Aplikace dvojného integrálu (kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota):

a) $S(M) = \iint_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... obsah rovinného obrazce M.

b) $m(M) = \iint_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... hmotnost rovinného obrazce M.

c) $P(M) = \iint_M \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... plošný obsah části plochy $z = f(x,y)$ nad obrazcem M.

d) $S_x(M) = \iint_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... statický moment rovinného obrazce M vzhledem k ose x.

$S_y(M) = \iint_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... statický moment rovinného obrazce M vzhledem k ose y.

e) $T(M) = \left[\frac{S_y(M)}{m(M)}, \frac{S_x(M)}{m(M)}\right]$ ... těžiště rovinného obrazce M

f) $I_x(M) = \iint_M y^2\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... moment setrvačnosti rovinného obrazce M vzhledem k ose x.

$I_y(M) = \iint_M x^2\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... moment setrvačnosti rovinného obrazce M vzhledem k ose y.

$I_z(M) = \iint_M (x^2+y^2)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... moment setrvačnosti rovinného obrazce M vzhledem k počátku.

g) $V(M) = \iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... objem kolmého válce nad rovinným obrazcem M, který je shora omezený plochou $z = f(x,y)$.

1. a) Dvojným integrálem vypočtěte obsah rovinné oblasti M, dané nerovnostmi $x^2+y^2 \geq 1$, $x^2+y^2 \leq$ $\leq 2y$, $y \geq x$. $\left[\frac{7\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}+2}{4}\right]$

   b) Spočtěte si obsah vhodné části kruhu běžným vzorcem a porovnejte jej s vaším výsledkem. Vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

2. Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$. $[\,\pi + 3\sqrt{3} - 6\,]$

3. Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $y = 0$, $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 4x$. $[\,\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\,]$

4. Určete obsah plochy ohraničené lemniskátou $\left(x^2+y^2\right)^2 = 18\left(x^2-y^2\right)$ a kružnicí $x^2+y^2 = 6x$. $[\,9\pi - 9\,]$

5. Spočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $x^2+y^2 \leq y$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

6. Pomocí dvojného integrálu určete objem tělesa daného nerovnostmi $x \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq$ $\leq x^2+y^2$. $[\,\frac{1}{4}\pi\,]$

7. Část elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v prvním kvadrantu je pokryta hmotou tak, že plošná hustota $\sigma(x,y)$ je přímo úměrná x-ové souřadnici. Určete její hmotnost. $[\,\frac{ka^2b}{3}\,]$

8. Určete těžiště homogenního rovinného obrazce daného nerovnostmi $y \geq 0$, $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$.

9. Určete těžiště nehomogenního rovinného obrazce daného nerovnostmi $y \geq 0$, $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$. Hustota je přímo úměrná vzdálenosti od osy x.

10. Určete těžiště homogenní plochy ohraničené křivkou $y^2 = x^2 - x^4$ pro $x \leq 0$. $[\,T\left[\frac{3\pi}{16}, 0\right]\,]$

    Nápověda: Pokuste se plochu alespoň zhruba namalovat a popřemýšlejte o případné symetrii.

11. Určete těžiště homogenní plochy ohraničené parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 1$. $[\,T\left[0, \frac{3}{5}\right]\,]$

12. Vypočtěte moment setrvačnosti kruhu $x^2+(y-3)^2 \leq 9$ vzhledem k jeho tečně v bodě $[0,0]$. $[\,\pi\frac{127}{4}\,]$

    Nápověda: Použijte raději posunuté polární souřadnice.

13. Spočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$. $[\,\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\,]$

14. Spočtěte hmotnost a těžiště nehomogenní plochy dané nerovnostmi $x^2+y^2 \leq -4y$, $x \leq 0$, je-li její plošná hustota přímo úměrná vzdálenosti od počátku. $[\,m = \frac{128}{9}k,\ T\,[-0,9; -2,4]\,]$

Užitečné vztahy:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ...