Limita funkce

20. srpna 2007

- 1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x+2}{x-2}$

- 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

- 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

- 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Příklad 1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x+2}{x-2}$$

Příklad 1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x+2}{x-2}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to 4} \frac{3\cdot\cancel{6}+2}{4-2}$

Dosazením zjistíme, že funkce v limitě je spojitá v bodě 4, stačí tedy spočítat hodnotu po dosazení.

Příklad 1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x+2}{x-2}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to 4} \frac{3\cdot\cancel{6}+2}{4-2} = 7$

Příklad 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$$

Příklad 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$

Úprava čitatele podle vzorce $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ a jmenovatele podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Příklad 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

Výraz $x^2 - 1$ jsme opět upravili podle již zmíněného vzorce

Příklad 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Zbavili jsme se v čitateli i jmenovateli problémového kořene $x = 1$

Příklad 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)} =$
$= \frac{3}{4}$

Stačilo do výrazu dosadit $x = 1$, výraz jako funkce už je spojitý v tomto bodě.

Příklad 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení: $\left[\dfrac{\sin 3x}{\cos 4x} = \dfrac{3}{4} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

Nejprve provedeme tuto algebraickou úpravu výrazu.

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení: $\left[\dfrac{\sin 3x}{\cos 4x} = \dfrac{3}{4} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4} \frac{(\sin 3x)/3x}{(\cos 4x)/4x} =$$

Hodnota limity se touto úpravou nezmění. .

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení: $\left[\frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \frac{3}{4}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4}\frac{(\sin 3x)/3x}{(\cos 4x)/4x} = \frac{3}{4}\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)/3x}{\lim\limits_{x\to 0}\cancel{(\sin 4x)/4x}}$$

Jelikož je limita jmenovatele pro $x \to 0$ různá od nuly, můžeme počítat zvlášť limitu čitatele a jmenovatele.

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Řešení: $\left[\dfrac{\sin 3x}{\cos 4x} = \dfrac{3}{4} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\cos 4x}{4x}} \right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4} \frac{(\sin 3x)/3x}{(\cos 4x)/4x} = \frac{3}{4} \frac{\lim\limits_{x\to 0} (\sin 3x)/3x}{\lim\limits_{x\to 0} (\sin 4x)/4x} = \frac{3}{4}$$

Jelikož platí $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ pro libovolné u, je limita v čitateli i jmenovateli rovna 1.

Příklad 4. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Příklad 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x}$

Celý výraz rozšíříme zlomkem $\frac{1}{x}$.

Příklad 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}$

Protože limita jmenovatele nebyla 0, mohli jsme provést tuto úpravu. Dále je zřejmé, že $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x) = 0$.

Příklad 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$

Řešení: $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}(1/x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$