# Křivkový integrál 2. druhu =orientovaný křivkový integrál

**Aplikace křivkového integrálu 2. druhu**

a) $A(\Gamma) = \int_\Gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{s} \dots$ práce, kterou vykoná síla $\vec{f} = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ podél orientované křivky $\Gamma$.

**Tvrzení Greenovy věty**

$$\oint_\Gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{s} \equiv \int_\Gamma f_1(x,y)\mathrm{d}x + f_2(x,y)\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. $\int_\Gamma -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\right\}$ je orientována tak, že bod $[2,0]$ je počátečním bodem. *[ $-2\pi$ ]*

2. $\int_\Gamma \left(x - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 1 \leq x \leq 2\right\}$, kde bod $[1,1]$ je počátečním bodem. *[ $\frac{14}{3} - \ln 4$ ]*

3. $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, kde $\Gamma = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$ je orientována tak, že nad osou $x$ je počáteční bod. *[ $\frac{1}{6}$ ]*

4. $\int_\Gamma (xy - y^2)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4x, 0 \leq x \leq 1\right\}$, kde počáteční bod je $[1,2]$. *[ $-\frac{44}{15}$ ]*

5. $\int_\Gamma y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0\right\}$ je orientována tak, že bod $[1,0]$ je počátečním bodem křivky. *[ $\pi$ ]*

6. $\int_\Gamma y(x^2+1)\mathrm{d}x + x(y^2-1)\mathrm{d}y$, kde $\Gamma$ je hranice oblasti $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0\right\}$ a je orientována kladně. *[ $-\frac{3}{2}\pi$ ]*

7. $\int_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (xy - y^2)\mathrm{d}y$, kde $\Gamma$ je hranice oblasti $\Omega = \left\{[x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\right\}$ a je orientována kladně. *[ $0$ ]*

8. Mějme homogenní elektrické pole popsané vektorovou veličinou $\vec{E} = (2,0)$ N$\cdot$ C$^{-1}$, kterou nazýváme intenzita elektrického pole. Toto pole pusobí na kladně nabitou testovací částici s nábojem $Q_0$ silou $\vec{F} = Q_0 \cdot \vec{E}$. Určete práci $W$ (tj. $W = \int_\Gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$), kterou tato síla $\vec{F}$ vykoná při přesunu částice $Q_0$ z bodu $A[-1,-1]$ do bodu $B[2,8]$ po:
   (a) přímce, která body $AB$ spojuje; *[6 $Q_0$ J]*
   (b) po křivce $y = x^3$; *[6 $Q_0$ J]*
   (c) zkuste popřemýšlet o souvislosti částí a) a b) a vyslovte závěr, proč si myslíte, že to tak vyjít muselo. *Nápověda: Zvažte, zda je dané elektrické pole konzervativní (tj. zda pro vektorovou funkci $\vec{F} = (f_1, f_2)$ platí podmínka* **rot** *$\vec{F} = \vec{o}$, tzn. zda platí $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$)?*

9. Mějme homogenní magnetické pole vyplňující válcový objem o poloměru $R = 8,5$ cm, charakterizované změnou velikosti magnetického indukce $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0,13$ T$\cdot$s$^{-1}$.
   (a) Určete vztah pro velikost $E$ intenzity indukovaného el. pole $\vec{E}$ v bodech o vzdálenosti $r$ od osy mag. pole. *[$E(r) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}$]*
   *Nápověda: Faradayuv zákon říká $\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$; víme, že velikost $E$ je pro dané $r$ konstantní; víme, že vektory $\vec{E}$ a $\mathrm{d}\vec{s}$ svírají úhel $0°$; víme, že mag. tok $\Phi_B = \int_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S}$; víme, že vektory $\mathrm{d}\vec{S}$ a $\vec{B}$ svírají úhel* $180°$.
   (b) Určete velikost $E$ intenzity $\vec{E}$ pro $r = 5,2$ cm. *[$E(2,5$ cm$) = 0,00338$ V$\cdot$m$^{-1}$]*