Křivkový integrál 1. druhu =neorientovaný křivkový integrál

Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

a) $L(\Gamma) = \int_\Gamma 1\mathrm{d}s$ ... délka křivky Γ;

b) $P(\Gamma) = \int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$ ... plošný obsah válcové plochy nad rovinnou křivkou Γ shora ukončený plochou $z = f(x,y)$;

c) $m(\Gamma) = \int_\Gamma \mu(x,y)\mathrm{d}s$ ... hmotnost rovinné křivky Γ s lineární (délkovou) hustotou $\mu(x,y)$.

1. Zapište dvě libovolné parametrizace:

   (a) Úsečka AB, kde $A[-1,6]$, $B[2,-1]$.

   (b) Horní polovina kružnice $x^2 + y^2 = 16$.

   (c) Levá část elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$.

   (d) Parabola $y = -x^2 + 2$ pro $-1 \le x \le 2$.

   (e) Prostorová křivka splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y = \sqrt{3}x$.

Spočtěte následující integrály:

2. $\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}s$, kde Γ je obvod trojúhelníka ABC, $A[0,0]$, $B[0,2]$, $C[1,0]$. $[\frac{3\sqrt{5}}{2}]$

3. $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}$. $[\frac{13}{4}]$

4. $\int_\Gamma (5 - x^2 + 3y^2 - 2xy)\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\}$. $[36\pi]$

5. $\int_\Gamma \sqrt{2y^2 + z^2}\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = y, x \le 0, z \ge 0\right\}$. $[2\pi]$

6. Určete délku cykloidy, která je dána parametrickými rovnicemi $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \le t \le 2\pi$. $[8]$

7. Určete délku evolventy kružnice dané parametrickými rovnicemi $x = r(\cos t + t\sin t), y = r(\sin t - - t\cos t), t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. $[2\pi^2 r]$

8. Určete délku jednoho závitu šroubovice, která je dána parametrickými rovnicemi $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t, z = \frac{3}{2\pi}t, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. $[\sqrt{16\pi^2 + 9}]$

9. Určete těžiště homogenní části kružnice se středem v počátku a poloměrem 4, pro $y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}x$ a $y \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}x$. $[\left[0, \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\right]]$

10. Určete těžiště horní poloviny kružnice $x^2+y^2 = x$, jestliže její délková hustota je přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku. $[[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]]$

11. Určete statický moment $S_y = \int_\Gamma x\mu(x,y)\mathrm{d}s$ homogenní křivky $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 3y = 2x\sqrt{x}, 0 \le x \le 4\right\}$. $[\frac{100\sqrt{5}+4}{15}]$

12. Určete hmotnost části kružnice $x^2 + y^2 = 2x, y \ge 0$, je-li její délková hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku. $[4]$