1. Spočtěte následující nevlastní integrály:

a) $\int\limits_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x$; *[* $-\frac{1}{4}$ *]*

b) $\int\limits_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4} \, \mathrm{d}x$; *[diverguje]*

c) $\int\limits_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$; *[6]*

d) $\int\limits_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \, \mathrm{d}x$; *[6]*

e) $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x, \quad a, b > 0$; *[* $\frac{a}{a^2+b^2}$ *]*

f) $\int\limits_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$; *[* $\frac{1}{2}$ *]*

g) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$; *[* $\frac{3\pi^2}{32}$ *]*

h) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$; *[* $\frac{\pi}{2}$ *]*

i) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$; *[* π *]*

j) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$; *[2]*

u) $\int\limits_0^3 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$; *[ ]*

k) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$ *[* $\frac{1}{2}$ *]*

l) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$; *[diverguje]*

m) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)} \, \mathrm{d}x$; *[* $\frac{1}{2}\ln 2$ *]*

n) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x$; *[* ∞*, diverguje]*

o) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x$; *[* $\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ *]*

p) $\int\limits_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$; *[2]*

q) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} \, \mathrm{d}x$; *[* $\frac{\pi}{2}$ *]*

r) $\int\limits_1^\infty \cos x \, \mathrm{d}x$; *[diverguje]*

s) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^4+x^2} \, \mathrm{d}x$; *[* $1-\frac{\pi}{4}$ *]*

t) $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-3x} \, \mathrm{d}x$; *[* $\frac{1}{3}$ *]*

v) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, \mathrm{d}x$; *[6]*

2. Rozhodněte, pro která $k > 0$ konverguje, resp. diverguje integrál $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^k} \, \mathrm{d}x$.

pro $0 < k \leq 1$ *diverguje, pro* $k > 1$ *konverguje k číslu* $-\frac{1}{1-k}$

3. Rozhodněte, pro která $k > 0$ konverguje, resp. diverguje integrál $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^k} \, \mathrm{d}x$.

pro $k \geq 1$ *diverguje, pro* $0 < k < 1$ *konverguje k číslu* $\frac{1}{1-k}$

4. Rozhodněte, pro která $k > 0$ konverguje, resp. diverguje integrál $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-kx} \, \mathrm{d}x$.

pro všechna $k > 0$ *konverguje k číslu* $\frac{1}{k}$

5. Zjistěte celkový příjem vlastníka půdy (a jeho potomků) za období $\langle 0, \infty)$, jestliže výše renty je určena funkcí $f(t) = 3000\mathrm{e}^{-0{,}003t}$ kč, kde t je čas v letech. *[1 000 000,- Kč]*

6. Zjistěte, jaká kapitálová investice zabezpečí při 10% roční úrokové míře a spojitém úrokování časově neomezený příjem, který je určen hustotou příjmu $f(t) = 500t$, kde t je čas v letech. *[vstupní investice je 50 000,- Kč]*
Pozn.: Počáteční kapitálová investice K_0*, která zajišťuje příjem odpovídající hustotě příjmu* $f(t)$ *v časovém intervalu* $\langle 0, T\rangle$ *při p-procentní úrokové míře a spojitém úrokování je dána vztahem* $K_0 = \int\limits_0^T f(t)\mathrm{e}^{-it} \, \mathrm{d}t$*, kde* $i = p/100$*.*

7. Vypočtěte únikovou rychlost, kterou může těleso opustit gravitační pole Země.

[$v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa M_z}{R_z}}$ *]*

Věta **(Srovnávací kritérium pro konvergenci integrálů)**
Nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ v $\langle a, b)$, kde $f(x)$ je v levém okolí bodu b neohraničená a integrovatelná na všech $\langle a, c\rangle, a < c < b$. Pak platí:

$$\text{Konverguje-li integrál } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \text{ pak konverguje také } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$\text{Diverguje-li } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ pak diverguje i } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Na základě srovnávací kritéria rozhodněte o konvergenci integrálů:

a) $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+2)}{x}\,\mathrm{d}x$; *Srovnávat např. s* $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, *diverguje*

b) $\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$; *Srovnávat např. s* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, *konverguje*

c) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$; *Srovnávat např. s* $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ *nebo třeba s* $\int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{6}}{x}\,\mathrm{d}x$, *diverguje*

Věta **(Integrální kritérium pro konvergenci nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$)**
Nechť $f(x)$ je v intervalu $\langle a, \infty)$, $a > 0$ taková spojitá nezáporná nerostoucí funkce, že $f(n) = a_n$ pro skoro všechna přirozená n. Pak nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ zároveň konvergují nebo divergují.

9. Na základě integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci nekonečné řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$; *[diverguje]*

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$; *[konverguje]*

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$; *[diverguje]*

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$; *[konverguje]*