

## 6. Funkce zadané implicitně

**Příklad 1.** Určete první derivaci funkce  $y = f(x)$  zadané implicitně rovnicí:

a)  $xy - \ln y = a;$

$$[y' = \frac{y^2}{1-xy}]$$

b)  $y^x = x^y;$

$$[y' = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1}]$$

**Příklad 2.** Určete první a druhou derivaci funkce  $y = f(x)$  zadané implicitně rovnicí:

a)  $x = y - 4 \sin y;$

$$[\frac{1}{1-4 \cos y}, -\frac{4 \sin y}{(1-4 \cos y)^3}]$$

b)  $x - \ln y - y^2 = 0;$

$$[\frac{y}{1+2y^2}, \frac{y+2y^3-4y^2}{(1+2y^2)^3}]$$

c)  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0;$

$$[\frac{x+y}{x-y}, \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}]$$

d)  $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0;$

$$[-\frac{x}{y}, -\frac{x^2+y^2}{y^3}]$$

e)  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0;$

$$[-\frac{y}{x}, \frac{2y}{x^2}]$$

f)  $y^3 - 2xy + x^2 = 0;$

$$[\frac{2y-2x}{3y^2-2x}, \frac{4y'-2-6yy'^2}{3y^2-2x}]$$

**Příklad 3.** Rozhodněte, zda funkce  $y = f(x)$  zadaná implicitně rovnicí  $x^4 - xy + y^4 = 1$  je pro  $x = 0$  a  $y = 1$  rostoucí nebo klesající a konvexní nebo konkávní. Výsledek tohoto vašeho rozhodnutí sdělte neprodleně vedoucímu cvičení.

[Je rostoucí a konkávní.]

**Příklad 4.** Vypočtěte parciální derivace funkce  $z = g(x, y)$  zadané implicitně rovnicí:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4 = 0;$

$$[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-x}{z-xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-y}{z-xy}]$$

b)  $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0;$

$$[\frac{8x+y+1}{6z+y}, \frac{x+4y-z}{y+6z}]$$

c)  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a;$

$$[\frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}, \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}]$$

d)  $e^z + x^2y + z + 5 = 0;$

$$[-\frac{2xy}{e^z+1}, -\frac{x^2}{e^z+1}]$$

**Příklad 5.** Určete tečnou rovinu v bodě  $A$  ke grafu funkce  $z = f(x, y)$  zadané implicitně následující rovnicí:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, -3];$

$$[2x - 6y - 3z - 49 = 0]$$

b)  $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0, A = [1, -2, 4];$

$[x - 6y - 6z + 11 = 0]$

c)  $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, A = [2, 2, 1];$

$[x + y - 4z = 0]$

**Příklad 6.** Funkce  $y = f(x)$  je implicitně určena rovnicí  $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ . Nalezněte takové  $x$ , aby  $f'(x) = 0$ .


$[2 \cdot 2^{1/3}]$

**Příklad 7.** Určete lokální extrémy funkce  $y = f(x)$  zadané implicitně rovnicí:

a)  $x^3 + y^3 - 3xy = 0;$

$[ \text{maximum pro } x = 4^{1/3} ]$  

b)  $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0; ;$

$[ \text{maximum pro } x = 1, x = -1 ]$  

**Příklad 8.** Rozhodněte, zda funkce  $y = f(x)$  zadaná implicitně rovnicí  $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$  je pro  $x = y = 1$  konvexní nebo konkávní.

$[ \text{Je konkávní.} ]$

**Příklad 9.** Určete rovnici tečny a normály v bodě  $A$  ke grafu funkce  $y = f(x)$  zadané implicitně rovnicí:

a)  $xy + \ln y - 1 = 0, A = [1, 1];$

$[x + 2y - 3 = 0, 2x - y - 1 = 0]$

b)  $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0, A = [1, 2];$

$[14x - 13y + 12 = 0, 13x + 14y - 41 = 0]$

**Příklad 10.** Určete první a druhý diferenciál funkce  $z = f(x, y)$  zadané implicitně rovnicí:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$

$[dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy, d^2z = \frac{y^2 - a^2}{z^3}dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}dxdy + \frac{x^2 - a^2}{z^3}dy^2]$

b)  $\ln z = x + y + z - 1;$

$[dz = \frac{z}{1-z}(dx + dy), d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2 + 2dxdy + dy^2)]$

**Příklad 11.** Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce  $z = f(x, y)$  zadané implicitně rovnicí  $z^3 - 2xz + y = 0$  v bodě  $[1, 1]$ . Přitom funkční hodnota v tomto bodě je  $z = 1$ .

$[T = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2]$