Aplikace trojného integrálu (kde $\varrho(x,y,z)$ je prostorová hustota):

a) $V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... objem tělesa Ω.

b) $m(\Omega) = \iiint_\Omega \varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... hmotnost tělesa Ω.

c) $S_{xy}(\Omega) = \iiint_\Omega z\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... statický moment tělesa Ω vzhledem k rovině $z=0$.

$S_{xz}(\Omega) = \iiint_\Omega y\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... statický moment tělesa Ω vzhledem k rovině $y=0$.

$S_{yz}(\Omega) = \iiint_\Omega x\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... statický moment tělesa Ω vzhledem k rovině $x=0$.

e) $T(\Omega) = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}\right]$ ... těžiště tělesa Ω.

f) $I_x(\Omega) = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k ose x.

$I_y(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k ose y.

$I_z(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k počátku.

1. a) Trojným integrálem určete objem tělesa daného nerovnostmi $2 \le z \le 4 - x^2 - y^2$, $y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}x, x \ge 0$. *[* $\frac{\pi}{3}$ *]*
   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.
2. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ a $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$. *[* $\frac{2\pi r^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *]*
   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.
3. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $z \le 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$, $y \ge |x|$. *[* $\frac{\pi}{8}$ *]*
   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.
4. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $6 - 2y \le z \le 9 - x^2 - y^2$. *[* 8π *]*
   Nápověda: Průmětem rovinného řezu na paraboloidu do roviny kolmé k ose rotace je kružnice.
   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.
5. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $z \ge 0$, $x^2+y^2 \le 2y$, $z \le x^2+y^2$. *[* $\frac{3}{2}\pi$ *]*
   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.
6. Vypočtěte hmotnost tělesa omezeného soustřednými kulovými plochami o poloměrech r a R, kde $r < R; r, R \in \mathbf{R}$. Prostorová hustota je nepřímo úměrná vzdálenosti od středu kulových ploch.
   [$2k\pi\left(R^2 - r^2\right)$, *kde* k *je koeficient nepřímé úměrnosti]*
7. Určete těžiště jehlanu omezeného rovinami $x=0, y=0, z=0$ a $x+y+z=1$. *[* $T\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ *]*
8. Určete moment setrvačnosti homogenního rotačního kuželu $9 - \sqrt{x^2+y^2} \le z$, $z \ge 0$.
   a) vzhledem k ose z; *[* $\frac{9^5}{10}\pi$ *]*
   b) vzhledem k ose x.
9. Spočtěte těžiště nehomogenního tělesa $\Omega: x^2+y^2 \le 1, \quad z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $z \ge 0$. Hustota je přímo úměrná vzdálenosti od roviny xy. *[* $T\left[0, 0, \frac{8}{15}\right]$ *]*
10. Vypočtěte hmotnost nehomogenního tělesa Ω s hustotou $\varrho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}$.
    $\Omega: x^2+y^2+z^2 \ge 1, \quad x^2+y^2+z^2 \le 4$.
11. Vypočtěte těžiště homogenního tělesa $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 2, \quad z \ge x^2+y^2$.
12. Určete objem tělesa omezeného shora parabolickým válcem $z = 4 - y^2$ a zdola eliptickým paraboloidem $z = x^2 + 3y^2$.

Poznámka:
Doporučujeme umět bez zaváhání spočítat tyto integrály:

$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos 2x\mathrm{d}x$, $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$, ...

s využitím:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ...