c_m \in X$ **lineární kombinací** řádků nazveme vektor

$$c_1\mathbf{r_1} + c_2\mathbf{r_2} + \cdots + c_m\mathbf{r_m} := (c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1}, \quad \ldots, \quad c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn}),$$

Pokud řádek $\mathbf{r}_1$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci řádků $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, tj. existují čísla $c_2, \ldots, c_n$, že $\mathbf{r}_1 = c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m$, řekneme, že řádek $\mathbf{r}_1$ je **závislý** na řádcích $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$.

Příklad: Řádek $\mathbf{r}_1 = (-4, 4, 5, 1)$ je závislý na řádcích $\mathbf{r}_2 = (1, 3, 2, 4)$, $\mathbf{r}_3 = (2, 0, 1, 2)$, $\mathbf{r}_4 = (0, -2, 4, -1)$ protože pro $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$.

Dále řekneme, že řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud alespoň jeden z nich je závislý na ostatních řádcích, tj. lze ho vyjádřit jako lineární kombinace ostatních řádků. Pokud žádný z nich není závislý na ostatních, řekneme, že řádky jsou **lineárně nezávislé**. Matematicky to zapisujeme implikací:

Definice 2.9. Řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ matice $\mathbf{A}$ nazveme **lineárně nezávislé**, pokud jediná jejich lineární kombinace, která dává nulový vektor $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, je kombinace nulová, tj.

$$c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

Poznámky: Přesvědčme se, že implikace definuje nezávislé řádky. Kdyby alespoň jedno z c_i bylo nenulové, například $c_1 \neq 0$, potom z rovnosti $c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m = \mathbf{0}$ plyne

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{1}{c_1}(c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m),$$

tj. $\mathbf{r_1}$ je vyjádřen jako lineární kombinace řádků $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ a je tedy na nich závislý. Jestliže jsou vždy všechny $c_i = 0$, potom řádky $\mathbf{r}_i$ jsou nezávislé.

Jak zjistíme počet nezávislých řádků? Pokud v matici zjistíme řádek, který je závislý na ostatních, řádek vyřadíme. Pokud ve zbývajících řádcích najdeme další závislý, také odstraníme. Takto postupujeme, dokud nezůstanou jenom řádky lineárně nezávislé, které určují hodnost matice:

Definice 2.10. Hodnost matice A je počet jejích lineárně nezávislých řádků. Značíme ji $h(\mathbf{A})$.
Přesněji, $h(\mathbf{A}) = p$ pokud v matici existuje p nezávislých řádků, přičemž ostatní řádky jsou nich závislé.
Hodnost nulové matice položíme $h(\mathbf{0}) = 0$.

Poznámky:

Nulový řádek je vždy závislý. Pokud jsou v matici dva stejné řádky, jeden je závislý na druhém.

Hodnost matice je počet nezávislých řádků, proto hodnost matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) je $h(\mathbf{A}) \leq m$.

Řádky jednotkové matice jsou nezávislé, proto její hodnost je rovna počtu jejich řádků. Skutečně, žádný řádek matice nelze vyjádřit pomocí ostatních, protože i-tý řádek má na i-tém místě jedničku a ostatní řádky tam mají nuly a jedničku nelze vyjádřit jako kombinaci nul.

Hodnost matice se také dobře určuje u schodovité matice:

Definice 2.11. Matici $\mathbf{A}$ nazveme **schodovitou** nebo **stupňovitou**, pokud každý další nenulový řádek „začíná více nulami“ než řádek předchozí.

Příklad: Například matice typu $(5, 7)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je schodovitá, má postupně „schody“ šířky 1, 3 a 2, poslední řádek je nulový. Má proto čtyři nezávislé řádky, její hodnost je proto $h(\mathbf{A}) = 4$.

Jak určit hodnost matice v praxi? Zjišťovat nezávislost řádků není věc snadná. Dobře se to však zjišťuje u schodovité matice. Každý nenulový řádek je nezávislý na řádcích následujících. Skutečně, je-li a_{ij} jeho první nenulová složka v j-tém řádku, všechny další řádky mají na j-tém místě nulu, a proto žádnou jejich lineární kombinací na j-tém místě a_{ij} nedostaneme. Hodnost schodovité matice je **počet jejích nenulových řádků.**

Pro zjištění hodnosti matice matici „upravíme“ na schodovitý tvar. Použijeme ovšem jenom ty úpravy, které nemění počet nezávislých řádků a tím i hodnost matice:

Věta 2.12. Následující tzv. **elementární řádkové úpravy** nemění hodnost matice $\mathbf{A}$:

(a) změníme pořadí řádků,

(b) řádek vynásobíme **nenulovým** číslem,

(c) k řádku **přičteme násobek jiného řádku** nebo lineární kombinaci **jiných** řádků,

(d) vypustíme nulový řádek.

Poznámky:

Uveďme myšlenku důkazu předchozí věty. Při žádné manipulaci s řádky (přidání nenulového řádku není dovoleno) se nemůže počet nezávislých řádků zvýšit, nevhodnou úpravou můžeme nezávislý řádek ztratit. Pokud po dané úpravě řádků matice existuje úprava, kterou dostaneme matici původní, hodnost matice se nezměnila. Projděme jednotlivé úpravy:

Při změně pořadí řádků není problém opačnou změnou pořadí dostat původní matici. Při násobení řádku nenulovým číslem c stačí řádek vynásobit číslem $1/c$. Jestliže k řádku přičteme lineární kombinace jiných řádků, odečtením stejné kombinace dostaneme původní matici. Podstatné však je, že **přičítaná kombinace neobsahuje původní řádek**. A vypuštění nulového řádku nemění počet nezávislých řádků.

Věta 2.13. Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na schodovitý tvar. **Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků**.

První tvrzení dokážeme, když načrtneme postup, kterým z libovolné matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dostaneme matici schodovitou. Pokud v prvním sloupci matice jsou nenulové prvky, vybereme první řádek, který má na prvním místě nenulový prvek $a_{i1} \neq 0$, kterému se říká **klíčový**. Ke každému jinému k-tému řádku, pro který je $a_{k1} \neq 0$, přičteme $-a_{k1}/a_{i1}$-násobek i-tého řádu. Tímto získáme matici, která má v prvním sloupci jediný nenulový prvek. Příslušný řádek přesuneme na první místo. Tím máme zaručeno, že druhý řádek bude mít na začátku více nul než první. V dalších krocích vždy první řádky opíšeme a budeme pracovat jenom s řádky dalšími. Dodejme, že pokud by první sloupec obsahoval samé nuly, přejdeme hned ke sloupci druhému.

Vybereme řádek, který má na druhém místě nenulový prvek a vhodný násobek tohoto řádku přičteme ke všem řádkům, které mají na druhém místě nenulový prvek, aby v druhém sloupci (kromě prvního řádku) byl jenom jeden nenulový prvek. Tímto způsobem upravíme postupně všechny sloupci, čímž získáme schodovitou matici.

Uvedený postup se nazývá **Gaussova eliminace**. Pokud při eliminaci „nulujeme“ nejen prvky pod klíčovým prvkem, ale i nad klíčovým prvkem, mluvíme o **Jordanově eliminaci**.

Příklad 2.14. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-7\cdot\mathbf{r}_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /-\mathbf{r}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad h(\mathbf{A}) = 3.$$

Příklad 2.15. Určete hodnost matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-2\cdot\mathbf{r}_1 \\ /+1\cdot\mathbf{r}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{B}) = 2.$$

Sloupcové úpravy

Transponováním matice se nezávislé řádky mění na nezávislé sloupce. Lze dokázat, že hodnost matice se transponováním nemění. V důsledku toho hodnost matice je rovna i počtu nezávislých sloupců, které lze upravovat pomocí sloupcových úprav analogických úpravám řádkovým.

Věta 2.16. Buď $\mathbf{A}$ matice typu (m, n).

Potom počet nezávislých řádků je roven počtu nezávislých sloupců a platí $h(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = h(\mathbf{A})$.
Hodnost matice $\mathbf{A}$ se rovná počtu nezávislých sloupců.
Hodnost matice je menší nebo rovna minimu počtu řádku a sloupců: $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.
Následující tzv. **elementární sloupcové úpravy** nemění hodnost matice:

(a) změníme pořadí sloupců,
(b) sloupec vynásobíme **nenulovým** číslem,
(c) ke sloupci přičteme lineární kombinaci libovolných **jiných** sloupců,
(d) vypustíme nulový sloupec.

2C. Soustavy lineárních rovnic

Soustavy lineárních rovnic – zkráceně SLR, se kterými jste se setkali již na střední škole, mají velký význam v technické praxi, protože řada inženýrských situací vede na řešení SLR. Soustavy lze výhodně zapsat a zkoumat pomocí matic. První otázkou, kterou se budeme zabývat, je zda daná soustava řešení má, případně, kolik těchto řešení je. Ukážeme si také praktickou metodu, kterou lze SLR řešit.

Definice 2.17. Nechť a_{ij}, b_i jsou reálná čísla. Pak soustava

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.2}$$

se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**.
Číslo a_{ij} se nazývá **koeficient** v i-té rovnici u j-té neznámé.
Číslo b_i se nazývá **pravá strana** nebo **absolutní člen** i-té rovnice.

Maticový zápis

Uvedenou soustavu lze zapsat pomocí matic a vektorů. Podíváme-li se na definici násobení matic, zjistíme, že první rovnici lze zapsat jako maticový součin řádkového vektoru $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ a sloupcového vektoru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, který se rovná pravé straně b_1. Stejným způsobem můžeme přepsat i ostatní rovnice. Protože všechny vektory jsou stejné délky, součiny mají stejný tvar a sloupcový vektor je vždy stejný, soustavu rovnic (2.2) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Definice 2.18. Koeficienty a_{ij} uvedené soustavy rovnic tvoří matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) zvanou **matici soustavy**. Koeficienty b_i tvoří sloupcový **vektor pravých stran** $\mathbf{b}$ typu $(m, 1)$ a neznámé x_j sloupcový **vektor neznámých** $\mathbf{x}$ typu $(n, 1)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Soustavu lineárních rovnic (2.2) tak lze zapsat v **maticovém tvaru**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici $\mathbf{A}$ rozšířenou o vektor $\mathbf{b}$ oddělený svislou čárou:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{2.5}$$

Poznámka. V příkladu mají neznámé jména $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. V praxi však se neznámé mohou „jmenovat“ jinak: například (x, y, z), nebo (s, t, u, v, w) nebo (a, b, c, d) a pod.
Poznámky: (Rovnost a rovnice) Vyjasněme si ještě tyto pojmy:

Rovnost, například $2 + 3 = 5$, $\sqrt{9} = 3$, $\cos(\pi) = 1$, **je výrok**, který platí nebo neplatí. Často se zapisuje ve tvaru výrokové formy s proměnnými, přičemž se kvantifikátory vynechávají, předpokládá se, že výrok platí pro všechny přípustné hodnoty: jsou to například tzv. vzorce jako $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, který platí pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, nebo vzorec $\log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$, který platí pro každá kladná reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Naproti tomu **rovnice** není výrok. Například o kvadratické rovnici $x^2+2\,x-15=0$ nemá smysl uvažovat, zda je pravdivá nebo nepravdivá. Je to výroková forma a představuje **úkol najít všechna „řešení“**, tj. hodnoty proměnné x, pro které se z výrokové formy stává pravdivý výrok. Tyto hodnoty se nazývají **řešení**, v našem případě jsou to dvě čísla 3 a -5.

Rovnice se tedy skládá s výrokové formy s proměnnými a množinou, ve které máme hledat řešení. U kvadratické rovnice $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ to mohou být reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo komplexní čísla $\mathbb{C}$ a naším úkolem je vždy najít množinu **všech** řešení. Používáme přitom úpravy, při kterých se množina řešení nemění.

Ještě upřesněme pojem řešení soustavy lineárních rovnic:

Definice 2.19. (Řešení soustavy lineárních rovnic) Uvažujme soustavu lineárních rovnic (2.2).
Sloupcový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ nazveme **řešením soustavy** (2.2), pokud po dosazení hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do rovnic (2.2) za proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dostaneme ve všech rovnicích (2.2) rovnosti. Množina všech řešení je proto podmnožina množiny $\mathbb{R}^{n\times 1}$ všech sloupcových vektorů $\mathbf{x}$ splňujících (2.2).

Řešení soustav lineárních rovnic

Jak se řeší SLR? Pomocí **ekvivalentních úprav**, při kterých se množina řešení (sloupcových vektorů $\mathbf{x}$) nemění, soustavu rovnic upravíme na tvar s rovnicemi typu $x_i = b_i^*$, z kterých lze zjistit hodnoty řešení.

Které úpravy jsou ekvivalentní? Rovnici lze násobit číslem a k rovnici lze přičíst násobky jiných rovnic. Podíváme-li se na odpovídající rozšířenou soustavu rovnic, vidíme, že

(a) změně pořadí rovnic odpovídá změna pořadí řádků rozšířené matice,

(b) násobení rovnice nenulovým číslem odpovídá násobení řádku rozšířené matice tímto číslem,

(c) přičtení násobku rovnice k jiné rovnici odpovídá přičtení stejného násobku odpovídajícího řádku,

(d) rovnici se samými nulami lze vynechat stejně jako vynechat nulový řádek.

Ekvivalentním úpravám soustavy rovnic tak odpovídají elementární řádkové úpravy matic, které jsme využili při zjišťování hodnosti matic. Výsledky shrneme v následující větě:

Věta 2.20. Soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tj. soustavu m lineárních rovnic o n neznámých lze vzájemně jednoznačně reprezentovat rozšířenou maticí $\mathbf{A}|\mathbf{b}$.
Ekvivalentním úpravám SLR vzájemně jednoznačně odpovídají elementární řádkové úpravy rozšířené matice.
Každou SLR lze ekvivalentními úpravami převést na soustavu se schodovitou rozšířenou maticí.

Podle tvaru rozšířené matice ve schodovitém tvaru můžeme už zjistit zda soustava má řešení. Pokud poslední nenulový řádek má tvar $(0, 0, \ldots, 0|b)$, kde $b \neq 0$, řádek reprezentuje rovnici $0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = b$, kterou nemůže splnit žádná n-tice čísel $(x_1, \ldots, x_n)$. Z předpokladu, že soustava má řešení, jsme došli ke sporu, soustava proto řešení nemá. Protože rozšířená matice má o jeden nenulový řádek víc než matice soustavy, hodnost soustavy $h(\mathbf{A})$ je menší, než hodnost rozšířené matice $h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

V opačném případě, tj. když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava řešení má. Pokud je nezávislých rovnic stejně jako neznámých, schodovitá matice $\mathbf{A}$ má všechny „schody“ šířky jedna.

Poslední (nenulový) řádek má tvar $a_{nn}^*\,x_n = b_n^*$, odkud díky $a_{nn}^* \neq 0$ můžeme spočítat $x_n = b_n/a_{nn}^*$.

V předposlední rovnici $a_{n-1,n-1}^*\,x_{n-1} + a_{n-1,n}^*\,x_n = b_{n-1}^*$ přibyla jedna neznámá x_{n-1}. Protože hodnotu x_n už známe a $a_{n-1,n-1}^* \neq 0$, je jednoznačně určena hodnota neznáme x_{n-1}.

Protože každý „schod“ schodovité matice má šířku 1, je vždy další neznámá určena jednoznačně. V tomto případě tedy soustava má právě jedno řešení.

V případě, že „schod“ matice $\mathbf{A}$ má šířku 2, v rovnici přibyly dvě neznámé. Jedné neznámé můžeme přiřadit libovolnou hodnotu, tzv. parametr, druhá neznámá je určena rovnicí. Řešení bude obsahovat parametr. Pro libovolnou hodnotu parametru dostáváme řešení. Proto soustava bude mít nekonečně mnoho řešení. Při „schodu“ šířky k řešení přibude $k-1$ parametrů.

Poznámky:

Popsaná metoda se nazývá **Gaussova eliminace**. Pokud při úpravě „nulujeme“ nejen prvky pod klíčovým prvkem, ale i nad ním, mluvíme o **Jordanově eliminaci**.

Dospěli jsme tak k velmi důležité větě, která vypovídá o řešení soustavy lineárních rovnic pomocí hodnosti matic soustavy, aniž bychom počítali jejich řešení:

Věta 2.21. (Frobeniova) Uvažujme soustavu m lineárních rovnic (2.2) o n neznámých zapsanou v maticovém tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířenou maticí $\mathbf{A}|\mathbf{b}$. Potom platí

(a) Jestliže $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava **nemá řešení**.

(b) Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava **má právě jedno řešení**.

(c) Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, soustava **má právě nekonečně mnoho řešení**, které všechny lze zapsat pomocí $n - h(\mathbf{A})$ parametrů.

Poznámky: Frobeniova věta je jednoduchým a elegantním kritériem řešitelnosti soustav lineárních rovnic. V případě, kdy řešení je nekonečně mnoho, často všechna řešení lze zapsat různými způsoby.

Uvědomme si, že může nastat právě jeden z těchto tří případů:

(a) soustava nemá žádné řešení (tzn. je neřešitelná),

(b) soustava má jediné řešení,

(c) soustava má nekonečně mnoho řešení.

Příklady

Při odvozování předchozí věty jsme ukázali, jak lze danou rozšířenou matici převést na matici schodovitou. Ilustrujme Gaussovu metodu řešení soustavy lineárních rovnic na několika typických příkladech:

Příklad 2.22. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na schodovitý tvar. Pokud je jeden řádek násobkem druhého, jeden z nich vypustíme.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /+2\mathbf{r}_1 \\ /-\mathbf{r}_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /+\mathbf{r}_2 \\ /-\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

I když poslední matice ještě není upravena na schodovitý tvar, vidíme, že daná soustava nemá řešení, neboť ve třetím řádku poslední matice jsou všechny koeficienty u neznámých nulové, kdežto absolutní člen není nula. Hodnost rozšířené matice je 4, ale hodnost matice soustavy je jenom 3, protože má jeden nulový řádek.

Příklad 2.23. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /-\mathbf{r}_1 \\ /-2\mathbf{r}_1 \\ /-2\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /+\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \\ /-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Poslední řádek dává rovnici $2x_3 = 3$, odkud $x_3 = \frac{3}{2}$. Předposlední řádek dává přímo $x_2 = 1$. A konečně první řádek dává rovnici $x_1 = -1 + 2x_2 - x_3$. Po dosazení za x_2 a x_3 dostaneme $x_1 = -\frac{1}{2}$. Daná soustava má tedy jediné řešení: $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$.

Příklad 2.24. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}.$$

Řešení:
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /-\mathbf{r}_1 \\ /-\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dostali jsme soustavu 2 (nezávislých) rovnic pro 4 neznámé. Rozdíl $4-2=2$ dává dvě volné neznámé, které budou parametry. Mohou to být kterékoliv dvě z neznámých x_1, x_2, x_4, nikoliv však neznámá x_3. Zvolíme-li za volné neznámé např. neznámé x_2, x_4, pak lehce vypočteme, že $x_3 = 2$, $x_1 = 2x_2 - x_4$.

Položíme-li $x_2 = t$, $x_4 = s$, pak daná soustava má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $(2t-s, t, 2, s)$, kde t, s jsou parametry, tj. libovolná čísla.

Poznámky:

Má-li soustava lineárních rovnic nekonečně mnoho řešení, pak ze schodovitého tvaru rozšířené matice plyne, kolik soustava bude mít volných neznámých, tj. pomocí kolika parametrů lze vyjádřit obecné řešení. Není však určeno, které neznámé máme zvolit za parametry. Při „schodu“ šířky 2 ze dvojice neznámých můžeme zvolit kteroukoliv. Vyjádření obecného řešení proto není jednoznačné, záleží na tom, které neznámé zvolíme za parametry.

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Speciálním případem soustav lineárních rovnic jsou soustavy s nulami na pravé straně:

Definice 2.25. Nechť a_{ij} jsou reálná čísla. Pak soustava

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & 0 \end{array} \tag{2.6}$$

se nazývá **homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých**.

Protože rozšířená matice soustavy (2.6), vznikla z matice $\mathbf{A}$ přidáním sloupce skládajícího se ze samých nul, je zřejmě $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, a tedy podle Frobeniovy věty soustava má vždy řešení:

Věta 2.26. Každá homogenní soustava lineárních rovnic (2.6) má řešení. Je jím vždy tzv. **nulové řešení** $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$.

Homogenní soustava lineárních rovnic (2.6) má buď jediné nulové řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení které lze zapsat s jedním nebo více parametry. Počet parametrů řešení je $n - h(A)$.

Příklad 2.27. Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

Řešení:
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /-\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Položíme-li $x_3 = t$, $x_4 = s$, pak daná soustava má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $(-3t+s, t-s, t, s)$, kde t, s jsou libovolná čísla.

2D. Determinanty

Čtvercové matice s „rovnými“ svislými závorkami, jaké užíváme pro absolutní hodnotu, nazýváme determinanty. Je to vlastně funkce, která čtvercové matici přiřadí skalár, tj. číslo. Determinanty byly dokonce používány dříve než matice v Číně v 3. století př. n.l. k řešení soustav lineárních rovnic. Eliminací lze zjistit, že soustava dvou lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 &= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

má řešení, právě když kombinace $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \neq 0$. Tato kombinace se nazývá determinant. I jednotlivá řešení lze vyjádřit pomocí determinantů, jak si ukážeme později. Řešení soustavy tří lineárních rovnic vede na podobné výrazy – determinanty matic typu $(3,3)$. Této metodě řešení SLR se říká Cramerovo pravidlo.

Obecná definice determinantu z matice libovolné velikosti n není jednoduchá. Než k ní přistoupíme, ukážeme si, jak se počítají determinanty stupně $n \leq 3$.

Definice 2.28. **Determinant** ze čtvercové matice $\mathbf{A}$ zapisujeme $|A|$ nebo $\det(\mathbf{A})$ nebo prostě $\det \mathbf{A}$. Determinanty stupně $1, 2, 3$ počítáme podle vzorců:

n=1 Determinant matice $\mathbf{A} = (a_{11})$ je číslo $\det(\mathbf{A}) = a_{11}$,

n=2 Determinant počítáme pomocí tzv. **křížového pravidla**

$$\det(\mathbf{A}) \quad = \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{2.7}$$

n=3 Determinant počítáme pomocí, tzv. **Sarrusova pravidla**

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})\,. \tag{2.8}$$

Poznámky:

V případě $n = 2$ je determinant podle křížového pravidla roven součinu prvků na hlavní diagonále „$\searrow$“ mínus součin prvků na vedlejší diagonále „$\swarrow$“.

V případě $n = 3$ determinant počítáme podle pravidla pojmenovaného podle francouzského matematika P. F. Sarruse (1798–1858). Vzorec (2.8) se dobře pamatuje, když pod matici s řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ připíšeme ještě dva řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ a sečteme součiny prvků na třech hlavních červených $\searrow$ diagonálách a odečteme součet součinů na třech vedlejších modrých $\swarrow$ diagonálách. Stejný výsledek dostaneme, když matici se sloupci se sloupci $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ rozšíříme o dva sloupce $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ a sčítáme součiny prvků na diagonálách jako v předchozím případě:

$$\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Pozor, v případě $n = 4$ **nelze užít** pravidlo „analogické“ Sarrusovu pravidlu, dostali bychom chybný výsledek, protože „diagonály“ hlavní i vedlejší jsou jenom čtyři a sčítanců je 24.

Matematická definice determinantu stupně n

Definice je založena na pojmu permutace, tj. „pořadí“ čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$:

Definice 2.29. Buď n přirozené číslo. **Permutací** (pořadím) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ nazveme uspořádanou n-tici čísel $p_i \in \mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$, přičemž každé číslo se v permutaci $\mathbf{p}$ vyskytuje právě jednou. Je to tedy bijekce $\mathbb{N}_n$ na sebe. Množinu všech permutací n čísel označíme symbolem $P(n)$:

$$P(n) := \{\mathbf{p} : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n \;:\; \mathbf{p} - \text{bijekce}\}.$$

Z kombinatoriky je známo, že množina $P(n)$ má $|P(n)| = n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ prvků.

Inverzí v permutaci $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ rozumíme dvojici (p_i, p_j), pro kterou platí $i < j$ a $p_i > p_j$. Pokud je počet inverzí v permutaci sudý, mluvíme o **sudé** permutaci, pokud je lichý, mluvíme o **liché** permutaci.

Znaménko permutace je $\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) := (-1)^{\textbf{počet inverzí}}$, tj. $\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = 1$ pro sudé permutace a $\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) := -1$ pro permutace liché.

Příklad: Permutace $(1, 2, 3, 4, 5)$ je permutace sudá a $\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = 1$, protože nemá žádnou inverzi. Naproti tomu permutace $(1, 4, 3, 2, 5)$ je lichá, protože obsahuje 3 inverze: $(4, 3)$, $(4, 2)$ a $(3, 2)$ a $\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = -1$.

Poznámka: Místo počtu inverzí můžeme k zjištění znaménka permutace použít počet výměn dvou členů permutace, pomocí které vedou k identické permutaci. Například u permutace $(1, 4, 3, 2, 5)$ stačí jediná výměna 4 s 2, která vede na identickou permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$, permutace je proto lichá.

Nyní můžeme přistoupit k definici determinantu libovolného stupně:

Definice 2.30. **Determinant** čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, n) je roven součtu

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{p} \in P(n)} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \cdots \cdot a_{np_n}. \tag{2.9}$$

Poznámky:

Definice dává stejné hodnoty pro $n \le 3$. Skutečně, pro $n = 2$ jsou jen dvě permutace: sudá $(1, 2)$ a lichá $(2, 1)$, proto

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\mathbf{p} \in P(2)} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) a_{1\mathbf{p_1}} a_{2\mathbf{p_2}} = \operatorname{sgn}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) a_{1\mathbf{1}} a_{2\mathbf{2}} + \operatorname{sgn}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) a_{1\mathbf{2}} a_{2\mathbf{1}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

V případě $n = 3$ v $P(3)$ máme 6 permutací: tři sudé $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ a tři liché $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$ a tudíž 6 sčítanců. Snadno lze ověřit, že dostáváme vzorec (2.8).

V případě $n = 4$ už máme součet $4! = 24$ součinů 4 čísel. Pomocí rozvoje podle zvoleného řádku (nebo sloupce) determinant stupně n lze převést na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$.

Definice 2.31. Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice stupně n.

Matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce označíme $\mathbf{A}_{ij}$.

Determinant $\det(\mathbf{A}_{ij})$ nazveme **subdeterminant** nebo též **minor** determinantu původní matice $\mathbf{A}$.

Věta 2.32. Laplaceova věta. Determinant stupně $n \ge 2$ lze rozepsat pomocí **rozvoje podle i-tého řádku** na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(\mathbf{A}_{in}), \tag{2.10}$$

nebo pomocí **rozvoje podle j-tého sloupce** opět na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj}) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(\mathbf{A}_{nj}). \tag{2.11}$$

Idea důkazu. Odvodíme vzorec pro rozvoj podle 1-tého sloupce. Množinu všech permutací $P(n)$ rozdělíme na n skupin permutací. První skupinu tvoří permutace s $p_1 = 1$. Vynecháme-li z těchto permutací první složku $p_1 = 1$, dostaneme množinu $(n-1)!$ permutací na množině $(2, 3, \ldots, n)$, kterou označme $P_1'(n-1)$. V součtu (2.9) každý sčítanec této skupiny začíná číslem a_{11}. Znaménko permutace $(1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ je stejné jako znaménko permutace $(p_2, p_3, \ldots, p_n)$. Součet členů s těmito permutacemi je

$$\sum_{\mathbf{p} \in P(n), p_1 = 1} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \cdots \cdot a_{np_n} = a_{11} \sum_{\mathbf{p}' \in P_1'(n-1)} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}') \cdot a_{2p_2} \cdot \cdots \cdot a_{np_n} = a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}).$$

Dostáváme tak první člen rozvoje (2.11) s $j = 1$ a $k = 1$.

Druhý člen s $j = 1$ a $k = 2$ dostaneme z druhé skupiny permutací s $p_1 = 2$, změní se však znaménko permutace: $\operatorname{sgn}(2, p_2, p_3, \ldots, p_n) = -\operatorname{sgn}(p_2, p_3, \ldots, p_n)$. Takto postupujeme dále s $p_1 = 3, \ldots, n$.

Příklad 2.33. Rozviňte následující determinant (a) podle druhého řádku a (b) podle třetího sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Řešení: (a) Rozvoj podle druhého řádku dává:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\mathbf{2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{5}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(b) Rozvoj podle třetího sloupce je výhodný, protože díky $a_{43} = 0$ poslední člen vypadne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{2} & 6 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 3 \\ 5 & 2 & \mathbf{3} & 1 \\ 4 & 1 & \mathbf{0} & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{0}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poznámky:

Pomocí rozvoje determinantu stupně 4 jsme dostali součet čtyř determinantů třetího stupně, které lze počítat pomocí Sarrusova pravidla, nebo každý znovu rozvést na součet 3 determinantů druhého stupně. Ovšem, v obou případech po dopočítání determinant vyjde stejně.

Tímto způsobem lze postupně každý determinant stupně n převést na součet n subdeterminantů stupně $n-1$, každý z nich na $n-1$ (tj. celkem $n(n-1)$) subdeterminantů stupně $n-2$, až se dostaneme na $n\cdot(n-1)\cdots 4$ subdeterminantů třetího stupně, které lze počítat pomocí Sarrusova pravidla jako součet 6 členů. Celkem tedy sčítáme $n!$ členů, tj. stejně jako při počítání podle definice: počet permutací $P(n)$ je $n!$

Pro velké n, například $n = 50$ je $50! \doteq 3\cdot 10^{64}$. Kdybychom uměli sečíst bilion sčítanců za vteřinu, trvalo by to řádově 10^{36} let, tj. mnohem déle než existuje vesmír.

Hodnota determinantu při řádkových úpravách

Pro výpočet „velkých“ determinantů nutno využít jinou metodu. Studujme proto, jak se mění determinant při elementárních řádkových úpravách matice.

Věta 2.34. Při elementárních řádkových úpravách matice $\mathbf{A}$ hodnota determinantu $\det(\mathbf{A})$

(a) změní znaménko při výměně dvou řádků,

(b) se vynásobí číslem c pokud jeden řádek vynásobíme číslem c,

(c) se nezmění, pokud k danému řádku přičteme násobek jiného řádku.

