Aplikace plošného integrálu 2. druhu

$T(\mathscr{S}) = \iint_{\mathscr{S}} \vec{v}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}$ vyjadřuje tok rychlostního pole $\vec{v}(x,y,z)$, což je například vektor rychlosti kapaliny proudící jednoduchou hladkou orientovanou plochou $\mathscr{S}$.

1. Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočtěte tok vektoru $\vec{v} = (0, 4\frac{m}{s}, 0)$ plochou $\mathscr{S} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 2 \le z \le 5\}$. Normála míří ve směru osy y. $[12\frac{m^3}{s}]$

2. Spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathscr{S} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ \ 0 \le z \le 1\}$. Normála míří ven. $[2\pi]$

3. Spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathscr{S} = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ \ z \le 2\Big\}$. Normála míří ven. $[-4\pi]$

4. Spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, kde $\mathscr{S} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ z \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Normála míří dovnitř. $[-\frac{64}{15}]$

5. Spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, kde $\mathscr{S} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0,\ y \le 0\}$. Normála míří ven. $[\frac{16}{3}\pi]$

Stokesova věta

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{rot}\vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

6. Pomocí Stokesovy věty spočtěte $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, kde $\Gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ \ x + z = 1\}$. Γ je orientována proti oběhu hodinových ručiček. $[-2\pi]$

7. Pomocí Stokesovy věty spočtěte $\int_{\Gamma} x^2y^2\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, kde Γ je hranicí plochy $\mathscr{S} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 \le 16,\ y \ge 0\}$ a je orientována proti oběhu hodinových ručiček. $[-\frac{4096}{15}]$

Gaussova–Ostrogradského věta

$$\iint_{\mathscr{S}} \vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Aplikace

$V(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\mathscr{S}}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}$ vyjadřuje objem tělesa Ω, jehož hranici tvoří plocha $\mathscr{S}$.

8. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je povrch čtyřstěnu omezeného rovinami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$. Normála míří ven. $[\frac{1}{2}]$

9. Vypočtěte tok kapaliny přes boční stěny čtyřstěnu $ABCD$ s podstavou ABC. $A[0,0,0]$, $B[2,0,0]$, $C[0,1,0]$, $D[0,0,2]$. Stěny jsou orientovány ve směru vnější normály a vektor proudění $\vec{v} = (yz, xy, xy)$. $[\frac{1}{3}]$

10. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint_{\mathscr{S}} (x^2, y^2, z^2)\ \mathrm{d}\vec{S}$, kde plocha $\mathscr{S}$ je vnější strana povrchu kvádru $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$. Normála míří ven z kvádru. $[abc(a+b+c)]$

11. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint\limits_{\mathscr{S}} (x^2yz, xy^2z, \sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je plášť tělesa $\Omega = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\Big\}$. Normála míří ven. $[\frac{4}{3}]$

12. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint\limits_{\mathscr{S}} (x^2, y^3, z)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je plášť tělesa $\Omega = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 9,\ 2 \le z \le 6,\ y \ge |x|\big\}$. Normála míří ven. $[\frac{9}{4}(54+31\pi)]$

13. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\iint\limits_{\mathscr{S}} (xy, z, yz)\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde $\mathscr{S}$ je plášť tělesa $\Omega = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le -x+y+2\big\}$. Normála míří ven. $[\frac{781}{12}]$