Verze 12. prosince 2016

4. Funkce

S pojmem funkce jsme se setkali již v Kapitole 1F Zobrazení. Připomeňme základní pojmy. Zobrazení z množiny X do množiny Y je formálně podmnožina $\mathcal{F}$ kartézského součinu $X \times Y$ (množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in X$ a $y \in Y$) splňující vlastnost: $[x, y_1], [x, y_2] \in \mathcal{F} \Rightarrow y_1 = y_2$, tj. pro každé x existuje nejvýše jedno y, že $[x, y] \in \mathcal{F}$. Množina $\mathcal{F}$ tak jednoznačně určuje předpis $f : x \mapsto y = f(x)$. Místo $[x, y] \in \mathcal{F}$ tak píšeme $y = f(x)$. Prvku x říkáme **vzor** a prvek $y = f(x)$ je **obraz** prvku x v zobrazení f.

Pokud X a Y jsou množiny číselné, zobrazení obvykle nazýváme **funkce**. Proměnné x říkáme **nezávislá proměnná** a y je **závislá proměnná**.

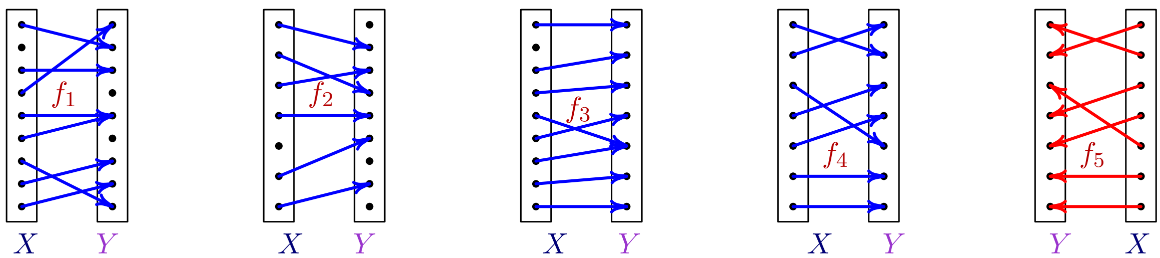
Definiční obor $\mathcal{D}(f)$ funkce f je množina všech x, která mají svůj **obraz** (**funkční hodnotu**) y, a **obor hodnot** $\mathcal{H}(f)$ je množina všech hodnot $y = f(x)$. Pokud dvě funkce nemají stejný definiční obor, považujeme je za různé, i když je určuje stejný „předpis“. Například funkce $x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}$ je jiná funkce než $x \mapsto x^2,\ x \in (0, \infty)$.

Dále řekneme, že funkce F je **rozšíření** (**extenze**) funkce f (a současně f je **zúžením** (**restrikce** funkce F)), pokud $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(F)$ a $F(x) = f(x)\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$. Funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ lze **složit**, pokud $\mathcal{H}(f) \subset \mathcal{D}(g)$. Složená funkce $g \circ f$ (čti g „po“ f) je daná vztahem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Připomeňme dále, že funkce $f : X \to Y$ s $\mathcal{D}(f) = X$ je

(a) **prostá** (**injektivní**), pokud různé x dávají různé $y = f(x)$, tj. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,

(b) **na** Y (**surjektivní**), pokud obor hodnot je celé Y, tj. $\mathcal{H}(f) = Y$,

(c) **vzájemně jednoznačná** (**bijektivní**), pokud f je prostá i na Y.

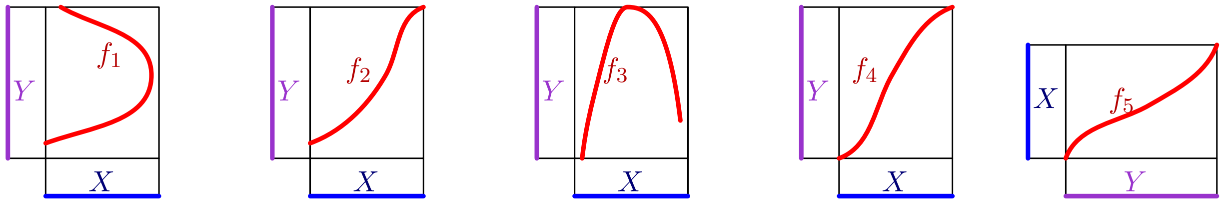


Obr. 4.1: „Šipkové“ diagramy funkce (zobrazení). f_1 je funkce $X \to Y$, f_2 je funkce prostá, f_3 je funkce na Y, f_4 je funkce vzájemně jednoznačná, f_5 je funkce inverzní k f_4.

Jestliže funkce $f : X \to Y$ je bijektivní, potom existuje funkce $g : Y \to X$ **inverzní** k funkci f, taková, že $g(y) = x$ právě když $f(x) = y$. Funkci inverzní funkci f označujeme obvykle f^{-1}. Platí také $\mathcal{D}(g) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(g) = \mathcal{D}(f)$. Inverzní funkci f^{-1} lze určit také jako funkci splňující $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_X$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_Y$, kde I_X je **identická funkce na** X, tj. $\mathrm{I}_X(x) = x$ pro všechna $x \in X$ a $\mathrm{I}_Y(y) = y$ je identická funkce na množině Y.

Poznamenejme, že pokud prostá funkce $f : X \to Y$ není na, tj. $\mathcal{H}(f)$ není celé Y, potom funkci inverzní lze definovat jen na $\mathcal{H}(f)$. Pokud funkce f není prostá na celém $\mathcal{D}(f)$, potom pro inverzní funkce je nutno ji omezit na podmnožinu X_1 množiny X, na které už je prostá.

Funkci lze znázornit, tak jako zobrazení, „šipkovým“ diagramem, viz Obr. 4.1. Pro funkce se častěji užívá znázornění pomocí grafu v rovině, viz Obr. 4.2.



Obr. 4.2: Grafy funkcí: f_1 není funkce $X \to Y$, f_2 je prostá funkce z X do Y, f_3 je funkce z X na Y, f_4 je funkce vzájemně jednoznačná z X na Y, f_5 je graf funkce inverzní k funkci f_4.

4A. Základní pojmy

V dalším textu pod funkcí budeme rozumět funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s definičním oborem $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Takovým funkcím říkáme **reálné funkce jedné reálné proměnné**. Jsou ústředním pojmem **matematické analýzy**, takzvaného **kalkulu**.

Poznamenejme, že i když $f(x)$ znamená hodnotu funkce v bodě x, tj. jedno číslo, budeme místo f psát $f(x)$, aby se zdůraznilo, že jde o funkci s proměnnou x.

Poznámky 4.1.

(a) Funkci zadáváme tak, že stanovíme **definiční obor** a určíme **funkční předpis**. Funkční předpis má obvykle tvar jednoho nebo více explicitních vzorců nebo výčet, případně kombinace obojího.

(b) Není-li stanoven definiční obor, rozumí se jím všechny prvky z $\mathbb{R}$, pro něž mají vzorce smysl.

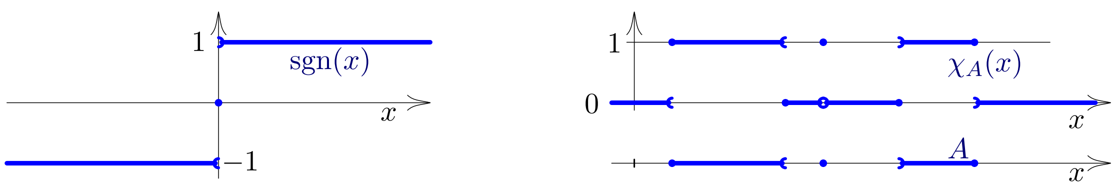
(c) Ve výuce matematiky se obvykle zabýváme funkcemi zadanými nějakým (relativně) jednoduchým předpisem. Nutno si ale uvědomit, že funkcí, které nelze žádným jednoduchým předpisem určit, je mnohem, mnohem víc.

(d) Funkce se znázorňuje **grafem**. Je to množina bodů $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x), x \in \mathcal{D}(f)\}$.

(e) Pozor, ne každá množina nebo křivka v rovině je grafem nějaké funkce. Například parabola $x = y^2$ není grafem funkce $f(x)$, protože každému $x > 0$ patří dvě hodnoty $y = \sqrt{x}$ a $y = -\sqrt{x}$. Podobně přímka $x = 0$ a křivka $x = \sin y$ nejsou grafem žádné funkce $f(x)$.

(f) Jsou funkce, jejichž graf „nelze" načrtnout. Příkladem může být graf Dirichletovy funkce, která nabývá hodnoty 1 pro racionální x a 0 pro iracionální x, viz Příklad 4.2 (d).

(g) Máme-li funkci f s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, potom novou funkci $f|_U$ dostaneme restrikcí funkce na nějakou podmnožinu $U \subset \mathcal{D}(f)$. Novou funkci dostaneme také rozšířením funkce na větší definiční obor. Novou funkci dostaneme také změnou hodnoty v jednom nebo více bodech x.



Obr. 4.3: Funkce znaménka $\operatorname{sgn}(x)$ a charakteristická funkce $\chi_A(x)$ množiny A

Příklady 4.2. Vedle tzv. elementárních funkcí, např. mocniny $f(x) = x^n$, exponenciální funkce e^x, logaritmické funkce $\log_z x$, goniometrických funkcí $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ uveďme několik nestandardních funkcí:

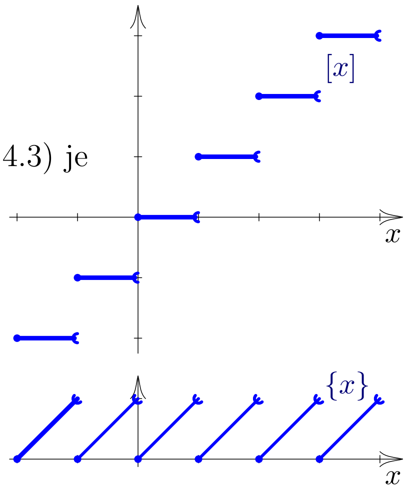
(a) **Funkce signum (znaménko)** (Obr. 4.3) je určena předpisem

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{pro } x<0\\ 0 & \text{pro } x=0\\ 1 & \text{pro } x>0\,.\end{cases}$$

(b) **Charakteristická funkce χ_A množiny $A\subset\mathbb{R}$** (Obr. 4.3) je

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\in A\\ 0 & \text{pro } x\notin A\,.\end{cases}$$

(c) Předpis $x\mapsto n\in\mathbb{N}$ splňující $n\le x<n+1$ určuje funkci **celá část** čísla x, píšeme $[x]=n$. Funkce **necelá část** (také **zlomková část**) je určena vztahem $\{x\}=x-[x]$. Definičním oborem obou funkcí je $\mathbb{R}$, obor hodnot první jsou celá čísla $\mathbb{Z}$, druhé $\langle 0,1)$, viz (Obr. 4.4). Platí $[x]+\{x\}=x$.



Obr. 4.4: Funkce celá a necelá část.

(d) **Dirichletova funkce** (Obr. 4.5) je určena předpisem

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x \text{ racionální}\\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální}\,.\end{cases}$$


Obr. 4.5: Dirichletova funkce $D(x)$

Funkce sudá, lichá a periodická

Definice 4.3. (Sudá a lichá funkce) Řekneme, že množina $M\subset\mathbb{R}$ je **symetrická**, pokud:

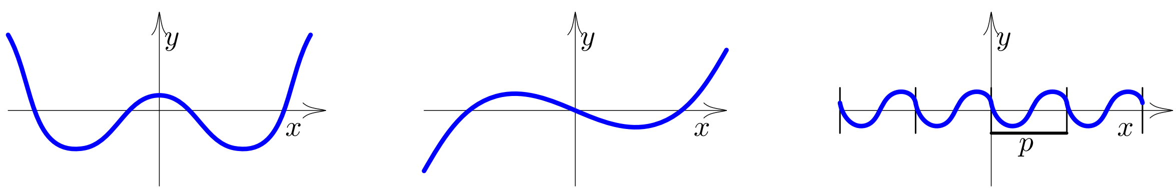
$$x\in M \quad \text{právě když} \quad -x\in M\,.$$

Funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nazveme **sudou**, pokud

definiční obor $\mathcal{D}(f)$ je symetrická množina a platí $f(-x)=f(x)$ pro každé $x\in\mathcal{D}(f)$ a

funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nazveme **lichou**, pokud

definiční obor $\mathcal{D}(f)$ je symetrická množina a platí $f(-x)=-f(x)$ pro každé $x\in\mathcal{D}(f)$.



Obr. 4.6: Funkce sudá, lichá a periodická s periodou p.

Poznámky 4.4.

(a) Funkce x, x^3, $1/x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou funkce liché, funkce 1, x^2, x^4, $\frac{1}{x^2}$, $\cos x$ jsou funkce sudé. Naproti tomu funkce e^x, $\ln x$ nejsou ani sudé ani liché.

(b) Součet sudých funkcí je funkce sudá a součet lichých funkcí je funkce lichá. Dále součin dvou sudých i dvou lichých funkcí je funkce sudá a součin sudé a liché funkce je funkce lichá. Každou funkci $f(x)$ definovanou na symetrické množině lze rozložit na součet $f(x)=f_s(x)+f_l(x)$ funkce sudé $f_s(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ a liché $f_l(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

Definice 4.5. **(Periodická funkce)** Nechť existuje kladné číslo p takové, že

(a) definiční obor funkce f je množina „periodická", tj. $x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow x + p \in \mathcal{D}(f)$.

(b) platí $f(x + p) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

Potom řekneme, že funkce f je periodická s periodou p, zkráceně funkce f je p-periodická.

Poznámky 4.6.

(a) Goniometrické funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou funkce periodické. Nejmenší periodou prvních dvou funkcí je $p = 2\pi$, periodou jsou však i násobky 2π. Nejmenší periodou funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ je $p = \pi$. Také funkce necelá část $\{x\}$ je periodická s (nejmenší) periodou $p = 1$. Funkce celá část $[x]$ periodická není.

(b) Má-li funkce periodu p, periodou jsou i násobky kp, $k \in \mathbb{N}$. Obvykle za periodu bereme nejmenší kladné p splňující $f(x + p) = f(x)$. Tuto podmínku však splňuje i konstantní funkce pro libovolné $p > 0$, a nejmenší periodu tudíž nemá. Někteří autoři proto funkce, které nemají nejmenší periodu, za periodické nepovažují.

(c) Zajímavá je i Dirichletova funkce. Pro ni je podmínka $f(x + p) = f(x)$ splněna pro každé kladné racionální p. Tato funkce tudíž také nemá nejmenší periodu a někteří autoři ji proto za periodickou nepovažují.

Funkce omezená, rostoucí a klesající

Definice 4.7. **(Omezené funkce)** Buď f funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

(a) **zdola omezená** na M, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$.

(b) **shora omezená** na M, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq L$.

(c) **omezená** na M, je-li na M současně zdola omezená i shora omezená.

(d) **neomezená** na M, není-li na M omezená zdola nebo shora.

Poznámky 4.8.

(a) Místo slova omezené a neomezené se také často říká **ohraničené** a **neohraničené**.

(b) Funkce e^x je omezená zdola na celém $\mathbb{R}$. Funkce $1/x$ je omezená shora na $(-\infty, 0)$ a omezená zdola na $(0, \infty)$. Funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou omezené, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$ jsou neomezené na celém svém definičním oboru.

Definice 4.9. **(Funkce rostoucí a klesající)** Buď f funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$ interval. Řekneme, že funkce f je

(a) **rostoucí** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

(b) **neklesající** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,

(c) **klesající** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

(d) **nerostoucí** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

(e) **konstantní** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí $f(x_1) = f(x_2)$,

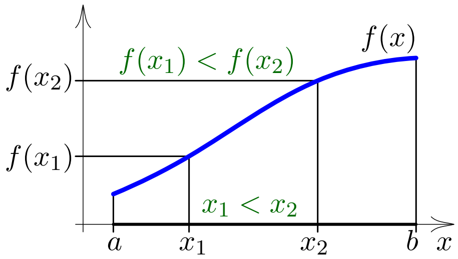
(f) **monotónní** na I, jestliže je neklesající na I nebo nerostoucí na I.

(g) **ryze monotónní** na I, jestliže je rostoucí na I nebo klesající na I.

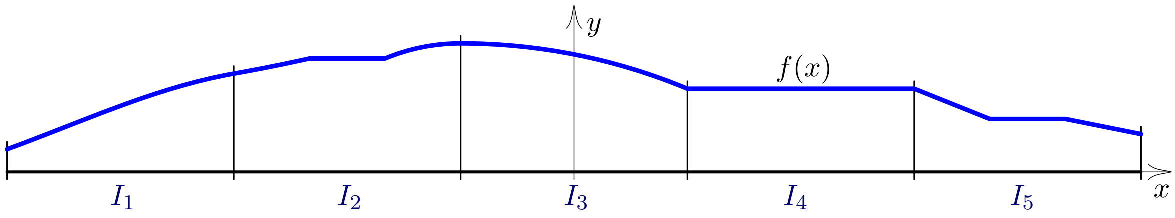
Poznámky 4.10.

(a) Na intervalu I je každá rostoucí funkce také neklesající a každá klesající funkce je i nerostoucí. Je-li funkce nerostoucí a současně neklesající, je konstantní.

(b) Je-li funkce rostoucí (neklesající, klesající, nerostoucí, konstantní) na překrývajících se intervalech I_1 a I_2 ($I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$), potom je taková i na sjednocení intervalů $I_1 \cup I_2$.



Obr. 4.7: K definici funkce rostoucí.



Obr. 4.8: Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I_1, neklesající na I_2, klesající na I_3, konstantní na I_4 a nerostoucí na I_5.

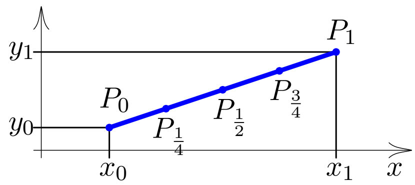
Funkce konvexní a konkávní

Dále zkoumáme, zda je funkce konvexní nebo konkávní. Rozhodující přitom je, zda spojnice dvou bodů grafu leží nad nebo pod grafem funkce.

K tomu potřebujeme popsat souřadnice bodu na úsečce s krajními body $P_0 = [x_0, y_0]$ a $P_1 = [x_1, y_1]$. Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ položme

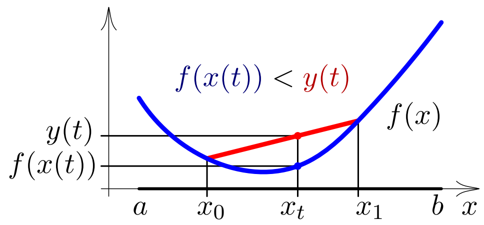
$$x(t) = (1-t)x_0 + t\,x_1\,, \quad y(t) = (1-t)y_0 + t\,y_1$$

a označme $P_t = [x(t), y(t)]$. Zřejmě pro $t = 0$ dostáváme bod P_0, pro $t = 1$ bod P_1, bod $P_{1/2}$ je střed úsečky $\overline{P_0P_1}$. Body P_t pro $t \in (0, 1)$ tvoří celou otevřenou úsečku.



Obr. 4.9: Popis bodů úsečky.

Vyjádření využijeme při definici konvexní funkce. Bod úsečky s koncovými body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ se souřadnicí $x = x(t)$ má příslušnou y-novou souřadnici danou $y(t) = (1-t)f(x_0) + t\,f(x_1)$. Tuto hodnotu budeme v definici porovnávat s hodnotou $f(x(t))$:



Obr. 4.10: K definici funkce konvexní.

Definice 4.11. (Funkce konvexní a konkávní) Buď f funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$ interval. Řekneme, že funkce f je

(a) **konvexní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I$ a všechna $t \in (0, 1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

(b) **ryze konvexní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$ a všechna $t \in (0, 1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) < (1-t)f(x_0) + tf(x_1)\,,$$

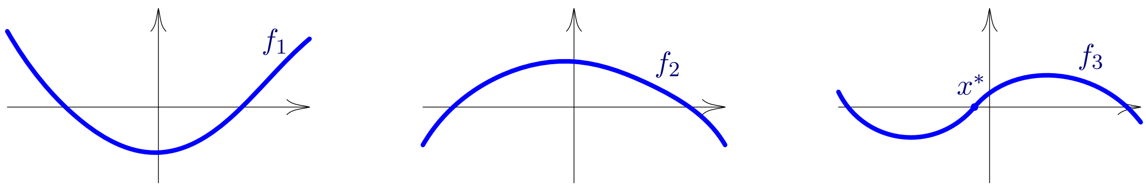
(c) **konkávní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I$ a všechna $t \in (0,1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

(d) **ryze konkávní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$ a všechna $t \in (0,1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) > (1-t)f(x_0) + tf(x_1)\,.$$

(e) Bod $x = a$ nazveme **inflexním bodem** funkce $f(x)$, jestliže v levém okolí bodu a je funkce $f(x)$ konvexní a v pravém okolí konkávní, nebo naopak.



Obr. 4.11: Funkce f_1 je konvexní, f_2 je konkávní a bod x^* je inflexním bodem funkce f_3.

Příklady 4.12.

(a) Funkce e^x a sudé mocniny $x^2, x^4, \dots$ jsou ryze konvexní na celém $\mathbb{R}$, logaritmická funkce $\ln x$ je ryze konkávní na $(0,\infty)$. Odmocniny $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}, \dots$ jsou ryze konkávní na $\langle 0,\infty)$.

(b) Liché mocniny $x^3, x^5, \dots$ jsou ryze konvexní na $\langle 0,\infty)$ a ryze konkávní na $(-\infty, 0\rangle$, v nule mají inflexní bod.

(c) Funkce $\sin x$ je ryze konkávní na intervalech $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle$ a konvexní na intervalech $\langle (2k-1)\pi, 2k\pi\rangle$ $(k \in \mathbb{Z})$. V $x = k\pi$ jsou inflexní body.

(d) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je konvexní na $(-\infty, 0\rangle$, konkávní na $\langle 0,\infty)$ a $x = 0$ je inflexní bod.

Poznámky 4.13.

(a) Je-li funkce ryze konvexní, je také konvexní a podobně ryze konkávní je konkávní. Funkce, která je současně konvexní i konkávní na intervalu I, je na tomto intervalu lineární, tj. tvaru $f(x) = ax + b$, a jejím grafem je úsečka.

(b) Nechť v bodě grafu funkce existuje tečna ke grafu funkce. Potom:
- je-li funkce ryze konvexní, tato tečna je pod grafem funkce,
- je-li funkce ryze konkávní, tato tečna je nad grafem funkce,
- je-li bod inflexní, tato tečna je na jedné straně bodu pod grafem, na druhé nad grafem.

(c) Předchozí vlastnosti nejsou vhodné pro definici konvexní a konkávní funkce. Museli bychom nejprve definovat, co je to tečna ke grafu funkce. Také by definice nezahrnovala případy, kdy graf funkce v uvažovaném bodě tečnu nemá.

Funkce algebraické a transcendentní

I když názvosloví není zcela jednotné, tzv. analytické funkce dělíme následovně:

Definice 4.14. **(Funkce algebraické a transcendentní)**
Funkci $y = f(x)$ nazveme **algebraickou**, jestliže je určena rovnicí $P(x, y) = 0$, kde $P(x, y)$ je polynom v proměnných x, y. Algebraické funkce dělíme na podskupiny:

(a) **racionální funkce celistvé** zvané **polynomy**, česky **mnohočleny**. Jsou to funkce $y = Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom proměnné x.

(b) **racionální funkce lomené**, zkráceně **racionální funkce** nebo **lomené funkce**. Jsou to funkce, které vzniknou podílem dvou polynomů $Q(x)$ a $R(x)$, přičemž $R(x) \not\equiv 0$.

(c) **iracionální funkce** – ostatní algebraické funkce, které nelze vyjádřit jako podíl dvou polynomů.

Analytické funkce, které nejsou algebraické, nazýváme **transcendentní**.

Mezi tzv. nižší transcendentní funkce řadíme **elementární funkce**: mocniny s iracionálním exponentem, exponenciální a logaritmické funkce, funkce goniometrické, cyklometrické, hyperbolické atd.

Mezi tzv. vyšší transcendentní funkce řadíme například funkce definované pomocí integrálů, například $y = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ a další.

Poznámky 4.15.

(a) Polynom v proměnných x, y je lineární kombinace mocnin $x^i\, y^j$, tj. součet konečně mnoha násobků členů $x^i y^j$, kde $i, j \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, například funkce

$$P(x, y) = x^3 - 2\,x^2\,y - 3\,x\,y^2 + \tfrac{3}{7}\,x^2 - \pi\,x\,y + 2 - 4\,y - \sqrt{7}.$$

(b) Polynom k-tého stupně v proměnné x lze zapsat $Q(x) = a_k\,x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, například $x^3 + 3\,x - 5$. Polynom $Q(x)$ patří mezi algebraické funkce, v tomto případě v rovnici $P(x, y) = 0$ je polynom $P(x, y) = Q(x) - y$.

(c) Příkladem racionální lomené funkce je funkce

$$f(x) = \frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{2\,x^3 + x^2 - 2x + 3}{x^4 - \sqrt{3}\,x^2 - \pi\,x + 2}\,.$$

V tomto případě je polynom $P(x, y) = Q(x) - R(x) \cdot y$.

(d) Iracionální funkce jsou určeny polynomem $P(x, y)$, který obsahuje alespoň druhou mocninu proměnné y, například $P(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Pokud existuje explicitní vyjádření funkce ve tvaru $y = f(x)$, potom obsahuje odmocniny, například $y = \sqrt{4 - x^2}$.

(e) Předchozí definice se týká jenom tzv. analytických funkcí, s jejich přesnou definicí se setkáme v kurzu Matematika 3: jsou to spojité funkce, které mají derivace všech řádů a v okolí každého bodu příslušná Taylorova řada konverguje k dané funkci. Mezi analytické funkce nepatří například funkce znaménka $\operatorname{sgn}(x)$, absolutní hodnoty $|x|$ v okolí nuly, funkce celá $[x]$ i necelá část $\{x\}$. Ani Dirichletova funkce $D(x)$ není analytická, i když splňuje rovnici $y(y - 1) = 0$.

Posloupnosti

Zobrazení (funkce) definované na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ se nazývají **posloupnosti**. Místo $a(n)$ píšeme $\{a_n\}$ a myslíme tím uspořádanou nekonečnou množinu $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, kterou zapisujeme zkráceně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo jenom $\{a_n\}$. Někdy je vhodné začínat posloupnost nultým členem, tj. $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$, potom je definičním oborem množina $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Jaký je rozdíl mezi posloupností a množinou? V množině nezáleží na pořadí uvedených prvků, každý prvek je v množině jen jednou (pokud je náhodou zapsán vícekrát, je považován za jeden). Naproti tomu v posloupnosti záleží na pořadí prvků, prvky se mohou opakovat: například v konstantní posloupnosti se jeden prvek stále opakuje.

Řada pojmů definovaných pro funkce lze přirozeně převést také posloupnosti. Například posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající**, jestliže $a_{n+1} \geq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podobně se zavádí pojem rostoucí, klesající, nerostoucí, omezené (ohraničené) posloupnosti.

U posloupností je důležitým pojmem její limita, budeme jí věnovat v části 5.

Příklady 4.16. Několik konkrétních posloupností

(a) Posloupnost **konstantní** je posloupnost $\{a, a, a, a, a, \dots, a, \dots\}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

(b) Posloupnost **aritmetická** s diferencí d a počátečním členem $a_0 = a$ je posloupnost definovaná rekurentně $a_{n+1} = a_n + d$, neboli $a_n = a_0 + n \cdot d$. Pro $a_0 = 3$ a $d = 2$ je

$$\{a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \dots\} = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}.$$

Pro $d > 0$ je posloupnost rostoucí a neomezená (roste do nekonečna), pro $d < 0$ je klesající do $-\infty$ a pro $d = 0$ je konstantní.

(c) Posloupnost **geometrická** s počátečním členem $a_0 = a$ a kvocientem q je definovaná rekurentně $a_{n+1} = a_n \cdot q$, neboli $a_n = a_0 \cdot q^n = a \cdot q^n$. Například pro $a_0 = 3$ a $q = 2$ je

$$\{a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, \dots\} = \{3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots\}.$$

Nechť například $a > 0$. Potom podle hodnoty q rozlišujeme pět případů:

$q > 1$	—	posloupnost roste do nekonečna,
$q = 1$	—	posloupnost je konstantní,
$0 < q < 1$	—	posloupnost klesá k nule,
$-1 < q < 0$	—	členy a_n „skáčou“ kolem nuly a blíží se k ní,
$q = -1$	—	posloupnost „osciluje“: $\{a, -a, a, -a, a, \dots\}$ a
$q < -1$	—	posloupnost diverguje, „rozbíhá se“ do $\pm\infty$.

Pro $a < 0$ je situace analogická.

4B. Elementární funkce

V dalším se budeme věnovat funkcím, které nazýváme elementární. Jsou to zejména funkce:

(a) exponenciální a logaritmické;
(b) obecné mocninné;
(c) goniometrické a cyklometrické;
(d) hyperbolické a hyperbolometrické.

Exponenciální funkce

Funkce typu a^x, kde základ a je pevné kladné číslo různé od jedničky, tj. $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, a exponent x je proměnná, nazýváme exponenciální funkce. Tyto funkce jsou přirozeně definované pro přirozená čísla $x \in \mathbb{N}$: a^x je součin x čísel a. Její základní vlastností je rovnost

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \,.$$

Z rovnosti $a^x = a^{x+0} = a^x \cdot a^0$ plyne $a^0 = 1$ a ze vztahu $a^x \cdot a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ plyne $a^{-x} = 1/a^x$. Dále z rovnosti $(a^{\frac{1}{q}})^q = a^{\frac{1}{q}\cdot q} = a^1 = a$ pro $q \in \mathbb{N}$ plyne $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$. Díky tomu můžeme rozšířit funkci a^x na všechna racionální čísla $x = \frac{p}{q}$ vztahem

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \,. \qquad (*)$$

Pro iracionální x je funkce definována jako limita (pojem definujeme později) a^{r_i} hodnot funkce v racionálních čísel r_i blížících se k iracionálnímu x. Případ základu $a = 1$ se nepovažuje za exponenciální funkci, protože $1^x = 1$ je konstantní funkce.

Definice 4.17. (Exponenciální funkce) Buď a kladné reálné číslo různé od 1. Potom funkci $f(x) = a^x$ s definičním oborem $\mathbb{R}$, a oborem hodnot $(0,\infty)$, která vznikne rozšířením funkce (*) z racionálních na reálná čísla, nazveme exponenciální funkcí se základem a.

V matematice se užívá zejména tzv. přirozená exponenciální funkce e^x se základem $a = \mathrm{e}$, kde e je Eulerova konstanta, $\mathrm{e} \doteq 2.7182\,818$. Místo e^x se píše také $\exp(x)$.

Poznámka: Eulerovu konstantu lze definovat jako limitu

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,.$$

S funkcí e^x se ještě mnohokrát setkáme. V aplikacích se užívají také exponenciální funkce se základem $a = 2$, $a = 3$, $a = 10$.

Věta 4.18. Funkce a^x je pro každé kladné $a \neq 1$ omezená zdola a neomezená shora.

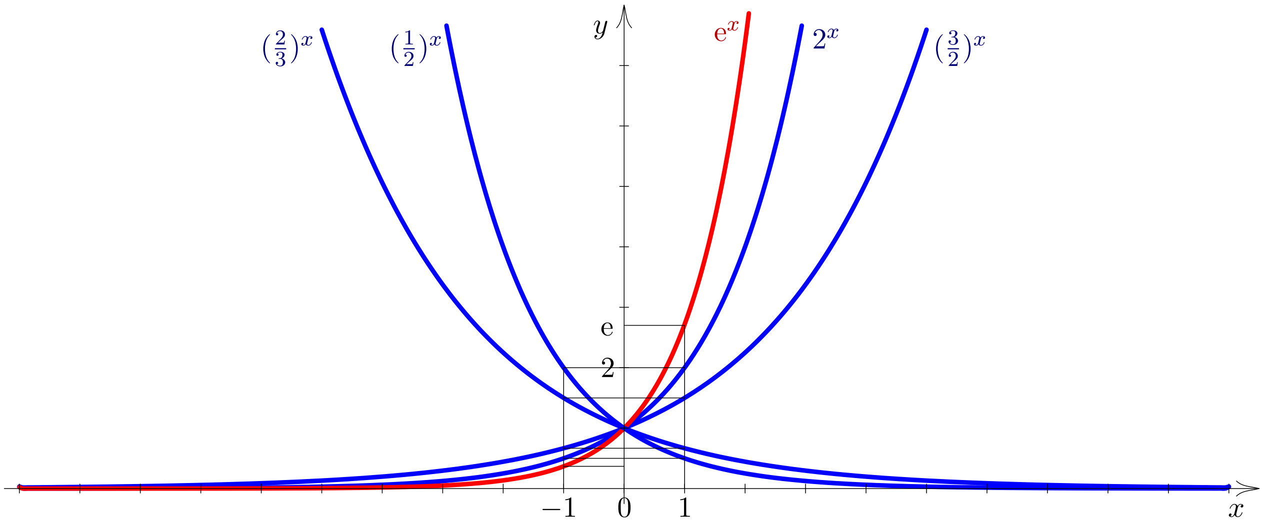
Pro $a > 1$ je rostoucí a pro $0 < a < 1$ klesající na celém $\mathbb{R}$.

V obou případech je funkce na celém $\mathbb{R}$ ryze konvexní.

Významné hodnoty funkce jsou $a^0 = 1$, $a^1 = a$ a $a^{-1} = 1/a$.

Z pravidel pro počítání s exponenciální funkcí uveďme

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \quad (y \neq 0)\,.$$



Obr. 4.12: Exponenciální funkce a^x pro $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{3}{2}$, $a = 2$ a $a = \mathrm{e}$. Všimněte si zrcadlové symetrie grafů funkcí 2^x a $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, $(\frac{3}{2})^x$ a $(\frac{2}{3})^x = (\frac{3}{2})^{-x}$, obecně a^x a $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$.