Důkaz. Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice stupně n, označme její řádky $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n$. Pro úsporu místa řádky budeme psát za sebou místo pod sebou: $\mathbf{A} = (\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}}$.

Ze vztahu (2.9) v Definici 2.30 je okamžitě vidět, že vynásobením i-tého řádku číslem c v každém sčítanci se a_{ip_i} nahradí $c\cdot a_{ip_i}$ a proto se celková hodnota determinantu vynásobí číslem c:

$$\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{c}\,\mathbf{r}_i,\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}\cdot\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_i,\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}}.$$

Výměnou dvou řádků se v součtu (2.9) změní znaménko každé permutace a proto hodnota determinantu změní znaménko, například

$$\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r_i},\dots,\mathbf{r_j},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}} = -\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r_j},\dots,\mathbf{r_i},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}}$$

Důsledkem předchozí vlastnosti je skutečnost, že matice s dvěma stejnými řádky dává determinant nulový. Skutečně, výměnou těchto řádků se má změnit znaménko determinantu, a přitom se matice nezměnila. Rovnost $c = -c$ platí jen když $c = 0$. Proto hodnota determinanty je nulová:

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j \quad (i \neq j) \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r},\dots,\mathbf{r},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}} = -\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r},\dots,\mathbf{r},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}} = 0.$$

Přičteme-li k i-tému řádku násobek c násobek k-tého řádku dostaneme dva determinanty:

$$\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r_i}+\mathbf{c}\,\mathbf{r_k},\dots,\mathbf{r_k},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}} = \det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r_i},\dots,\mathbf{r_k},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}} + \mathbf{c}\,\det(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r_k},\dots,\mathbf{r_k},\dots,\mathbf{r}_n)^{\mathrm{T}}$$

první je původní determinant a druhý determinant je nulový, protože má dva stejné řádky.

Poznámky:

Determinant je nulový, pokud obsahuje nulový řádek, nebo má dva stejné řádky, nebo jeden řádek je násobkem druhého. Protože navíc transponováním matice se hodnota determinantu nemění, lze determinant upravovat také pomocí elementárních sloupcových operací:

Věta 2.35. Transponováním matice se hodnota determinantu nemění: $\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{A})$.
Při elementárních sloupcových úpravách matice $\mathbf{A}$ hodnota determinantu $\det(\mathbf{A})$

(a) změní znaménko při záměně dvou sloupců,
(b) se vynásobí číslem c pokud jeden sloupec vynásobíme číslem c,
(c) se nezmění, pokud k danému sloupci přičteme násobek jiného sloupce.

Výpočet determinantu

V případě horní trojúhelníkové matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je determinant roven součinu prvků na diagonále:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Skutečně, protože v posledním řádku je jediný nenulový prvek a_{nn}, permutace dávající nenulový součin musí končit prvkem $p_n = n$. V předposledním řádku mimo členu v posledním sloupci, je jediný nenulový prvek $a_{n-1,n-1}$, proto jediná permutace, která dává nenulový součin, je $p_{n-1} = n-1$. Tak postupně zjistíme, že jediná permutace, která dává nenulový součin, je permutace identická $\mathbf{p} = (1, 2, \ldots, n)$.

Stejné tvrzení platí i pro dolní trojúhelníkovou matici. Protože každou matici lze upravit na trojúhelníkovou matici dostáváme následující návod k výpočtu determinantu:

Věta 2.36. Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vhodnými řádkovými nebo sloupcovými úpravami upravíme na **horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{A}^*$** s prvky $a^*_{11}, a^*_{22}, \ldots, a^*_{nn}$ na diagonále, přičemž
– při každé úpravě typu (a) (výměně dvou řádků nebo sloupců) **změníme znaménko** a
– při každém úpravě (b) (násobení řádku nebo sloupce $c_i \neq 0$) hodnotu determinantu **násobíme** $1/c_i$.
Potom

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^m \frac{1}{c_1 \ldots c_q} \, a^*_{11}\, a^*_{22} \ldots a^*_{nn}\,,$$

kde m je počet záměn dvojic řádků nebo sloupců a c_i jsou konstanty z úprav typu (b).

Příklad 2.37. Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A}$ následujícími metodami: (a) pomocí Sarrusova pravidla, (b) převodem na trojúhelníkovou matici, (c) rozvojem podle druhého řádku, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Podle Sarrusova pravidla je

$$\det(\mathbf{A}) = [2 \cdot 6 \cdot (-9) + (-3)(-7)(-5) + 8 \cdot 4 \cdot 4] - [8 \cdot 6 \cdot (-5) + (-3)4(-9) + 2(-7)4] =$$
$$= (-108 - 105 + 128) - (-240 + 108 - 56) = -85 + 188 = 103.$$

(b) Převodem na trojúhelníkovou matici pomocí řádkových úprav:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ / -2\mathbf{r}_1 \\ / +\frac{5}{2}\mathbf{r}_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 12 & -23 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ / +\frac{7}{24}\mathbf{r}_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 12 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{103}{24} \end{vmatrix} = \frac{1}{24}(2 \cdot 12 \cdot 103) = 103.$$

(c) Podle Laplaceovy věty 2.32 platí

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= (-4)(27 - 32) + 6(-18 + 40) + 7(8 - 15) = 20 + 132 - 49 = 103.$$

Poznámky: Srovnáním metod použitých v předchozím případě vychází Sarrusovo pravidlo jako nejrychlejší. V případě determinantů z velkých matic však vyjde metoda převodu na trojúhelníkovou matici jako jediná možná: při převodu matice stupně n na trojúhelníkovou potřebujeme řádově n^3 operací. Při $n = 50$ to vychází na $125\,000 = 1.25 \cdot 10^5$, což je proti $50! \doteq 3 \cdot 10^{64}$ podstatně méně.

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí determinantů

Determinanty lze využít i při řešení soustav lineárních rovnic ve speciálním případě, kdy je matice soustavy $\mathbf{A}$ čtvercová, tj. rovnic je stejný počet jako neznámých, a determinant z matice $\mathbf{A}$ je nenulový, tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$. K určení řešení nám poslouží následující tzv. Cramerovo pravidlo:

Věta 2.38. (Cramerovo pravidlo) Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, jejíž matice soustavy $\mathbf{A}$ mám nenulový determinant $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Potom soustava má jediné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, přičemž

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|},$$

kde matice $\mathbf{A}_j$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ nahrazením j-tého sloupce $\mathbf{s}_j$ sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$, tj.

$$|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{b}, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \ldots, \mathbf{s}_n|, \quad |\mathbf{A}_2| = |\mathbf{s}_1, \mathbf{b}, \mathbf{s}_3, \ldots, \mathbf{s}_n|, \quad \ldots, \quad |\mathbf{A}_1| = |\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \ldots, \mathbf{b}|.$$

Poznámky:

Cramerovo pravidlo má spíše teoretický význam, protože pro „větší“ n je výpočet determinantů numericky značně náročný. Na druhou stranu však metoda dává vzorec pro přímý výpočet jednotlivých neznámých, což může být někdy výhodné. Například v případě $n = 2$ a $|\mathbf{A}| \neq 0$ řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je dáno vzorci

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1\, a_{22} - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{22}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}\, b_2 - b_1\, a_{12}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{22}}.$$

Příklad 2.39. Cramerovým pravidlem určete řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{array}$$

Řešení: Spočítáme nejprve determinant matice soustavy, který určí, zda soustava má řešení. Pomocí Sarrusova pravidla dostáváme

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 12 \neq 0,$$

a proto matice $\mathbf{A}$ je regulární, tj. řešení existuje a je jediné.

Spočtěme si determinanty matic, ve kterých sloupec pravých stran postupně nahrazuje sloupec koeficientů:

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 12 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 12 - (-3) \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 = 24,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36, \qquad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60.$$

Po Cramerova pravidla tedy

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{24}{12} = 2, \qquad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{36}{12} = 3, \qquad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{60}{12} = 5.$$

Soustava má právě jedno řešení $\mathbf{x} = (2, 3, 5)^T$.

2E. Čtvercové matice

Čtvercové matice stejného stupně n mají zvláštní postavení mezi maticemi: lze je jako čísla nejen navzájem sčítat, ale i násobit bez omezení. U čísel číslo 1 hraje roli neutrálního prvku: pro každé číslo $x \in X$ platí $x\,1 = 1\,x = x$. U čtvercových matic stejnou roli hraje jednotková matice $\mathbf{E}$: pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}\,.$$

Inverzní operací k operaci násobení čísel je dělení čísel, dělit však můžeme jen číslem nenulovým. Pro každé nenulové číslo a existuje číslo b zvané převrácená hodnota takové, že $a\,b = b\,a = 1$. Značíme ho $\frac{1}{a}$ nebo a^{-1}. Je to vlastně řešením rovnice $a\,b = 1$.

U čtvercových matic analogicky zavedeme tzv. inverzní matici:

Definice 2.40. Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice typu (n, n). Čtvercová matice $\mathbf{B}$ typu (n, n) se nazývá maticí **inverzní** k matici $\mathbf{A}$, jestliže

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}\,. \tag{2.12}$$

Matici inverzní k matici $\mathbf{A}$ značíme $\mathbf{A}^{-1}$.

Na první pohled není z uvedené definice zřejmé, zda matice $\mathbf{B}$ inverzní k $\mathbf{A}$ existuje vždy, zda je určena jednoznačně a jak tuto matici vypočítat. K formulaci odpovědi nám pomůže teorie determinantů.

Věta 2.41. Buďte $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matice stejného stupně. Potom platí:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).$$

Protože determinant jednotkové matice E je roven 1, z podmínky (2.12) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}) = 1$ plyne, že jak $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, tak $\det(\mathbf{B}) \neq 0$. Ukáže se, že je to i podmínka postačující. Tyto matice nazveme regulární:

Definice 2.42. Matici $\mathbf{A}$ nazveme **regulární** jestliže $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Tuto důležitou vlastnost lze definovat i pomocí dalších podmínek:

Věta 2.43. Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ stupně n. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(a) Matice $\mathbf{A}$ je **regulární**, tj. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

(b) Matice $\mathbf{A}$ má **největší možnou hodnost** $h(\mathbf{A}) = n$.

(c) Matice $\mathbf{A}$ má **nezávislé řádky**.

(d) Matice $\mathbf{A}$ má **nezávislé sloupce**.

Co znamená podmínka $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$? Označme $\mathbf{b}_j$ j-tý sloupec matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{e}_j$ j-tý sloupec jednotkové matice E mající jedničku na j-tém místě, ostatní nuly. Potom rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$ představuje n soustav rovnic pro jednotlivé neznámé $\mathbf{b}_j$ s pravými stranami $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2\,, \quad \ldots \quad, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n\,.$$

Matice soustavy ve všech případech je matice $\mathbf{A}$, a proto podle Frobeniovy věty pokud hodnost matice $\mathbf{A}$ je maximální, tj. $h(\mathbf{A}) = n$, každá soustava má právě jedno řešení $\mathbf{b}_j$, které tvoří inverzní matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Dospěli jsme tak k větě:

Věta 2.44. Ke každé regulární matici $\mathbf{A}$ existuje právě jedna matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$.

Předchozí úvaha také dává způsob výpočtu inverzní matice. Protože všechny soustavy mají stejnou matici soustavy, zapíšeme je do jedné soustavy s n vektory pravých stran $\mathbf{e}_j$ a n vektory neznámých $\mathbf{b}_j$:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{tj. maticově} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}\,.$$

Výpočet potom probíhá tak, že rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ typu $(n, n+n)$ převedeme postupně řádkovými úpravami (tzv. Jordanovou eliminací) na tvar, kdy vlevo na místě matice $\mathbf{A}$ vznikne matice jednotková. Přitom vpravo na místě matice $\mathbf{E}$ vznikne matice inverzní $\mathbf{B}$, schématicky

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \quad \sim \quad \text{řádkové úpravy} \quad \sim \quad (\mathbf{E}|\mathbf{B}) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}).$$

Příklad 2.45. Vypočtěte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Řešení: Rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ postupně upravujeme řádkovými úpravami:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} / - 2\mathbf{r}_3 \\ / - \mathbf{r}_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} / - 3\mathbf{r}_2 \\ \\ / + 2\mathbf{r}_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ / + \frac{2}{5}\mathbf{r}_1 \\ / + \frac{4}{5}\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Druhá matice je hledaná inverzní matice:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice

Ukážeme si ještě jeden způsob výpočtu inverzní matice založený na pojmu adjungovaná matice:

Definice 2.46. Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice stupně n.
Označme $\mathbf{A}_{ij}$ matici vzniklou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. **Algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} nazveme číslo

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}),$$

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Transponovanou matici algebraických doplňků nazveme **adjungovanou maticí** k matici $\mathbf{A}$ a označíme:

$$\mathbf{A}^* = (d_{ij})^{\mathrm{T}}.$$

Z definice je vidět, že ke každé matici lze sestavit matici adjungovanou. Z následující vlastnosti je vidět, že adjungovaná matice má podobnou vlastnost jako matice inverzní a lze ji využít k výpočtu inverzní matice:

Věta 2.47. Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice. Potom **existuje matice adjungovaná $\mathbf{A}^*$** a platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}. \tag{2.14}$$

odkud v případě, že $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dostáváme vztah pro **výpočet inverzní matice**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\det(\mathbf{A})}\, \mathbf{A}^* \tag{2.15}$$

Důkaz. Naznačme důkaz rovnosti (2.14), která je podstatou výpočtu inverzní matice. Mějme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Prvky adjungované matice $\mathbf{A}^*$ označme a^*_{ij}. Algebraický doplněk prvku a_{ij} značíme $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$, kde $\mathbf{A}_{ij}$ je matice $\mathbf{A}$ bez i-tého řádku a j-tého sloupce. Proto platí $a^*_{ji} = d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$.

Uvažujme součin $\mathbf{B} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$. Prvek b_{ij} součinu $\mathbf{B}$ je

$$b_{ij} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(\mathbf{A}_{jk}) .$$

V případě $j = i$ podle Laplaceovy věty 2.32 je b_{ij} rovno rozvoji determinantu matice $\mathbf{A}$ podle $i = j$-tého řádku (2.10), tj. pro $i = j$ máme $b_{ij} = \det(\mathbf{A})$. V případě $j \neq i$ je to rozvoj determinantu matice, ve kterém je místo řádku $\mathbf{r}_j$ řádek $\mathbf{r}_i$, protože matice $\mathbf{A}_{jk}$ mají vynechaný j-tý řádek, místo něho mají řádek i-tý. Jde tedy o rozvoj determinantu s dvěma stejnými řádky, determinant je proto nulový. Dostáváme tak $b_{ij} = 0$ pro $j \neq i$. Matice $\mathbf{B}$ je tedy jednotková. Druhou rovnost $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ lze dokázat rozvojem determinantu podle sloupce.

Příklad 2.48. Vypočtěte adjungovanou matici $\mathbf{A}^*$ a inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici z Příkladu 2.45

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Adjungovanou matici podle (2.14) dostaneme transponováním matice algebraických doplňků:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Před výpočtem matice inverzní nejprve spočítáme determinant matice $\mathbf{A}$. Libovolná metoda výpočtu dává $\det(\mathbf{A}) = -5$. Matice $\mathbf{A}$ je tedy regulární a podle Věty 2.44 existuje k matici $\mathbf{A}$ matice inverzní. Pomocí (2.15) dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A}^* = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Dospěli jsme k matici stejné jako při výpočtu řádkovými úpravami v Příkladu 2.44.

Poznámky: Kterou metodou budeme počítat inverzní matice z „velké“ matice? K výpočtu adjungované matice stupně n potřebujeme spočítat n^2 determinantů stupně $n-1$. Vzhledem k náročnosti výpočtu determinantů velké matice, inverzní matice k velké matici lze počítat jedině pomocí řádkových úprav matice $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$.

Maticové rovnice

Podobně jako číselné rovnice např. $a \cdot x = b$ máme i maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, za předpokladu že matice mají takové typy, že dané operace a rovnosti jsou definované – mají „smysl“. Při řešení těchto rovnic opět budeme využívat úpravy, které nemění množinu všech řešení rovnice:

Věta 2.49. Ekvivalentní úpravy maticových rovnic Za předpokladu, že pro dané typy matic příslušné operace sčítání, násobení i relace rovnosti jsou definované při následujících úpravách se množina všech řešení maticové rovnice nemění:

(a) Přičtením stejné matice k oběma stranám rovnice.

(b) Násobením obou stran rovnice stejným nenulovým číslem.

(c) Násobením obou stran rovnice stejnou regulární maticí zleva.

(d) Násobením obou stran rovnice stejnou regulární maticí zprava.

Pozor, **násobení není komutativní, nelze měnit pořadí matic v součinu!**

Při řešení lze využívat také vlastnosti inverzní matice:

Věta 2.50. Pro regulární matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}\,, \qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\,, \qquad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\,.$$

Příklad 2.51. Soustava lineárních rovnic. Pomocí inverzní matice lze vyjádřit i řešení soustavy n lineárních rovnic pro n neznámých

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Řešení: Za předpokladu, že matice soustavy $\mathbf{A}$ je regulární, existuje matice inverzní $\mathbf{A}^{-1}$. Vynásobením obou stran rovnice zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$$

Protože $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$ dostáváme výsledek

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}.$$

Příklad 2.52. Řešte rovnice s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

(a) $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$,

(b) $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$,

(c) $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{D}$,

(d) $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$.

Za jakých předpokladů pro matice řešeníexistuje?

Řešení: Předpokládáme, že matice jsou typu (n, n). Pokud matice $\mathbf{A}$ je regulární, existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$:

(a) První rovnici vynásobíme maticí $\mathbf{A}^{-1}$ **zleva** a dostáváme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

(b) Druhou rovnici násobíme maticí $\mathbf{A}^{-1}$ **zprava** a dostáváme $\mathbf{X} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}^{-1}$.

(c) Pokud navíc $\mathbf{B}$ je regulární, po odečtení matice $\mathbf{C}$ třetí rovnici násobíme inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ **zleva** a inverzní maticí $\mathbf{B}^{-1}$ **zprava**. Dostáváme tak řešení $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C})\,\mathbf{B}^{-1}$.

(d) Pokud navíc $\mathbf{B}$ je regulární, čtvrtou rovnici násobíme maticí $\mathbf{A}$ **zleva** a maticí $(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$ **zprava**. Dostáváme tak řešení $\mathbf{X} = \mathbf{A}\,\mathbf{C}\,(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$.