

1. Zapište pouze meze pro výpočet dvojného integrálu $\iint_{\Omega} dx dy$ a integrál nepočítejte:

- (a) $\Omega : x = 1, x = 2, y = 3, y = 6.$
- (b) $\Omega : x = 1, x = 2, y = 2, y = -x + 7.$
- (c) $\Omega : y = x^2 + 1, y = x - 1, 0 \leq x \leq 1.$
- (d) $\Omega : y^2 = x, 1 \leq x \leq 3.$
- (e) $\Omega : y \leq x^2, y \leq -x + 2, y \geq 0, x \geq 0.$
- (f) $\Omega : y \geq x^2, y \leq -x + 2, x \geq 0.$
- (g) $\Omega : y^2 = x, y = x - 2.$
- (h) $\Omega : y \geq x, y \leq 5 - x^2, x \leq 0.$
- (i) $\Omega : y \leq e^x + 1, -2 \leq x \leq 1, y \geq -2.$
- (j) $\Omega : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \sqrt{3}x, y \geq 0.$
- (k) $\Omega : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|.$

Poznámka: Některé integrály zkuste vyjádřit jak vzhledem k ose x a také vzhledem k ose y .

- 2. Spočítejte $\iint_{\Omega} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x.$ $[\frac{196}{3}]$
- 3. Spočítejte $\iint_{\Omega} y dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0.$ $[\frac{81}{5}]$
- 4. Spočítejte $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x.$ $[e^2 - \frac{3}{2}]$
- 5. Spočítejte $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0.$ $[\frac{1}{20}]$
- 6. Zapište transformační vztahy pro polární souřadnice a vypočítejte jakobián této transformace.
- 7. Spočítejte $\iint_{\Omega} \arctg \frac{y}{x} dx dy$, kde $\Omega: \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$ $[\frac{\pi^2}{6}]$
- 8. Spočítejte $\iint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |x| \leq y.$ $[\frac{15\pi}{8}]$
- 9. Spočítejte $\iint_{\Omega} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $y \geq 0, \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2.$ $[-3\pi^2]$
- 10. Spočítejte $\iint_{\Omega} e^{-x^2 - y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$ $[-\frac{\pi}{4e} + \frac{\pi}{4}]$
- 11. Spočítejte $\iint_{\Omega} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 \leq y, y \geq x, x \geq 0.$ $[\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}]$
- 12. Spočítejte $\iint_{\Omega} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 \leq -4x, x^2 + y^2 \geq 4, y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x.$ $[\frac{\pi}{3}]$

Často používané integrály:

$$\int \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce :} \\ 2x = t \\ 2 dx = 1 dt \end{array} \right| = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t) + C = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce :} \\ \cos x = t \\ -\sin x dx = 1 dt \end{array} \right| = \\ &= -\int 1 - t^2 dt = -\left(t - \frac{t^3}{3} \right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$