Logaritmické funkce

Exponenciální funkce a^x jsou pro základ $a \in (0,1)$ klesající a pro $a \in (1,\infty)$ rostoucí, tedy v obou případech funkce prosté. Existují proto funkce inverzní, které se nazývají logaritmické. Graf logaritmické funkce $y = \log_a x$ je zrcadlově symetrický podle osy $y = x$ ke grafu funkce $y = a^x$, speciálně přirozený logaritmus $y = \ln x$ je zrcadlově symetrický ke grafu funkce $y = \mathrm{e}^x$.

Definice 4.19. **(Logaritmické funkce)** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$. Inverzní funkce k funkci $f(x) = a^x$ se nazývá **logaritmická funkce o základu** a. Značí se $f(x) = \log_a(x)$ nebo bez závorek jen $\log_a x$. Jsou definovány na $(0,\infty)$ s oborem hodnot $(-\infty,\infty)$ a platí

$$\log_a x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^y.$$

Přirozený logaritmus je logaritmus se základem $a = \mathrm{e}$. Značíme ho $\ln x \equiv \log_{\mathrm{e}} x$.
Užívá se také **dekadický logaritmus** se základem $a = 10$, který se často píše bez základu: $\log x \equiv \log_{10} x$. Je to funkce inverzní k funkci 10^x.

Vlastnosti logaritmické funkce shrneme v tvrzení:

Věta 4.20. Nechť $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
Logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$ jsou definovány jen pro kladná čísla x.
Pro $a > 1$ jsou to funkce rostoucí a ryze konkávní „jdoucí“ od $-\infty$ do ∞.
Pro $0 < a < 1$ jsou to funkce klesající a ryze konvexní „jdoucí“ od ∞ do $-\infty$.
Významné hodnoty jsou $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ a $\log_a(\frac{1}{a}) = -1$.
Z pravidel pro počítání s logaritmickými funkcemi uveďme:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad \log_a(\tfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y\,,$$
$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x\,, \qquad \log_a(\sqrt[p]{x}) = \tfrac{1}{p}\log_a x\,.$$

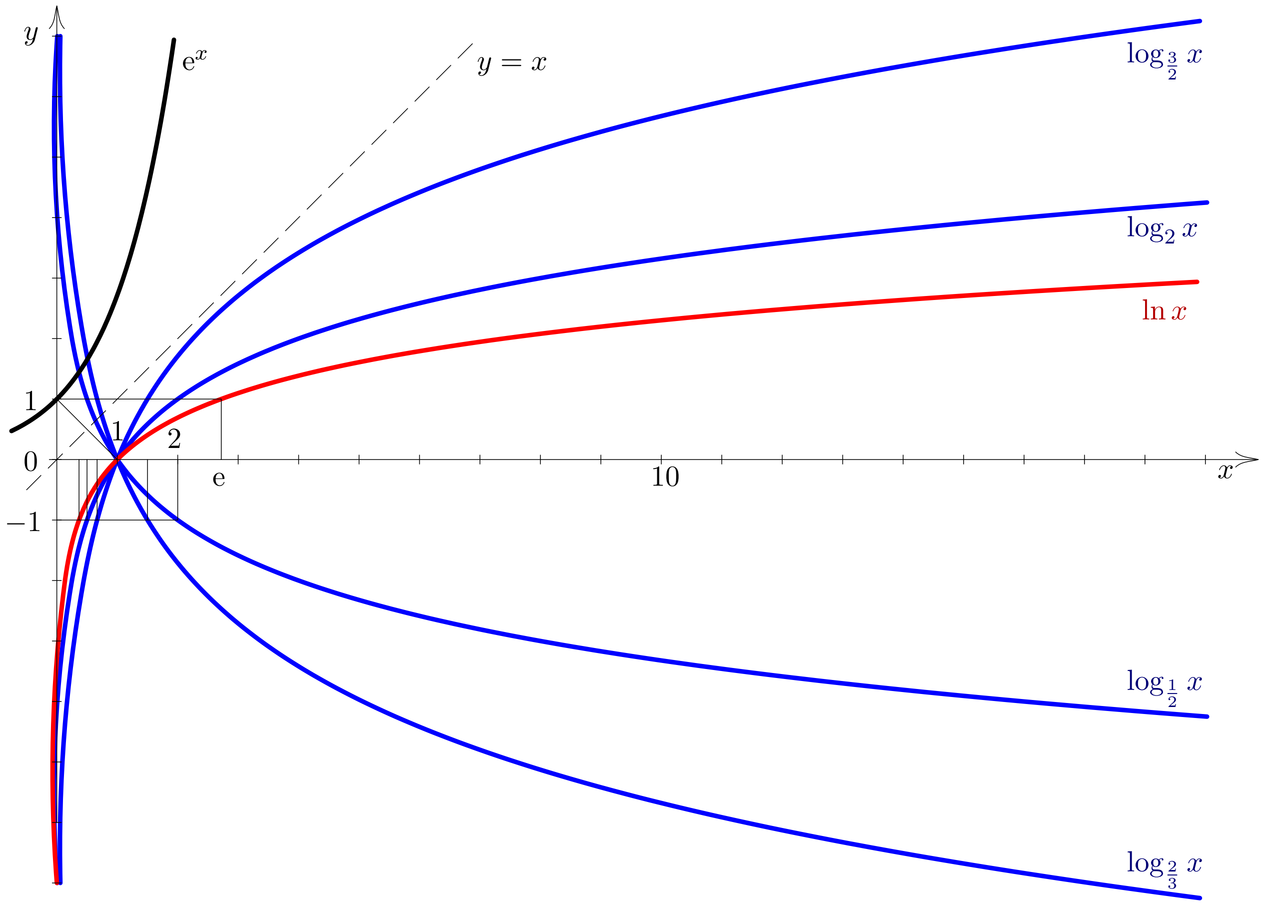
Pravidla dostaneme z definice logaritmu a vlastností exponenciální funkce. První tvrzení plyne z rovnosti $\mathrm{e}^{\ln(xy)} = xy = \mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{\ln x + \ln y}$. Rovnost $\mathrm{e}^{\ln(x/y)} = x/y = \mathrm{e}^{\ln x}/\mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{\ln x - \ln y}$ dává druhé tvrzení. Třetí plyne z rovnosti $\mathrm{e}^{\ln(x^p)} = x^p = (\mathrm{e}^{\ln x})^p = \mathrm{e}^{p \ln x}$. Poslední tvrzení je důsledkem rovnosti $\mathrm{e}^{\ln(\sqrt[p]{x})} = \sqrt[p]{x} = x^{1/p} = (\mathrm{e}^{\ln x})^{1/p} = \mathrm{e}^{1/p \ln x}$.

Exponenciální a logaritmické funkce s různými základy lze navzájem převádět.

Věta 4.21. Buď $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Potom platí $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, $b^x = (a^x)^{\frac{\ln b}{\ln a}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ a

$$\log_b x = \log_a x \frac{\ln a}{\ln b}, \quad \text{speciálně} \quad \log x \equiv \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \forall x > 0.$$

Naznačme odvození uvedených vzorců. Z rovnosti $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ plyne $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$. Důkaz druhého vzorce: $b^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln b} = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a \cdot \ln b / \ln a} = (\mathrm{e}^{x \ln a})^{\ln b / \ln a} = (a^x)^{\ln b / \ln a}$. Číslo $x > 0$ lze napsat jako $x = a^{\log_a x} = (\mathrm{e}^{\ln a})^{\log_a x} = \mathrm{e}^{\ln a \cdot \log_a x}$ a také jako $x = b^{\log_b x} = \mathrm{e}^{\ln b \cdot \log_b x}$. Porovnání exponentů dává $\ln a \cdot \log_a x = \ln b \cdot \log_b x$, odkud plyne třetí vzorec, další jsou jeho důsledky.



Obr. 4.13: Logaritmické funkce $\log_a x$ pro $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{3}{2}$, $a = 2$. Funkce $\ln x$ je inverzní k e^x. Funkce $\ln x$ a e^x jsou navzájem zrcadlově symetrické podle osy $y = x$, stejně navzájem symetrické jsou i funkce $\log_a x$ a a^x. Všimněte si také zrcadlové symetrie podle osy x funkcí $\log_a x$ a $\log_{1/a} x$.

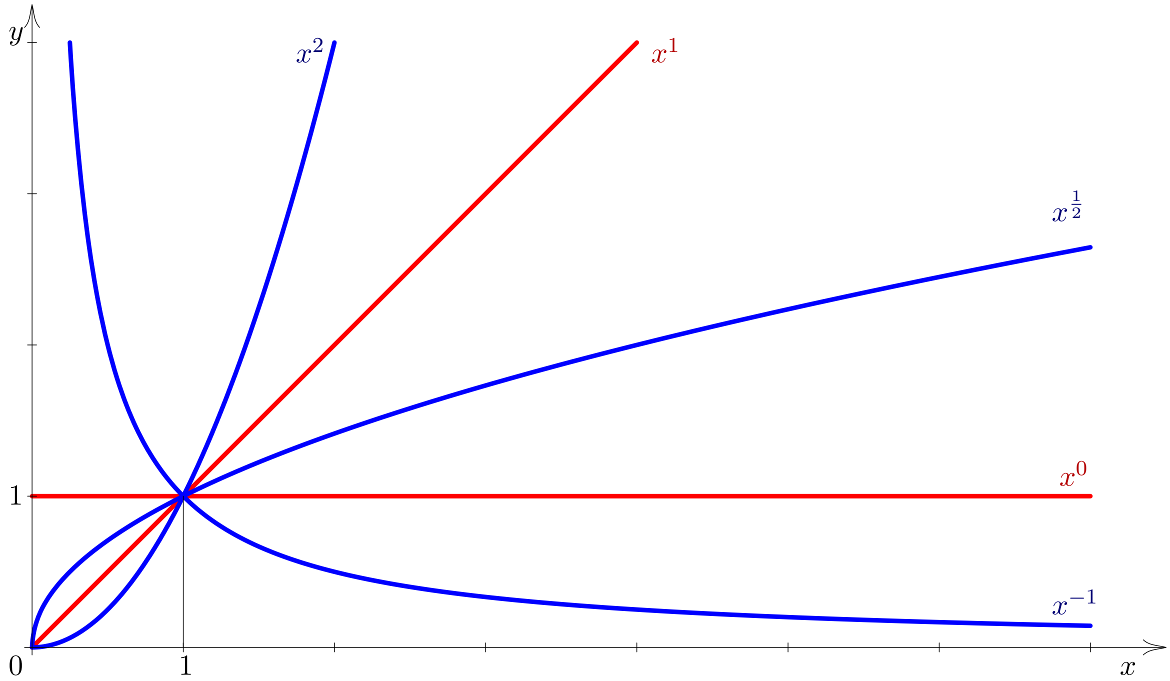
Obecné mocninné funkce

V exponenciálních funkcích byl základ pevný a exponent proměnná, u mocninných funkcí je to naopak: exponent p je pevný, proměnnou x je základ. Mocninné funkce jsou přirozeně definovány pro exponenty $p = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na celém $\mathbb{R}$, pro záporné celé exponenty na celém $\mathbb{R}$ kromě $x = 0$. Obecně jsou hodnoty x^p definovány pro $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ vztahem $x^p = \mathrm{e}^{p \ln x}$.

Definice 4.22. (Obecná mocninná funkce) Nechť $p \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = x^p$ je definovaná vztahem $x^p = \mathrm{e}^{p \ln x}$ pro všechna kladná čísla $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Pro $p > 0$ lze položit $0^p = 0$. V případě celých exponentů $p \in \mathbb{Z}$ lze funkci rozšířit pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pokud navíc $p \in \mathbb{N}$, funkce x^p je definovaná na celém $\mathbb{R}$.

Uveďme grafy několika mocninných funkcí na intervalu $(0,\infty)$. Funkce $x^0 = 1, x^1, x^2, x^3, \ldots$ jsou definované na celém $\mathbb{R}$, funkce $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots$ jsou definované na $\mathbb{R}$ kromě nuly.



Obr. 4.14: Mocninné funkce x^p pro $p=-1$, $p=0$, $p=\frac{1}{2}$, $p=1$ a $p=2$ na intervalu $(0,\infty)$.

Věta 4.23. (**Vlastnosti obecných mocninných funkcí**)
Nechť $p \in \mathbb{R}$. Obecná mocninná funkce $f(x) = x^p$ má pro $x \in (0,\infty)$ vlastnosti:

(a) je rostoucí v případě exponentů $p > 0$ a klesající v případě $p < 0$,

(b) funkce je ryze konvexní pro $p > 1$ a pro $p < 0$, pro $0 < p < 1$ je ryze konkávní.

(c) Platí
$$(xy)^p = x^p \cdot y^p\,, \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p},$$

(d) V obecném případě $p \in \mathbb{R}$ a $p \neq 0$ funkce x^p zobrazí interval $(0,\infty)$ na celé $(0,\infty)$.

Goniometrické funkce

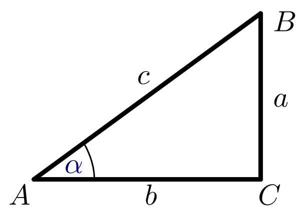
Na základní a střední škole byly goniometrické funkce definovány pro úhel α pravoúhlého trojúhelníka $\triangle ABC$ s úhlem α při vrcholu A, pravým úhlem při vrcholu C, odvěsnami BC délky a, AC délky b a přeponou AB délky c, (viz obr. 4.15) jako:

(a) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ tj. poměr (délky) protilehlé odvěsny ku přeponě,

(b) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ tj. poměr přilehlé odvěsny ku přeponě,

(c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ tj. poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně a

(d) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$ tj. poměr přilehlé odvěsny ku protilehlé odvěsně.



Obr. 4.15: Označení trojúhelníka ΔABC.

Pro úplnost uveďme, že zbývající poměr stran $c : b$ definuje funkci **sekans**: $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$ a poměr $c : a$ funkci **kosekans**: $\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha$. Tyto funkce se však používají jen velmi zřídka. Nejsou omezené a nejsou definovány pro hodnoty α, kdy $\sin\alpha = 0$ nebo $\cos\alpha = 0$.

Goniometrické funkce rozšíříme z ostrého úhlu na libovolný úhel. Budeme uvažovat orientovaný úhel s vrcholem v počátku, jehož první (počáteční) rameno směřuje od počátku vpravo. Velikost úhlu budeme měřit v radiánech, tj. pomocí délky orientovaného oblouku na jednotkové kružnici, který začíná na počátečním rameni a končí na koncovém rameni. Pokud je tento oblouk orientován v kladném směru, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček, bereme úhel kladný, v opačném případě záporný. Význam orientovaného úhlu už není plocha mezi rameny úhlu, ale otáčivý pohyb, kterým se počáteční rameno přemístí na koncové rameno.

Protože délka jednotkové kružnice je 2π, orientované úhly $x, x+2\pi, x-2\pi, x+4\pi, x-4\pi, \ldots$ mají stejná ramena.

Protože $180°$ je π radiánů, přepočet velikosti úhlu v radiánech na stupně a obráceně je:

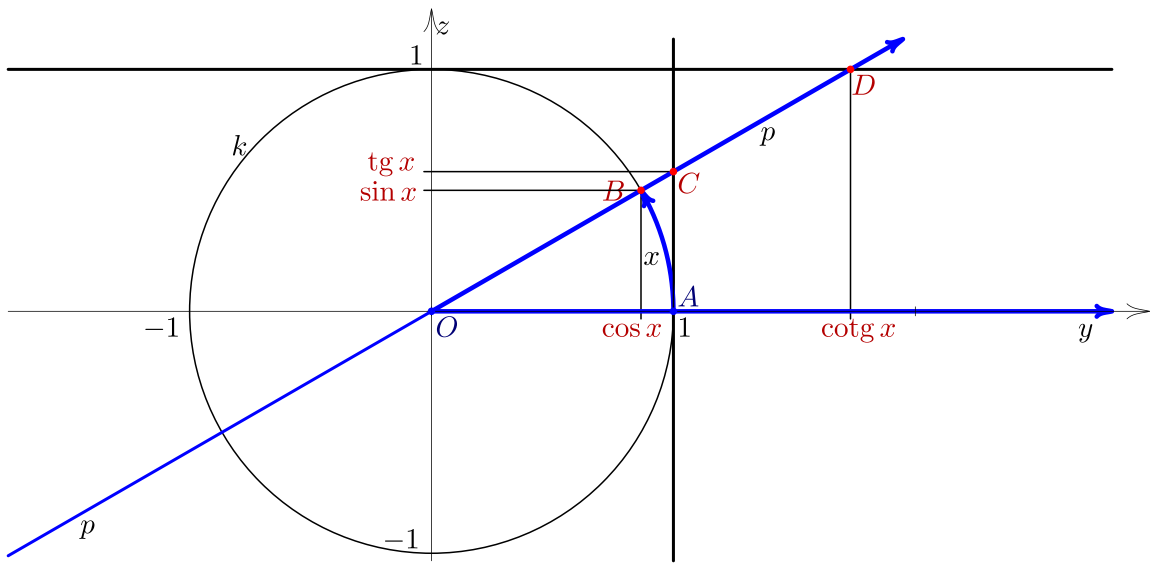
$$x\,[\text{radiánů}] = x \cdot \frac{180}{\pi}\,[\text{stupňů}] \qquad \text{a obráceně} \qquad x\,[\text{stupňů}] = x \cdot \frac{\pi}{180}\,[\text{radiánů}]\,.$$

Pamatujte si převod ostrých úhlů v prvním kvadrantu a násobků pravého úhlu:

Stupně	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$540°$	$720°$
Radiány	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π

Definice 4.24. (Goniometrické funkce). Buď k jednotková kružnice se středem v počátku $O = [0,0]$ a orientovaný úhel s počátečním ramenem $\overrightarrow{OA}$ směřujícím vpravo a koncovým ramenem $\overrightarrow{OB}$, přičemž body $A = [1,0]$ a B jsou průsečíky ramen s kružnicí k.
Potom délka orientovaného oblouku AB určuje velikost úhlu x,
„svislá“ souřadnice bodu B je hodnota $\sin x$ funkce **sinus**,
„vodorovná“ souřadnice B je hodnota $\cos x$ funkce **kosinus**, tj. $B = [\cos x, \sin x]$.
Funkce **tangens** a **kotangens** jsou definovány jako podíly

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$



Obr. 4.16: K definici goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Poznámky 4.25.

(a) Při psaní argumentu goniometrických funkcí se často závorky vynechávají, např. místo $\sin(x)$ se píše jenom $\sin x$, také místo $\sin(2x)$ se píše $\sin 2x$ a místo $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ se píše jenom $\sin\frac{x}{2}$. Mocniny se píší před argument $\sin^2 x$ nebo $\sin^2(x)$ místo těžkopádného $(\sin(x))^2$, bez závorek $\sin x^2$ totiž znamená $\sin(x^2)$.

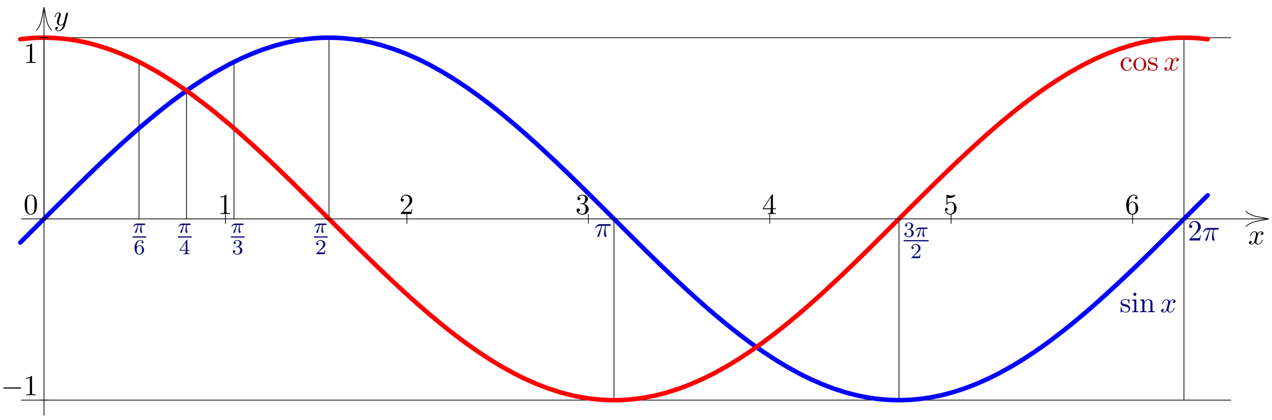
(b) Na obrázku jsou vidět také hodnoty funkcí tangens a kotangens. Protože x označuje velikost úhlu (měřeného délkou orientovaného oblouku na kružnici k), označme „vodorovnou" souřadnicovou osu y a „svislou" souřadnicovou osu z. Koncové rameno úhlu „prodloužíme" na přímku p a obrázek doplníme „svislou" přímkou $y = 1$ a „vodorovnou" přímkou $z = 1$. Potom funkce $\operatorname{tg} x$ je „svislá" souřadnice průsečíku C přímky p a přímky $y = 1$, a $\operatorname{cotg} x$ je „vodorovná" souřadnice průsečíku D přímky p a „vodorovné" přímky $z = 1$.

(c) Z definice a obrázku je také vidět, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány pro všechny hodnoty úhlu $x \in \mathbb{R}$.

(d) Z definice $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$ plyne, že funkce $\operatorname{tg} x$ není definována pro $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kdy $\cos x = 0$. Pro tyto hodnoty x na obrázku přímka p neprotíná přímku $y = 1$. Také z definice $\operatorname{cotg} x = \cos x/\sin x$ plyne, že funkce $\operatorname{cotg} x$ není definována pro $x = k\pi$, kdy $\sin x = 0$. Pro tyto hodnoty přímka p neprotíná přímku $z = 1$.

(e) Z obrázku lze dále usoudit, že zatímco funkce sin a cos mají (nejmenší) periodu 2π, funkce tg a cotg mají (nejmenší) periodu poloviční, tj. π.

(f) Protože délka OB je rovna jedné, z Pythagorovy věty plyne rovnost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.



Obr. 4.17: Grafy funkcí $\sin x$ a $\cos x$ na základní periodě $\langle 0, 2\pi)$.

Zapamatujte si vybrané hodnoty funkcí v prvním kvadrantu a znaménka v dalších kvadrantech. Jako mnemotechnická pomůcka pro hodnoty funkce sinus pro $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ slouží řada: $\frac{1}{2}\sqrt{0}$, $\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ a v opačném pořadí pro kosinus.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$ (30°)	$\frac{1}{4}\pi$ (45°)	$\frac{1}{3}\pi$ (60°)	$\frac{1}{2}\pi$ (90°)	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+ \nearrow$	$+ \searrow$	$- \searrow$	$- \nearrow$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$+ \searrow$	$- \searrow$	$- \nearrow$	$+ \nearrow$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nearrow\infty$	$+ \nearrow$	$- \nearrow$	$+ \nearrow$	$- \nearrow$
$\operatorname{cotg} x$	$\infty \searrow$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$+ \searrow$	$- \searrow$	$+ \searrow$	$- \searrow$

Základní vlastnosti goniometrických funkcí shrneme ve větě:

Věta 4.26. (Vlastnosti goniometrických funkcí)

(a) Definiční obory: $\mathcal{D}(\sin x) = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{D}(\cos x) = (-\infty, \infty)$,
$\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $\mathcal{D}(\operatorname{cotg}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, k\pi + \pi)$.

(b) Obory hodnot: $\mathcal{H}(\sin x) = \mathcal{H}(\cos x) = \langle -1, 1\rangle$, $\mathcal{H}(\operatorname{tg} x) = \mathcal{H}(\operatorname{cotg} x) = (-\infty, \infty)$.

(c) Funkce $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou liché, funkce $\cos x$ je sudá.

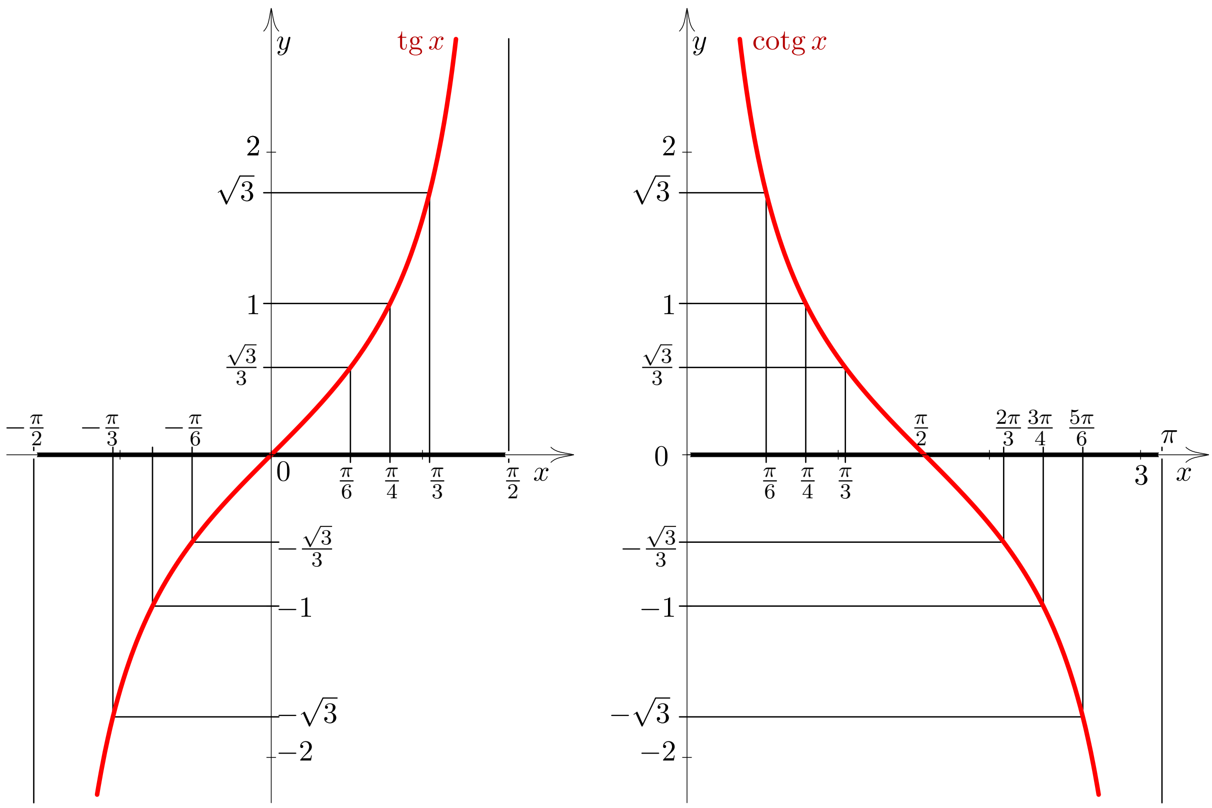
(d) Funkce $\sin x$ a $\cos x$ mají periodu 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

a funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ mají periodu π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x$.

(e) Funkce $\sin x$ je rostoucí na intervalech $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ a klesající na intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$. Funkce $\cos x$ je rostoucí na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi\rangle$ a klesající na intervalech $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$. Funkce $\operatorname{tg} x$ je rostoucí na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ a funkce $\operatorname{cotg} x$ je klesající na intervalech $(k\pi, \pi + k\pi)$.

(f) Funkce $\sin x$ je konvexní na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi\rangle$ a konkávní na $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$, inflexní body jsou $k\pi$. Funkce $\cos x$ je konvexní na intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ a konkávní na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, inflexní body jsou $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Funkce $\operatorname{tg} x$ je konvexní na intervalech $\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ a konkávní na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\rangle$, inflexní body jsou $k\pi$. Funkce $\operatorname{cotg} x$ je konvexní na $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle$ a konkávní na $\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$, inflexní body jsou $\frac{\pi}{2} + k\pi$.



Obr. 4.18: Definiční obor a graf funkcí na základních periodách: $\operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\operatorname{cotg} x$ na $(0, \pi)$.

Věta 4.27. (Užitečné vzorce pro goniometrické funkce)

(a) Vztahy mezi funkcemi: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$,
$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x)$.

(b) Základní rovnosti: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

(c) Vzorce pro součet argumentů pro $\sin x$ a $\cos x$:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\,.$$

(d) Důsledkem jsou vzorce pro dvojnásobný argument:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\,.$$

(e) Pro integrování mocnin funkcí sinus a kosinus budou později užitečné vztahy, které snadno plynou z předchozích vzorců:

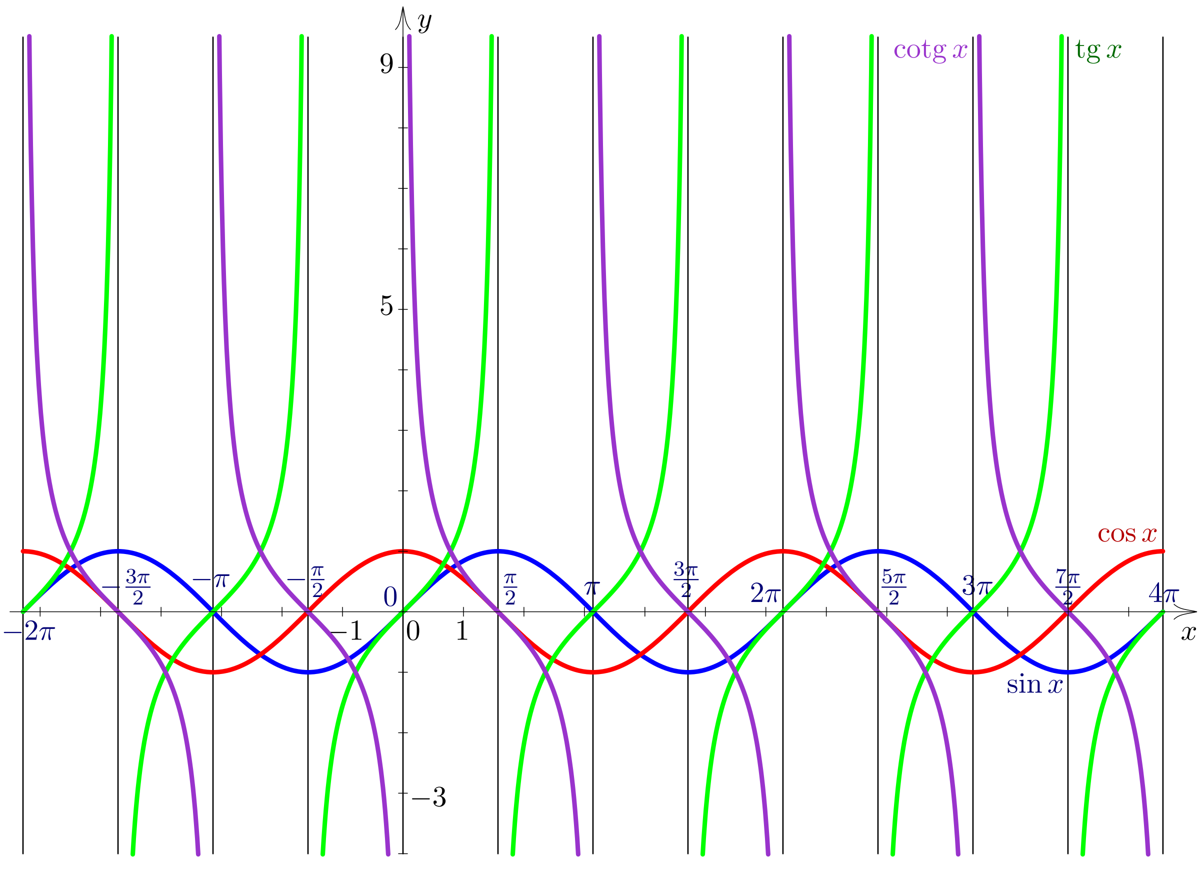
$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos(2x))\,, \qquad \cos^2(x) = \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos(2x)).$$

(f) Při odvozování derivace využijeme vzorec pro součet a rozdíl hodnot sinus a kosinus, které lze odvodit z předchozích vzorců pro součet argumentů

$$\sin u + \sin v = 2 \sin\frac{u+v}{2} \cdot \cos\frac{u-v}{2}\,, \quad \sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2} \cdot \sin\frac{u-v}{2}\,,$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2} \cdot \cos\frac{u-v}{2}\,, \qquad \cos u - \cos v = -2 \sin\frac{u+v}{2} \cdot \sin\frac{u-v}{2}\,.$$

Pro srovnání uvedeme ještě grafy všech goniometrických funkcí na větším intervalu:



Obr. 4.19: Grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $(-2\pi, 4\pi)$.

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Protože goniometrické funkce jsou periodické, nejsou prosté. Proto ve všech případech musíme zúžit definiční obor původní goniometrické funkce na interval, ve kterém je prostá. Z možných intervalů vybíráme ten interval, který je nejblíže k nule a obsahuje kladná čísla:

(a) $\sin x$ je prostá z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$, inverzní funkci značíme $\arcsin x$,

(b) $\cos x$ je prostá z $\langle 0, \pi\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$, inverzní funkci značíme $\arccos x$,

(c) $\operatorname{tg} x$ je prostá z $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na $(-\infty, \infty)$, inverzní funkci značíme $\operatorname{arctg} x$,

(d) $\operatorname{cotg} x$ je prostá z $(0, \pi)$ na $(-\infty, \infty)$, inverzní funkci značíme $\operatorname{arccotg} x$.

Definice 4.28. (Cyklometrické funkce) Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím jsou definovány následovně:

(a) Funkce **arkussinus** je inverzní k funkci sinus na $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, tj. pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\arcsin x = y, \quad \text{pokud} \quad \sin y = x \text{ a } y \in \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle.$$

(b) Funkce **arkuskosinus** je inverzní k funkci kosinus na $\langle 0, \pi\rangle$, tj. pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí

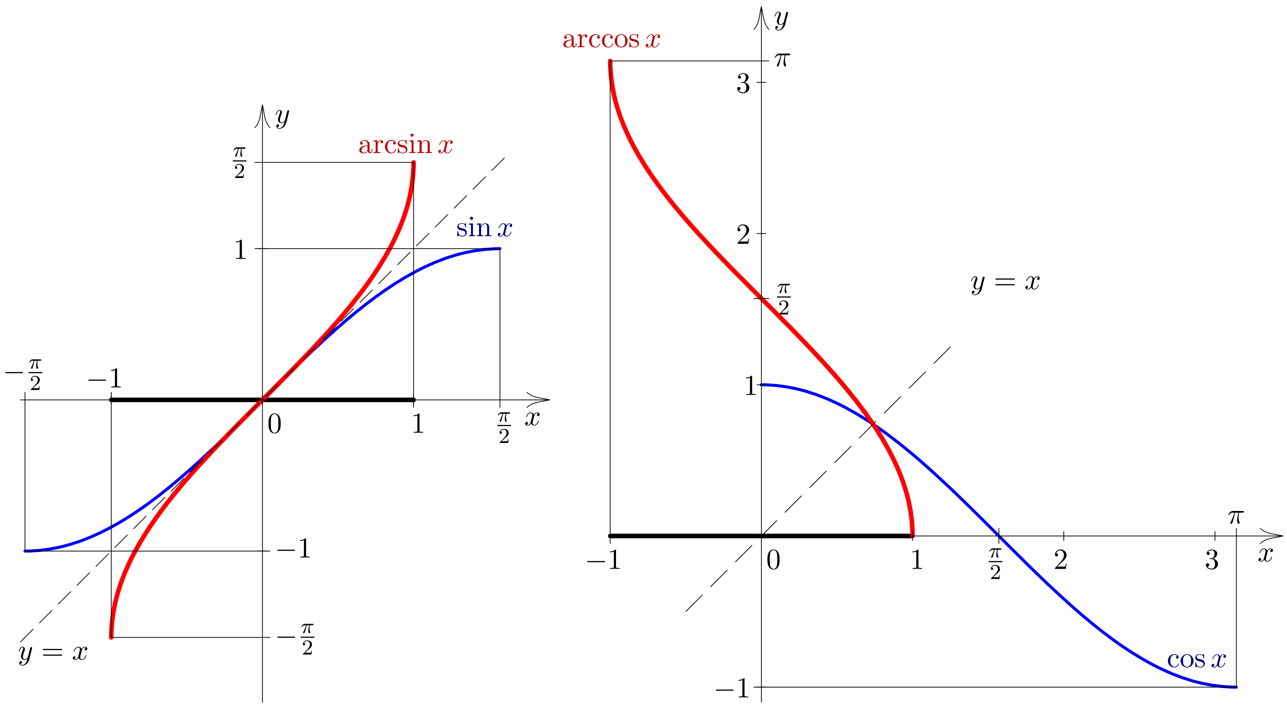
$$\arccos x = y, \quad \text{pokud} \quad \cos y = x \quad \text{a} \quad y \in \langle 0, \pi\rangle.$$

(c) Funkce **arkustangens** je inverzní k funkci tangens na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, tj. pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arctg} x = y, \quad \text{pokud} \quad \operatorname{tg} y = x \quad \text{a} \quad y \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi).$$

(d) Funkce **arkuskotangens** je inverzní k funkci kotangens na $(0, \pi)$, tj. pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg} x = y, \quad \text{pokud} \quad \operatorname{cotg} y = x \quad \text{a} \quad y \in (0, \pi).$$

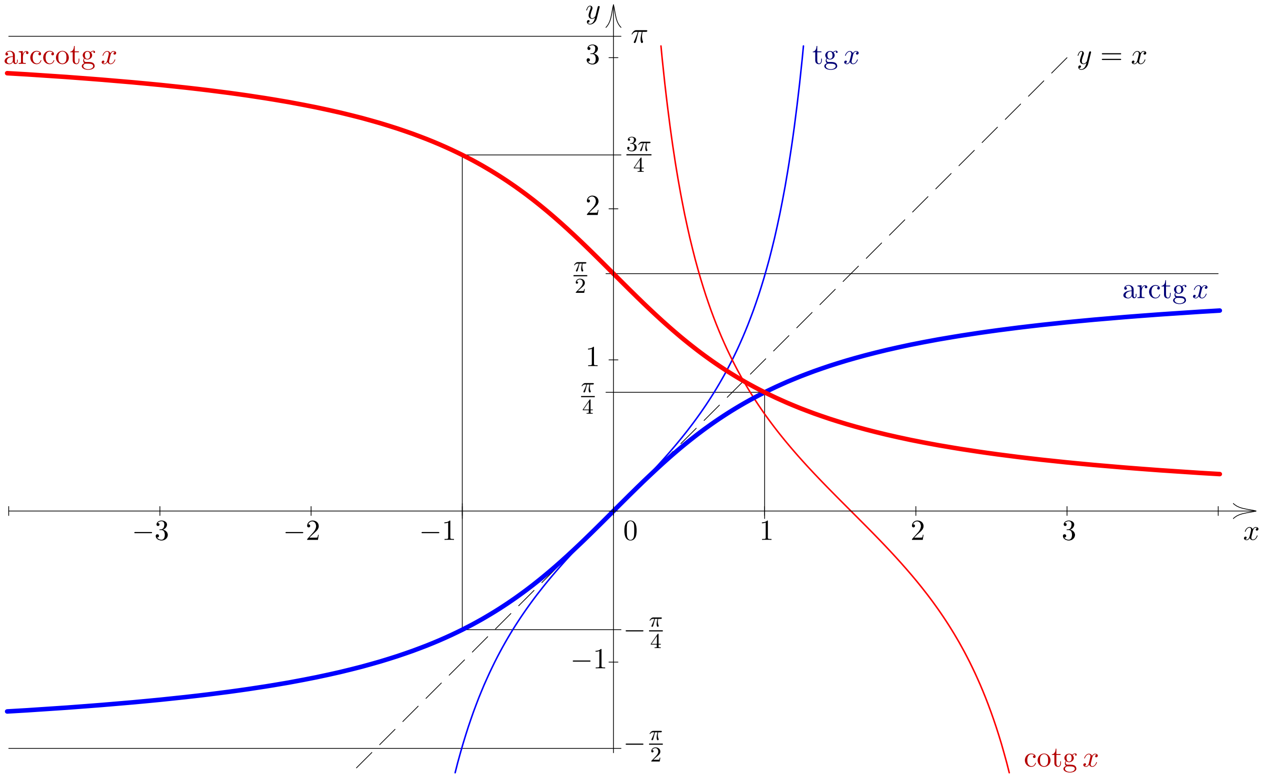


Obr. 4.20: Grafy funkce $\arcsin x$ inverzní k $\sin x$ a funkce $\arccos x$ inverzní k $\cos x$.

Vybrané hodnoty cyklometrických funkcí, lze snadno vyčíst z hodnot goniometrických funkcí:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$(-1,1)$
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\searrow$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$(-\infty,\infty)$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$
$\operatorname{arccotg} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\searrow$



Obr. 4.21: Graf funkce $\operatorname{arctg} x$ inverzní k $\operatorname{tg} x$ a graf funkce $\operatorname{arccotg} x$ inverzní k $\operatorname{cotg} x$. Všimněte si zrcadlové symetrie funkce a inverzní funkce podle osy $y = x$.

Věta 4.29. (Vlastnosti cyklometrických funkcí)

(a) Definičním oborem funkcí $\arcsin x$ a $\arccos x$ je uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$ a definičním oborem funkcí $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou všechna reálná čísla $(-\infty, \infty)$.

(b) Oborem hodnot cyklometrických funkcí jsou intervaly:

$$\mathcal{H}(\arcsin) = \left\langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle,\ \mathcal{H}(\arccos) = \langle 0, \pi\rangle,\ \mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),\ \mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi).$$

(c) Funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou rostoucí, funkce $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ klesající.

(d) Funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou konkávní pro $x \le 0$ a konvexní pro $x \ge 0$, funkce $\arccos x$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou konvexní pro $x \le 0$ a konkávní pro $x \ge 0$ a všechny mají inflexní bod $x = 0$.

(e) Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

(f) pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Hyperbolické funkce

Pro úplnost uvedeme ještě hyperbolické funkce, které mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce a nacházejí využití v některých aplikacích.

Definice 4.30. (Hyperbolické funkce) Funkce hyperbolický sinus označovaný $\sinh x$ a hyperbolický kosinus označovaný $\cosh x$ jsou definovány pomocí exponenciální funkce:

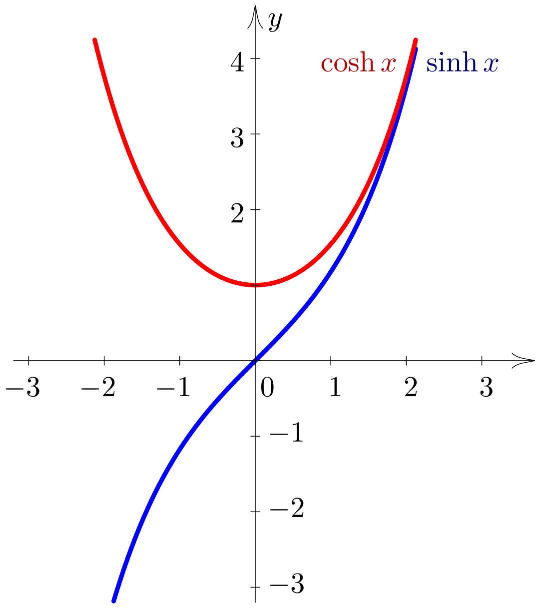
$$\sinh x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right], \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right].$$

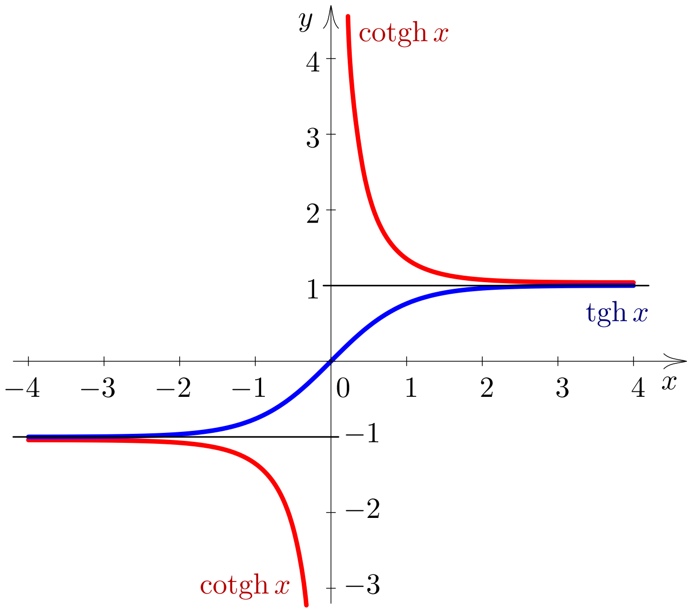
Definičním oborem funkcí $\sinh x, \cosh x$ je celé $\mathbb{R}$, obor hodnot funkce $\sinh x$ je celé $\mathbb{R}$ a funkce cosh je $\langle 1, \infty)$. Funkce $\sinh x$ je lichá, $\cosh x$ je sudá.

Podobně hyperbolický tangens označený tgh a hyperbolický kotangens cotgh jsou definovány jako podíl hyperbolického sinu a kosinu:

$$\mathrm{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}, \quad \mathrm{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Funkce $\tanh x$ je definovaná a rostoucí na celém $\mathbb{R}$ s oborem hodnot $(-1, 1)$. Funkce $\mathrm{cotgh}\, x$ je klesající na obou „částech“: levé záporné definované na $(-\infty, 0)$ s hodnotami $(-\infty, -1)$ a pravé kladné zobrazující $(0, \infty)$ na $(1, \infty)$. Obě funkce jsou liché.





Obr. 4.22: Grafy hyperbolických funkcí $\sinh x$, $\cosh x$ a funkcí $\mathrm{tgh}\, x$, $\mathrm{cotgh}\, x$.

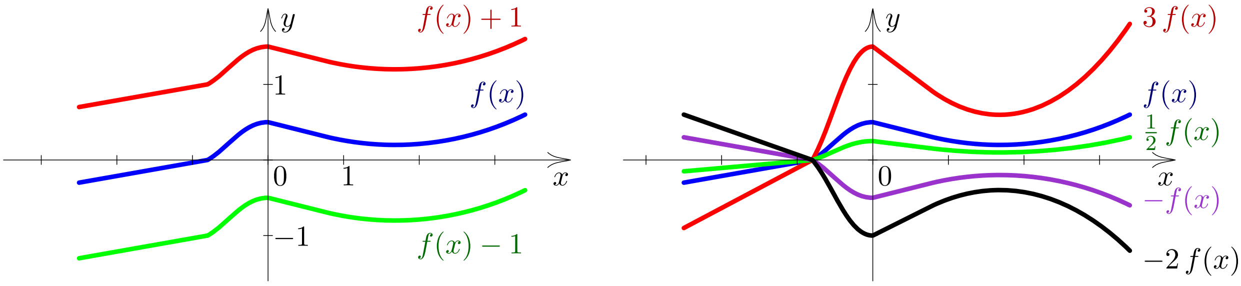
V kurzu Matematika 3 uvidíme, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ souvisejí s exponenciální funkcí rozšířenou na komplexní čísla. Platí totiž podobné vzorce

$$\sin x = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right] \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right],$$

kde i je imaginární jednotka $\mathrm{i}^2 = -1$. V literatuře lze také najít zkrácený symbol sh pro hyperbolický sinus, ch pro hyperbolický kosinus, th pro hyperbolický tangens a coth pro hyperbolický kotangens.

Náčrty grafů transformovaných funkcí

Dosud jsme se zabývali elementárními funkcemi v základním tvaru. Studenti mají znát, jak se změní graf funkce při jednoduchých transformacích. Budeme se zabývat lineárními transformacemi jednak hodnoty, tj. závislé proměnné y, a také nezávislé proměnné x.



Obr. 4.23: Posunutí hodnot funkce a násobek hodnot funkce.

Věta 4.31. (Změna hodnoty funkce, tj. závisle proměnné y) Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $\mathcal{D}(f) = \langle a, b\rangle$ a oborem hodnot $\mathcal{H}(f) = \langle A, B\rangle$. Potom při následujících změnách funkce se definiční obor nemění, mění se však obor hodnot a graf funkce:

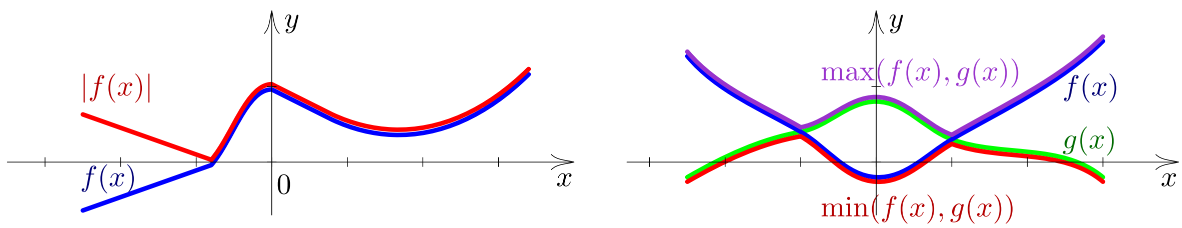
(a) *přičtení konstanty* f(x)+D: obor hodnot se posune o D na $\langle A + D, B + D\rangle$. Graf se přitom posune o D nahoru při $D > 0$ a o $|D|$ dolů v případě $D < 0$.

(b) *násobek hodnoty* $C\cdot f(x)$: obor hodnot se zvětší C-krát na $\langle CA, CB\rangle$ (případně $\langle CB, CA\rangle$ pokud $C < 0$) a graf se C-krát ve svislém směru „roztáhne" pokud $C > 1$ nebo „stáhne" pokud $0 < C < 1$. V případě záporného $C < 0$ se graf natáhne nebo stáhne $|C|$-krát a navíc „překlopí" okolo osy x.

(c) *absolutní hodnota* $|f(x)|$: záporné hodnoty grafu funkce (pokud existují) se „překlopí" na kladné hodnoty grafu, kladné hodnoty se nemění.
- Pokud $A > 0$ obor hodnot $\mathcal{H}(f)$ (ani graf funkce) se nemění.
- Pokud $A < 0 < B$, potom obor hodnot bude $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \max(-A, B)\rangle$.
- Pokud $A < B < 0$, potom $\mathcal{H}(f) = \langle -B, -A\rangle$.

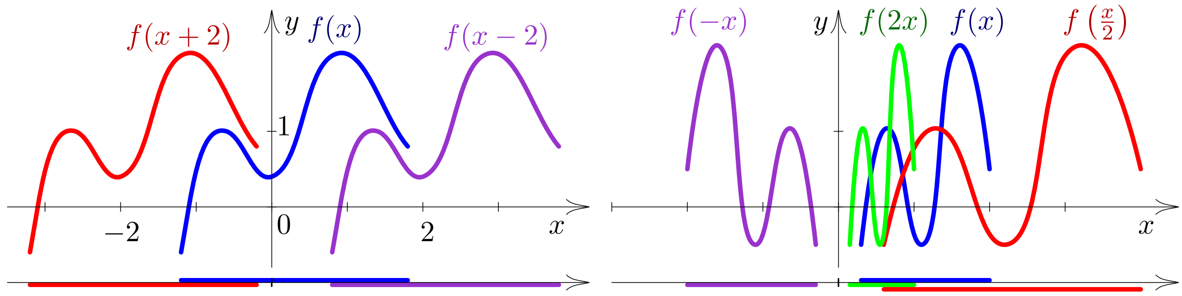
(d) *maximum* $\max(f(x), g(x))$ dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ se stejným definičním oborem. Bereme vždy graf „horní" funkce, tj. té funkce, která má na intervalu větší hodnoty. Tam, kde je $f(x) \geq g(x)$, vezmeme $f(x)$, tam kde $f(x) < g(x)$, vezmeme $g(x)$.

(e) *minimum* $\min(f(x), g(x))$ dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ se stejným definičním oborem. Bereme vždy graf „dolní" funkce, tj. té funkce, která má na intervalu menší hodnoty.



Obr. 4.24: Graf absolutní hodnoty funkce a graf maxima a minima dvou funkcí.

Při transformaci argumentu funkce je situace je jiná. Obor hodnot se nemění (kromě případu absolutní hodnoty), mění se definiční obor a to obráceně než hodnoty v předchozím případě:



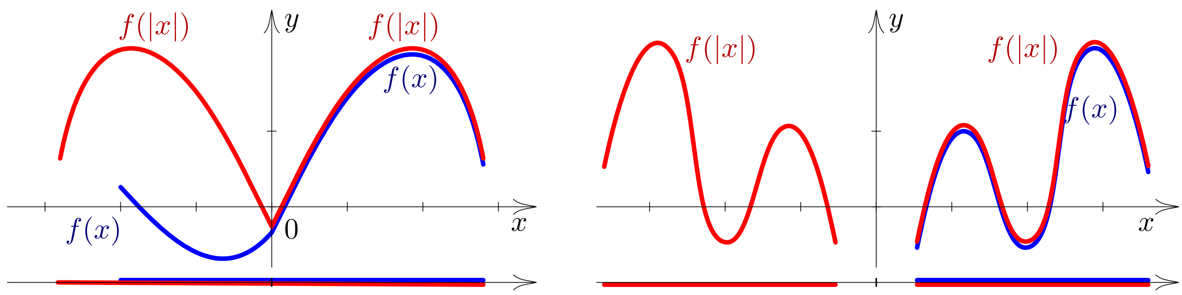
Obr. 4.25: Graf funkce a definiční obor posunutého argumentu $f(x+d)$ a násobku argumentu $f(cx)$.

Věta 4.32. (Změna argumentu funkce, tj. nezávisle proměnné x) Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $\mathcal{D}(f) = \langle a, b\rangle$ a oborem hodnot $\mathcal{H}(f) = \langle A, B\rangle$. Potom při lineární změně argumentu se obor hodnot nemění, mění se však definiční obor a graf funkce:

(a) *přičtení konstanty* $f(x+d)$: definiční obor se posune o $-d$ na $\langle a-d, b-d\rangle$. Graf funkce se přitom posune o d doleva při $d > 0$ a o $|d|$ doprava při $d < 0$.

(b) *násobek argumentu* $f(cx)$: definiční obor se „zúží“ c-krát na $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ (případně $\left(\frac{b}{c}, \frac{a}{c}\right)$ pro $c < 0$). Graf se c-krát ve „vodorovném“ směru „zúží“ pokud $c > 1$ nebo „roztáhne“ při $0 < c < 1$. V případě záporného $c < 0$ se graf natáhne nebo stáhne $|c|$-krát na šířku a navíc „překlopí“ okolo osy y.

(c) *absolutní hodnota* $f(|x|)$: pro kladné x se graf funkce nemění. Graf $f(x)$ pro záporná x zmizí, místo něho zde bude graf funkce pro kladné x „překlopený“ kolem osy y.
- Pokud $a > 0$ definiční obor $\mathcal{D}(f)$ ani obor hodnot $\mathcal{H}(f)$ se nemění.
- Pokud $a \le 0 \le b$, potom definiční obor bude $\langle -b, b\rangle$ a obor hodnot bude oborem hodnot funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, b\rangle$.
- Pokud $a < b < 0$, potom $f(|x|)$ nebude definována pro žádné x.



Obr. 4.26: Graf a definiční obor absolutní hodnoty argumentu $f(|x|)$, případ $a < 0 < b$ a $0 < a < b$.

Poznámky 4.33.

(a) Nechť konstanty d, D jsou kladné. Pamatujte si, že při $f(x)+D$ se graf posouvá nahoru, zatímco $f(x+d)$ obráceně, tj. doleva. Pro $c, C > 1$ se graf funkce $C \cdot f(x)$ roztahuje na výšku, zatímco při $f(c \cdot x)$ se graf neroztahuje, ale zužuje na šířku.

(b) Jestliže funkce $f(x)$ je definována pro $x \in \langle a, b\rangle$, potom definiční obor funkce $f(cx+d)$ zjistíme nejsnáze řešením nerovnice $a \le cx+d \le b$. Například při hledání definičního oboru funkce $\arcsin(\frac{3-x}{5})$ postupujeme takto: funkce $\arcsin x$ je definována pro x splňující $-1 \le x \le 1$. V této nerovnici x nahradíme výrazem $\frac{3-x}{5}$ a řešíme nerovnici $-1 \le \frac{3-x}{5} \le 1$. Úpravou dostáváme $-5 \le 3-x \le 5$ odkud plyne $-2 \le x \le 8$, tj. $x \in \langle -2, 8\rangle$.