Tečná rovina:

1. Určete rovnici tečné roviny k funkcím:
   a) $z = 2x^2 + y^2$, v bodě $A = [1, 1, ?]$; *Výsledek:* $4x + 2y - z - 3 = 0$.
   b) $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$, v bodě $A = [1, ?, 2]$; *Výsledek:* $5x + y - z + 3 = 0$.
   c) $z = xy$, v bodě $A = [?, 2, 2]$; *Výsledek:* $2x + y - z - 2 = 0$.

2. K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ určete tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 1$. *Výsledek:* $4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$.

3. Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce:
   a) $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ v bodě $A = [2, -1, 1]$; *Výsledek:* $2x + 2y - z - 1 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
   b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ v bodě $A = [3, 4, -7]$; *Výsledek:* $17x + 11y + 5z - 60 = 0$, $x = 3 + 17t$, $y = 4 + 11t$, $z = -7 + 5t, t \in \mathbb{R}$.
   c) $z = \frac{1}{xy}$ v bodě $A[2; 3]$; *Výsledek:* $z = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}(x-2) - \frac{1}{18}(y-3)$, $\vec{n} = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{18}, -1\right)$.

4. Určete délku úseku přímky $x + 1 = 0$, $y - 4 = 0$ mezi grafem funkce $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ a tečnou rovinou ke grafu této funkce v bodě $A = [0, 2, 2]$.
   Výsledek: 5.

Taylorův polynom:

5. Vyjádřete funkci $f(x, y) = \cos x \cos y$ v bodě $[0, 0]$ Taylorovým polynomem druhého stupně.
   Výsledek: $T_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

6. Nalezněte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ v bodě $[0, 0]$.
   Výsledek: $T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

7. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $u = x^3 - 3yz^2 + 2xy - z^2 + x - 3y + 2$ v bodě $[1, 2, 1]$.
   Výsledek: $$T_3(x, y) = -5 + 8(x-1) - 4(y-2) - 14(z-1) + \frac{1}{2!}\left[6(x-1)^2 - 14(z-1)^2 + 4(x-1)(y-2) - 12(y-2)(z-1)\right] + \frac{1}{3!}\left[6(x-1)^3 - 18(y-2)(z-1)^2\right].$$

8. Vypočtěte Taulorův polynom stupně $m = 2$ funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2x + 4$ v bodě $[0, 0]$. Zamyslete se nad výsledkem. $T_2(x, y) = 4 - 2x + x^2 + 3xy$

9. Napište Taylorův polynom funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$ v bodě $[1, 1]$ pro $m = 3$.
   Výsledek: $$T_3(x, y) = 1 + (x-1) - (y-1) + \frac{1}{2!}[-2(x-1) + 2(y-1)^2] + \frac{1}{3!}[6(x-1)(y-1)^2 - 6(y-1)^3].$$

10. Napište Taylorův polynom funkce $f(x, y) = \frac{2x}{3y}$ v bodě $[1, -2]$ pro $m = 3$.
    Výsledek: $$T_3(x, y) = -\frac{1}{3} + \frac{-\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(y+2)}{1!} + \frac{1}{2!}[-\frac{1}{3}(x-1)(y+2) - \frac{1}{6}(y+2)^2] + \frac{1}{3!}[3(-\frac{1}{6})(x-1)(y+2)^2 - \frac{1}{4}(y+2)^3].$$

11. Funkci $z = x^y$ rozložte na součet a součin mocnin $(x-1)$ a $(y-1)$ do 3. řádu včetně.
    Výsledek: $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[(x-1)^2(y-1)]$

12. Nalezněte Taylorův polynom T stupně m funkce f v bodě A

a) $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = [0,0]$, $m = 2$ $\quad T = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

b) $f = \cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$, $A = [0,0,0]$, $m = 2$

$T = -xy - xz - yz$

c) $f = \mathrm{e}^x \sin y$, $A = [0,0]$, $m = 3$ $\quad T = y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$

d) $f = \cos x \cos y$, $A = [0,0]$, $m = 4$ $\quad T = 1 - \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$

e) $f = \mathrm{e}^{x+y}$, $A = [1,-1]$, $m = 3$

$T = 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!} + \frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$

f) $f = \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x-y}$, $A = [0,0]$, $m = 1$ $\quad T = \frac{\pi}{4} + x - xy$

g) $f(x,y) = \frac{2x}{3y}$, $A[1,-2]$, $m = 3$

$T_3^A(x,y) = -\frac{1}{3} + \frac{-\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(y+2)}{1!} + \frac{-\frac{1}{3}(x-1)(y+2) - \frac{1}{6}(y+2)^2}{2!} + \frac{3\left(-\frac{1}{6}\right)(x-1)(y+2)^2 - \frac{1}{4}(y+2)^3}{3!}$

h) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 2x + 4$, $A[0,0]$, $m = 2$ $\quad T_2^A(x,y) = x^2 + 3xy - 2x + 4$